

МИНИСТЕРСТВО ОБРАЗОВАНИЯ И НАУКИ РОССИЙСКОЙ ФЕДЕРАЦИИ  
Государственное образовательное учреждение  
высшего профессионального образования  
«Уральский государственный университет им. А.М. Горького»

Математико-механический факультет  
Кафедра математической физики

## **УРАВНЕНИЯ МАТЕМАТИЧЕСКОЙ ФИЗИКИ**

---

Программа дисциплины

Екатеринбург  
2010

УТВЕРЖДАЮ

Проректор

\_\_\_\_\_ С.А.Рогожин  
(Подпись)

\_\_\_\_\_  
(Дата)

Программа дисциплины «Уравнения математической физики» составлена в соответствии с требованиями федерального/национально-регионального (вузовского) компонента к обязательному минимуму содержания и уровню подготовки:

дипломированного специалиста по специальности «Математика», 010100.62

бакалавра, по направлению «Механика и математическое моделирование», 010800.62

по циклу «Общепрофессиональных и специальных дисциплин» государственного образовательного стандарта высшего профессионального образования.

Семестр VI, VII

Общая трудоемкость дисциплины 200

В том числе:

лекций 68

семинаров \_\_\_\_\_

практических (лабораторных) работ 68

Контрольные мероприятия:

рефераты \_\_\_\_\_

коллоквиумы \_\_\_\_\_ 6-7 сем

контрольные работы \_\_\_\_\_ 6-7 сем

другие \_\_\_\_\_

Составитель (разработчик):

Охезин Сергей Павлович, к.ф.-м.н., доцент кафедры математической физики УрГУ

Рекомендовано к изданию учебно-методической комиссией \_\_\_\_\_ факультета

Протокол заседания № \_\_\_\_\_ от \_\_\_\_\_ - \_\_\_\_\_

## **I. Введение**

- 1) Цель дисциплины: Дать студентам представление о математических моделях фундаментальных законов сохранения в механике сплошных сред, о постановках основных начально-краевых задач и методах их решения.
- 2) Задачи дисциплины: В курсе изучаются модели, описываемые дифференциальными уравнениями с частными производными гиперболического, параболического и эллиптического типа. Изучаются вопросы существования, единственности и непрерывной зависимости классических решений основных краевых задач для этих уравнений. Большое внимание уделено изучению концепции обобщенных решений уравнений математической физики.
- 3) Место дисциплины в системе высшего профессионального образования: Для успешного усвоения материала курса требуется квалифицированная подготовка по математическому анализу, теории обыкновенных дифференциальных уравнений, функциональному анализу и по теории функций комплексного аргумента.
- 4) Требования к уровню освоения содержания курса: В процессе обучения студенты приобретают практические навыки построения математических моделей, усваивают конкретные приемы решения задач (метод Фурье, интегральные преобразования Фурье и Лапласа)
- 5) Методическая новизна: Новым элементом в преподавании является активное привлечение идей и методов функционального анализа и концепции обобщенных решений в Соболевских пространствах.

## **II. Содержание курса**

### **1. Разделы курса, темы, их краткое содержание**

#### ***1) Общие сведения из теории дифференциальных уравнений с частными производными.***

Предмет "Уравнения математической физики". Простейшие примеры трех основных типов уравнений с частными производными второго порядка. Общие сведения из теории дифференциальных уравнений с частными производными.

Порядок уравнения. Линейные и нелинейные уравнения. Понятие классического решения. Характеристическая форма и характеристическая поверхность. Постановки краевых задач. Классификация линейных уравнений второго порядка. Канонические формы уравнений. Начальные и граничные условия. Задача Коши. Теоремы Коши-Ковалевской и Гольмгрена. Корректные и некорректные задачи. Пример Адамара.

## **2) Уравнения гиперболического типа.**

Основные физические законы и принципы математического моделирования волновых процессов в механических системах. Вывод уравнения поперечных колебаний струны. Вывод уравнения продольных колебаний стержня. Задача Коши для однородного волнового уравнения на прямой. Метод характеристик. Формула Даламбера. Корректность задачи Коши. Краевые задачи Дирихле, Неймана и смешанная для волнового уравнения на полупрямой и отрезке. Задача Коши для неоднородного волнового уравнения. Задачи Коши для волнового уравнения на плоскости и в пространстве. Метод Фурье для одномерного волнового уравнения. Задача Штурма-Лиувилля. Теорема Стеклова. Теорема существования, единственности и непрерывной зависимости от начальных условий классического решения начально-краевой задачи для гиперболического уравнения на отрезке.

## **3) Уравнения параболического типа.**

Основные физические законы и принципы математического моделирования процессов теплопроводности. Уравнения теплопроводности, диффузии и фильтрации. Принцип максимума (минимума) для уравнений параболического типа. Уравнение теплопроводности на бесконечной прямой. Интегральное преобразование Фурье. Формула Пуассона. Методы решения краевых задач на полупрямой. Теорема существования, единственности и непрерывной зависимости от начальных условий классического решения начально-краевой задачи для параболического уравнения на отрезке. Обратные задачи для уравнения теплопроводности. Обоснование метода Фурье. Преобразование Лапласа и его свойства.

## **4) Уравнения эллиптического типа.**

Примеры физических задач, приводящих к уравнениям эллиптического типа. Оператор Лапласа в криволинейных и ортогональных координатах. Фундаментальные решения уравнения Лапласа на плоскости и в трехмерном пространстве. Теорема об интегральном представлении гармонической функции. Свойства гармонических функций. Теорема о потоке. Теорема о среднем значении. Принцип максимума (минимума) для гармонических функций. Внутренние и внешние краевые задачи Дирихле на плоскости и в пространстве. Внутренняя и внешняя задачи Неймана. Применение метода разделения переменных для решения краевых задач для уравнений эллиптического типа.

## **5) Обобщенные решения уравнений математической физики.**

Понятие обобщенной производной и ее свойства. Понятие пространства Соболева. Шкала пространств Соболева. Неравенство Пуанкаре. Понятие следа элемента

пространства Соболева. Обобщенные решения уравнений эллиптического, параболического и гиперболического типов. Вариационные методы решения краевых задач. Обобщенная задача Штурма-Лиувилля. Обоснование метода Фурье. Обобщенные решения нелинейных уравнений. Понятие вязкого решения и его свойства.

## **2. Темы лабораторных, семинарских занятий и коллоквиумов**

Темы практических занятий:

- 1) Уравнения гиперболического типа, формула Даламбера
- 2) Метод разделения переменных
- 3) Уравнения параболического типа
- 4) Уравнения эллиптического типа
- 5) Обобщенные решения уравнений математической физики

## **3. Перечень примерных контрольных вопросов и заданий для самостоятельной работы**

- 1) Формула Даламбера для полуограниченной струны
- 2) Формула Даламбера для неоднородных уравнений
- 3) Формула Пуассона для полуограниченного стержня
- 4) Преобразования Лапласа и Фурье
- 5) Теоремы о непрерывной зависимости решений задач Дирихле от граничных функций

## **4. Примерная тематика рефератов, курсовых работ**

- 1) Обобщенные решения, непрерывная зависимость решений от граничных функций в различных топологиях
- 2) Зависимость обобщенных решений от формы пространственной области

## **5. Примерный перечень вопросов к экзамену (зачету)**

- 1) Теорема существования классического решения краевой задачи для уравнения гиперболического типа на отрезке
- 2) Теорема единственности классического решения краевой задачи для уравнения гиперболического типа на отрезке
- 3) Теорема существования классического решения краевой задачи для уравнения параболического типа на отрезке
- 4) Теорема единственности классического решения краевой задачи для уравнения параболического типа на отрезке
- 5) Принцип максимума для уравнений параболического типа
- 6) Формула Пуассона
- 7) Формулы Грина

- 8) Теорема о потоке для гармонических функций
- 9) Теорема о среднем для гармонических функций
- 10) Принцип максимума для гармонических функций
- 11) Теоремы единственности и непрерывной зависимости решений задач Дирихле для уравнения Лапласа
- 12) Обобщенные производные
- 13) Пространства Соболева
- 14) Свойства оператора следа
- 15) Неравенство Пуанкаре
- 16) Теорема существования, единственности и непрерывной зависимости обобщенного решения задачи Дирихле
- 17) Обобщенные решения параболических уравнений
- 18) Обобщенные решения гиперболических уравнений
- 19) Вариационные принципы
- 20) Вязкие решения уравнений математической физики

### **III. Распределение часов курса по темам и видам работ**

№ п/п	Наименование разделов и тем	ВСЕГО (часов)	Аудиторные занятия (час)		Самостоятельная работа
			в том числе		
			Лекции	Практические (семинары, лабораторные работы)	
1	Общие сведения из теории дифференциальных уравнений с частными производными.	22	12	6	4
2	Уравнения гиперболического типа.	52	14	18	20
3	Уравнения параболического типа.	54	14	20	20
4	Уравнения эллиптического типа.	38	14	14	10
5	Обобщенные решения уравнений математической физики.	34	14	10	10
	ИТОГО:	200	68	68	64

### **IV. Форма итогового контроля**

6 семестр - зачет

7 семестр - экзамен

## **V. Учебно-методическое обеспечение курса**

### **1. Рекомендуемая литература (основная):**

- 1) Тихонов А.Н., Самарский А.А. Уравнения математической физики. М. Наука, 1972.
- 2) Арсенин В.Я. Методы математической физики и специальные функции. М. Наука, 1984.
- 3) Владимиров В.С. Уравнения математической физики. М. Наука, 1988.
- 4) Михайлов В.П. Дифференциальные уравнения в частных производных. М. Наука, 1983.
- 5) Петровский И.Г. Лекции об уравнения с частными производными. М. Изд-во МГУ, 1984.
- 6) Фарлоу С. Дифференциальные уравнения с частными производными для научных сотрудников и инженеров. М. Мир, 1986.

### **7) Рекомендуемая литература (дополнительная)**

- 1) Мизохата С. Теория уравнений с частными производными. М. Мир, 1977.
- 2) Ладъженская О.А. Краевые задачи математической физики. М. Наука, 1973.
- 3) Lawrence C. Evans. Partial Differential Equations. Graduate Studies in Mathematics, Volume 19, AMS 1998.
- 4) Будаков Б.М., Самарский А.А., Тихонов А.Н. Сборник задач по математической физике. М. Наука, 1980.
- 5) Бицадзе А.В., Калинин Д.Ф. Сборник задач по уравнениям математической физики. М.Наука, 1985.
- 6) Охезин С.П. Методы решения основных краевых задач для уравнений гиперболического типа. Методические указания. Свердловск, УрГУ, 1985.
- 7) Охезин С.П. Методы решения основных краевых задач для уравнений параболического типа. Методические указания. Свердловск, УрГУ, 1987.
- 8) Охезин С.П. Методы решения основных краевых задач для уравнений эллиптического типа. Методические указания. Свердловск, УрГУ, 1990.