ДИНАМИЧЕСКИЕ БИМАТРИЧНЫЕ ИГРЫ И МОДЕЛИ ИНВЕТИЦИЙ

УДК 517.977

Н. А. Красовский старший преподаватель
кафедра информационных технологий и математического моделирования
Уральский государственный аграрный университет
А.М. Тарасьев, д.ф.-м.н., профессор
кафедра анализа систем и принятия решений
Уральский федеральный университет, ВШЭМ
заведующий сектором
Институт математики и механики им. Н.Н. Красовского УрО РАН

Аннотация. В работе рассматривается модель эволюционной игры с ненулевой суммой между двумя группами участников в рамках теории дифференциальных игр. Используются некоторые идеи и подходы неантагонистических дифференциальных игр. Рассматриваются конструкции и методы анализа эволюционных игр. Внимание сконцентрировано на построении динамического равновесия по Нэшу с гарантирующими стратегиями игроков, которые максимизируют соответствующие функции выигрыша. Строятся разрешающие траектории, которые дают результат, лучший по сравнению с классическими моделями, например, моделями с репликаторной динамикой.

Ключевые слова: динамические игры, модели инвестиций, динамическое программирование, декомпозиционные алгоритмы поиска равновесия

Abstract. An evolutionary non-zero sum two players game model in framework of differential games theory is considered. Ideas and non-antagonistic differential games approaches are used. Constructions and evolutionary games analysis methods are considered. Most attention is concentrated on construction of dynamic Nash equilibrium with guaranteed players strategies, which are maximizing appropriate payoff functions. Resolving trajectories, which provide results better than classic replicator dynamics solutions, are constructed.

Keywords: dynamic games, investment models, dynamic programming, decomposition algorithms of searching equilibrium.

Динамика игрового взаимодействия соответствует дифференциальным играм [1-3] и эволюционным игровым моделям. Предполагается, что случайные взаимодействия между участниками представлены управляемым динамическим процессом, при котором соответствующие вероятности формируют фазовый вектор. Роль управляющих параметров играют информационные сигналы для участников. Такая динамика может быть интерпретирована как обобщение известных уравнений Колмогорова с управляющими параметрами. Выигрыши участников в каждом раунде специфицируются матрицей выигрышей. Рассматриваются различные типы средних значений выигрышей групп:

терминальные – для фиксированного времени и мультитерминальные – для предела на бесконечном интервале времени.

Предлагается иной подход, основанный на концепции «гарантии» и обеспечивающий более хорошие результаты, нежели классические решения. Такие новые решения генерируются в рамках теории позиционных дифференциальных игр и вовлекают гарантирующие обратные связи во вспомогательных играх с нулевой суммой [1,2]. Такие игры с нулевой суммой рассматриваются в рамках теории минимаксных решений уравнений Гамильтона-Якоби [4,5] Проводятся аналитические построения для функции цены и проверяются необходимые и достаточные условия, которые формулируются в терминах сопряженных производных [5].

Качественное поведение равновесных решений, порожденных гарантирующим синтезом, существенно отличается от траекторий эволюционных игр, представленных в классических моделях. Новые равновесные решения не являются гладкими и имеют переключения по характеристикам уравнений Гамильтона-Якоби. В отличие от классических траекторий они расположены в пересечении областей, для которых величины выигрышей игроков лучше соответствующих величин выигрышей, рассчитанных для статического равновесия по Нэшу.

Рассматривается система дифференциальных уравнений, которая описывает динамику поведения двух групп (коалиций)

$$\dot{x} = -x + u$$

$$\dot{y} = -y + v. \tag{1}$$

Здесь параметр $x, 0 \leq x \leq 1$, есть вероятность того, что произвольно выбранный игрок из первой группы придерживается первой стратегии (соответственно, $(1 - x)$ есть вероятность того, что он придерживается второй стратегии). Параметр $y, 0 \leq y \leq 1$, означает вероятность выбора первой стратегии игроком из второй коалиции (соответственно, $(1 - y)$ – вероятность того, что он придерживается второй стратегии). Управляющие параметры u и v удовлетворяют условиям $0 \leq u \leq 1, 0 \leq v \leq 1$, и могут быть интерпретированы как сигналы, рекомендующие смену стратегий игроками. Например, значение $u = 0$ $(v = 0)$ соответствует сигналу: «сменить первую стратегию на вторую». Значение $u = 1$ $(v = 1)$ соответствует сигналу: «сменить вторую стратегию на первую». Значение $u = x$ $(v = y)$ соответствует сигналу: «сохранять предыдущую стратегию».

Функционалы выигрыша коалиций определяются на траекториях системы дифференциальных уравнений игры в виде предельных значений средних биматричных выигрышей на бесконечном горизонте.

Терминальные функции выигрыша коалиций определяются как математическое ожидание выигрышей, задаваемых соответствующими матицами A и B в биматричной игре, и могут быть интерпретированы как «локальные» интересы коалиций в заданный момент T.

Рассматриваются модели динамических биматричных игр и строятся их решения на основе предложенного подхода.

В первой модели анализируется ситуация с одним статическим равновесием по Нэшу. Характерной конструкцией такой ситуации является игра на финансовых рынках акций и облигаций. Игроки представлены поведением торговцев, которые играют на повышение курса, и называются «быками», и торговцев, которые играют на понижение курса, и называются «медведями». Параметры матриц в этой игре означают доходность акций и облигаций, выраженную в виде процентных ставок,

$$A = \begin{pmatrix} 10 & 0 \\ 1.75 & 3 \end{pmatrix}, \quad B = \begin{pmatrix} -5 & 3 \\ 10 & 0.5 \end{pmatrix}. \tag{2}$$

Показано, что равновесные траектории в этой модели сходятся к точке пересечения линий переключения гарантирующих стратегий.

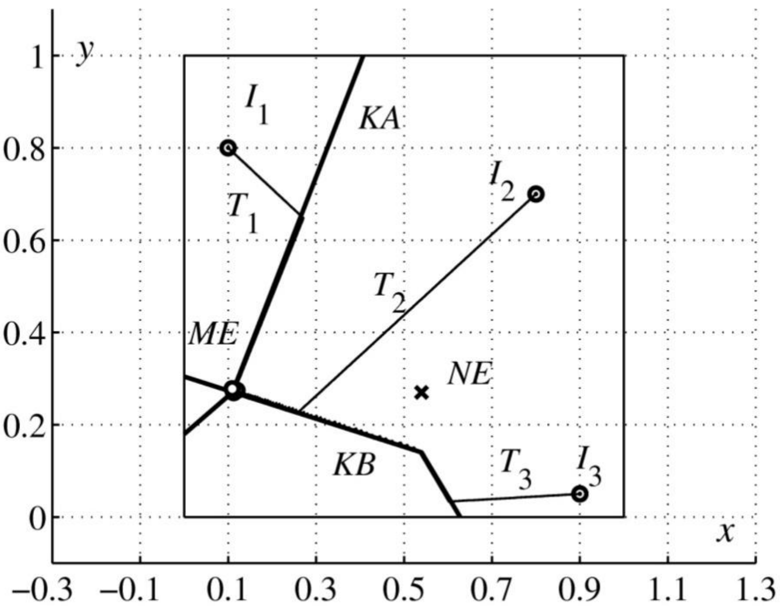

Рисунок 1. Равновесные траектории в случае единственного статического равновесия по Нэшу.

На рисунке 1 показаны ситуация равновесия по Нэшу *NE*, линии переключения *KA* и *KB*, точка рыночного равновесия в их пересечении *ME*, начальные точки I_1, I_2, I_3 и траектории алгоритма T_1, T_2, T_3, сходящиеся к рыночному равновесию. Видно, что новая точка равновесия *ME* существенно отличается от точки статического равновесия по Нэшу *NE*, и значение обоих функционалов выигрыша в новой точке лучше, чем в старой.

Во второй модели исследуется случай с тремя статическими равновесиями по Нэшу. Прототипом такой ситуации служат координационные игры. В таких играх функции выигрышей игроков не являются прямо противоположными и подразумевают скоординированные решения. Например, такая ситуация описывает процесс инвестирования двумя участниками рынка в два проекта.

Пусть выбор первой строки первым игроком означает инвестирование в первый проект, а второй строки - во второй проект. При этом выбор первого столбца вторым игроком означает инвестирование им в первый проект, а второго столбца во второй проект. Матрицы выигрышей первого и второго игрока задаются следующими параметрами.

$$A = \begin{pmatrix} 10 & 0 \\ 6 & 20 \end{pmatrix}, \quad B = \begin{pmatrix} 20 & 0 \\ 4 & 10 \end{pmatrix}. \tag{3}$$

Значения параметров этих матриц предполагают, что оба игрока значительно выигрывают, если вкладываются в один проект, и ничего не выигрывают, или выигрывают мало, если вкладываются в разные проекты.

В этом случае, в отличие от предыдущей модели, точка пересечения линий переключения гарантирующих стратегий имеется, но она не является точкой притяжения равновесных траекторий. При этом равновесные траектории, скользя по линиям переключения, сходятся к границам квадрата игры. Значения функционалов выигрыша в точках завершения динамики равновесных траекторий лучше, чем значения этих функционалов в точке среднего статического равновесия по Нэшу. Что же касается значений функционалов в точках статического равновесия, расположенных в вершинах квадрата, то здесь нет однозначного доминирования в сравнении с точками завершения динамики равновесных траекторий.

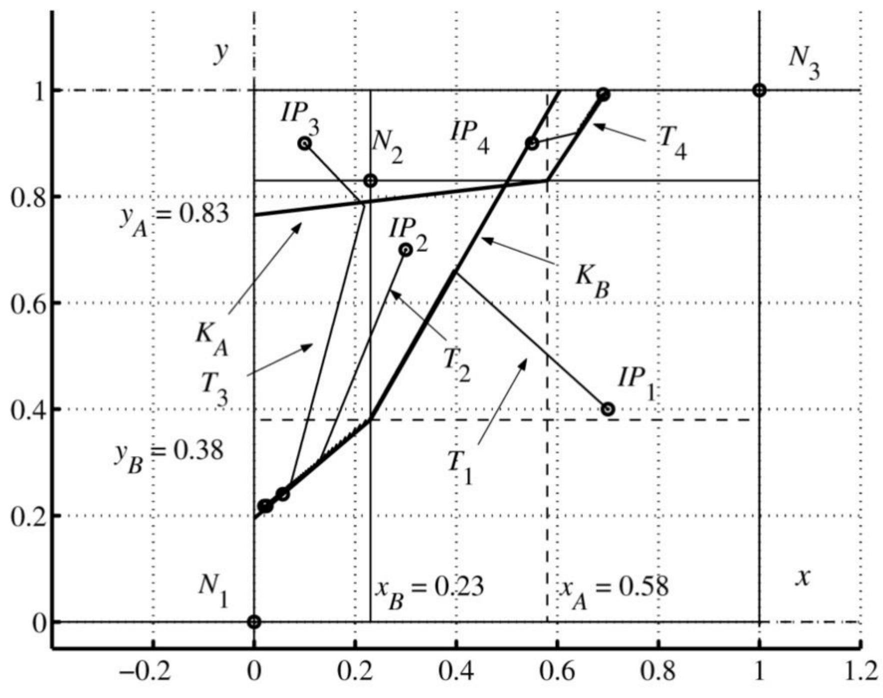

Рисунок 2. Равновесные траектории в случае статического мультиравновесия по Нэшу.

На рисунке 2 показан случай с тремя ситуациями равновесия по Нэшу N_1, N_2, N_3. Показаны траектории T_1, T_2, T_3, T_4, которые стартуют в начальных точках I_1, I_2, I_3, I_4, лежащих в качественно различных начальных областях. Их поведение можно охарактеризовать следующим образом. Они встречаются с линиями переключения *KA* или *KB*, а затем скользят вдоль них до тех пор, пока не достигнут границ квадрата, где заканчивают движение.

Работа поддержана программой Президиума РАН № 28, проектами УрО РАН № 15-16-1-13, № 15-7-1-22, проектом РФФИ № 14-01-00486-а и IIASA.

Список литературных источников

1. Клейменов А.Ф. Неантагонистические позиционные дифференциальные игры. Екатеринбург, Наука, 1993. 185 с.
2. Красовский Н.Н., Субботин А.И. Позиционные дифференциальные игры. М.: Наука, 1974. 456 с.
3. Кряжимский А.В., Осипов Ю.С. О дифференциально-эволюционных играх // Тр. Мат. ин-та РАН. 1995. Т. 211. С. 257-287.
4. Субботин А.И. Минимаксные неравенства и уравнения Гамильтона-Якоби. М.: Наука. 1991. 214 с.
5. Субботин А.И., Тарасьев А.М. Сопряженные производные функции цены дифференциальной игры // Докл. АН СССР. 1985. Т. 283, 3. С. 559-564.