

ПРИМЕНЕНИЕ МЕТОДА ГРАНИЧНЫХ ЭЛЕМЕНТОВ ДЛЯ РЕШЕНИЯ НЕЛИНЕЙНЫХ ЗАДАЧ ТЕПЛОПРОВОДНОСТИ

APPLICATION OF THE BOUNDARY ELEMENT METHOD TO SOLVING NON-LINEAR PROBLEMS OF HEAT CONDUCTION

Л.Ф. Спевак, ИМАШ УрО РАН, Екатеринбург, lfs@imach.uran.ru
А.Л. Казаков, ИДСТУ СО РАН, Иркутск, kazakov@icc.ru

Abstract

The paper deals with a numerical solution of a nonlinear parabolic equation describing the process of heat conduction in the case of the power dependence between the heat conductivity factor and temperature. A numerical solution technique based on the boundary element method is proposed for various types of boundary conditions. Solution algorithms are constructed for the instances of plane, circular and spherical symmetry. Examples are considered, and the calculations are verified by the power series method.

Процесс теплопроводности в случае степенной зависимости коэффициента теплопроводности от температуры описывается нелинейным уравнением параболического типа

$$T_t = \alpha \operatorname{div}(T^\sigma \nabla T), \alpha > 0, \sigma > 0,$$

где T – температура, зависящая от времени t и пространственных координат. Заменой $u = T^\sigma, t' = \alpha t$ уравнение (1) приводится к виду

$$u_t = u \Delta u + \frac{1}{\sigma} (\nabla u)^2. \quad (1)$$

Исследованию этого уравнения при различных краевых режимах посвящены большое количество работ (см., например, [1 – 6]). В данной статье представлены алгоритмы на основе метода граничных элементов (МГЭ), позволяющие строить решения на заданном конечном промежутке времени. Рассмотрена, в частности, «задача А.Д. Сахарова» [3] в случае одной пространственной переменной. Решения, построенные с помощью разработанных алгоритмов, сравнивались с построенными авторами ранее [4, 6] точными решениями, имеющими вид степенных рядов.

Задачи с плоской симметрией. Рассмотрим одномерные задачи для уравнения (1) при трех различных видах краевых условий:

$$u|_{x=0} = f(t), f(0) = 0, f'(0) > 0; \quad (2)$$

$$u|_{x=b(t)} = 0, b(0) = 0, b'(0) \neq 0; \quad (3)$$

$$u|_{x=a(t)} = g(t), a(0) = 0, g(0) = 0, \quad (4)$$

где $a(t), b(t), f(t), g(t)$ – известные аналитические в некоторой окрестности нуля функции.

В рассматриваемых задачах вместо начальных и граничных условий для конкретной пространственной области задан краевой режим вида (2), (3) или (4). Исследуемая область (область, внутри которой искомая функция принимает ненулевые значения) изменяется с течением времени, поэтому использование при решении МГЭ фундаментального решения, зависящего от времени, затруднительно. В связи с этим, предлагается следующий подход к решению.

Пусть для уравнения (1) задано краевое условие (3). Тогда вдоль фронта тепловой волны $x = b(t)$ справедливо

$$\frac{\partial u}{\partial x} \Big|_{x=b(t)} = -\sigma b'(t). \quad (5)$$

Рассмотрим уравнение (1) и граничные условия (3), (5) в произвольный момент времени t в качестве краевой задачи для уравнения Пуассона на отрезке $x \in [0, L]$, где $L = b(t)$:

$$u_{xx} = \frac{1}{u} \left(u_t - \frac{u_x^2}{\sigma} \right), u|_{x=L} = 0,$$

$$q = \frac{\partial u}{\partial n} \Big|_{x=L} = -\sigma b'(t) \quad (6)$$

Здесь n – вектор внешней нормали к границе рассматриваемой области, q – поток. Решение задачи (6) с помощью МГЭ приводит к соотношению

$$u(\xi) = q_1 u^*(\xi, 0) + q_2 u^*(\xi, L) - u_1 q^*(\xi, 0) - u_2 q^*(\xi, L) - \int_0^L \frac{1}{u} \left(u_t - \frac{u_x^2}{\sigma} \right) u^*(\xi, x) dx, \quad (7)$$

$$\text{где } \xi \in (0, L), \quad u_1 = u|_{x=0},$$

$$u_2 = u|_{x=L} = 0, \quad q_1 = q|_{x=0}, q_2 = q|_{x=L},$$

$$u^*(\xi, x) - \text{фундаментальное решение}$$

[7]. Граничное интегральное уравнение приводит к системе уравнений

$$\begin{cases} u_1 - q_1 L = -2 \int_0^L \frac{1}{u} \left(u_t - \frac{u_x^2}{\sigma} \right) u^*(0, x) dx, \\ u_1 + q_2 L = 2 \int_0^L \frac{1}{u} \left(u_t - \frac{u_x^2}{\sigma} \right) u^*(L, x) dx. \end{cases} \quad (8)$$

Таким образом, для произвольного момента времени t мы имеем систему уравнений (8), решение которой (значения u_1 и q_1) позволяет определить распределение функции u в этот момент, в соответствии с формулой (7), на отрезке $[0, b(t)]$. Основываясь на этом, был предложен следующий алгоритм решения задачи (1), (3) по шагам по времени. На каждом шаге, $t = t_k = kh$, где h – величина шага, решаем задачу (6) для отрезка $[0, L]$, $L = (b(t_k))$. Задача решается итерационно. На первой итерации решается однородная задача – система уравнений (8) с нулевыми правыми частями. Решение системы даст значения u_1 и q_1 в первом приближении – соответственно, $u_1^{(1)}$ и $q_1^{(1)}$. Далее, из уравнения (7), без слагаемого, содержащего интеграл, определяем первое приближение искомой функции $u^{(1)}(\xi)$, $\xi \in [0, b(t_k)]$. На второй итерации решаем систему уравнений (8) с правыми частями, соответствующими $u^{(1)}(\xi)$, определяем второе приближение граничных значений $u_1^{(2)}$ и $q_1^{(2)}$, из уравнения (7) находим второе приближение решения $u^{(2)}(\xi)$ и т.д. Итерационный процесс заканчивается на n -ной итерации, когда значения $u_1^{(n-1)}$ и $u_1^{(n)}$, $q_1^{(n-1)}$ и $q_1^{(n)}$ достаточно близки. В результате получаем решение исходной задачи при $t = t_k$, после чего переходим к следующему шагу по времени.

Рассмотрим теперь задачу (1), (2). Аналогично предыдущему, в момент времени t_k справедливо соотношение (7). Однако в соответствующей системе уравнений, аналогичной (8), известной является лишь величина $u_1 = f(t_k)$, тогда как q_1 , u_2 и q_2 неизвестны. Неизвестно также значение L , поскольку функция, определяющая фронт волны, не задана. Поставим задачу: одновременно с определением функции, удовлетворяющей уравнению (1) и краевому условию (2), определить фронт волны. Примем в момент времени t_k в качестве неизвестной значение $L = b(t_k)$, такое, что выполняется условие (3). Очевидно, что в этом

случае будет выполняться также условие (5).

Зададим значения u_2 и q_2 следующим образом:

$$u_2 = u|_{x=L} = 0, \quad q_2 = -\sigma \frac{L - b(t_{k-1})}{h} \quad (9)$$

Второе из уравнений (9) образует с уравнениями (8) систему трех уравнений с неизвестными q_1, q_2, L . Итерационный алгоритм решения этой системы, аналогичный описанному выше, дает решение задачи (1), (2) в момент t_k .

Задача (1), (4) может быть решена предложенным методом в два этапа. На первом этапе для каждого шага по времени t_k решается задач для отрезка $[a(t_k), L]$, где L – неизвестный фронт волны. Решение на этом этапе строится аналогично решению задачи (1), (2). Полученный по результатам первого этапа фронт волны $b(t)$ используется на втором этапе для построения решения по алгоритму, построенному для решения задачи (1), (3).

Задача с круговой симметрией.

Рассмотрим задачу распространения тепла на плоскости в соответствии с уравнением (1) при краевом режиме, заданном на некоторой окружности:

$$u|_{\rho=R} = f(t, \rho, \varphi), \quad (10)$$

где ρ , φ – полярные координаты. Будем рассматривать случай круговой симметрии, когда функция $f(t, \rho, \varphi)$ не зависит от пространственных переменных, $f(t, \rho, \varphi) = f(t)$. Не нарушая общности, будем считать, что $f(t) \geq 0$, $f(0) = 0$. Для определенности будем далее рассматривать «внешнюю» задачу, т.е. распространение тепла по направлению от начала координат.

Аналогично решению задачи (1), (2), предположим, что движение фронта тепловой волны определяется функцией $\rho = b(t)$, которая неизвестна до решения. В произвольный момент времени $t > 0$ будем рассматривать задачу для области Ω , где искомая функция u принимает ненулевые значения: $\rho \in [R, R_1]$, где

$$R_1 = b(t) > R, \quad u|_{\rho=R_1} = 0. \quad \text{В этом случае}$$

$$q(R_1) = -\sigma b'(t). \quad (11)$$

Рассмотрим в момент времени t следующую краевую задачу:

$$\Delta u = \frac{1}{u} \left(u_t - \frac{(\nabla u)^2}{\sigma} \right), \quad u|_{\rho=R} = f(t),$$

$$u|_{\rho=R_1} = 0, \quad q|_{\rho=R_1} = -\sigma b'(t). \quad (12)$$

Фронт волны $R_1 = b(t)$ будем определять в процессе решения. В соответствии с МГЭ, для

$$u(\xi) = \int_S [q(x)u^*(\xi, x) - u(x)q^*(\xi, x)] dS(x) - \int_{\Omega} \frac{1}{u} \left(u_t - \frac{(\nabla u)^2}{\sigma} \right) u^*(\xi, x) d\Omega(x)$$

Здесь S – граница области Ω , $u^*(\xi, x)$ – фундаментальное решение для двумерной

$$u(\rho_\xi) = q(R)\bar{u}^*(\rho_\xi, R) - u(R)\bar{q}^*(\rho_\xi, R) +$$

$$+ q(R_1)\bar{u}^*(\rho_\xi, R_1) - u(R_1)\bar{q}^*(\rho_\xi, R_1) - \int_{R_1}^R \frac{1}{u} \left(u_t - \frac{u_\rho^2}{\sigma} \right) \bar{u}^*(\rho_\xi, \rho_x) d\rho_x$$

Здесь

$$\bar{u}^*(\rho_\xi, \rho_x) = \rho_x \int_0^{2\pi} u^*(\xi, x) d\varphi_x,$$

$$\bar{q}^*(\rho_\xi, \rho_x) = \rho_x \int_0^{2\pi} q^*(\xi, x) d\varphi_x. \quad (13)$$

$$\begin{cases} u(R) \left(\bar{q}^*(R, R) + \frac{1}{2} \right) - q(R)\bar{u}^*(R, R) - q(R_1)\bar{u}^*(R, R_1) = \int_{R_1}^R \frac{1}{u} \left(u_t - \frac{u_\rho^2}{\sigma} \right) \bar{u}^*(R, \rho_x) d\rho_x, \\ u(R)\bar{q}^*(R_1, R) - q(R)\bar{u}^*(R_1, R) - q(R_1)\bar{u}^*(R_1, R_1) = \int_{R_1}^R \frac{1}{u} \left(u_t - \frac{u_\rho^2}{\sigma} \right) \bar{u}^*(R_1, \rho_x) d\rho_x. \end{cases} \quad (14)$$

В системе (14) значения $u(R)$ и $u(R_1)$ заданы граничными условиями. Величины $q(R)$, $q(R_1)$, R_1 являются неизвестными. Дополнив эту систему соотношением (11) получим в момент t систему трех уравнений с тремя неизвестными. Таким образом, задача может быть решена по алгоритму, абсолютно аналогичному построенному для решения задачи (1), (2).

Задача со сферической симметрией. Рассмотрим теперь уравнение (1) в пространстве при краевом режиме, заданном на некоторой сфере:

$$u|_{\rho=R} = f(t, \rho, \varphi, \vartheta), \quad (16)$$

где ρ , φ , ϑ – полярные координаты. Рассмотрим случай сферической симметрии: $f(t, \rho, \varphi, \vartheta) = f(t)$, $f(t) \geq 0$, $f(0) = 0$. Аналогично предыдущему разделу, для «внешней» задачи, в произвольный момент времени t мы можем рассмотреть задачу (12) для области $\Omega: \rho \in [R, R_1]$, имея в виду, что ρ относится к сферической системе координат. В этом случае соотношение (14) также будет справедливо, если

произвольной внутренней точки $\xi(\rho_\xi, \varphi_\xi) \in \Omega$ справедливо

задачи [7]. Ввиду симметрии задачи все параметры определяются координатой ρ :

Входящие в соотношения (13) интегралы вычислены аналитически. Граничное интегральное уравнение сводится к системе уравнений

$u^*(\xi, x)$ – фундаментальное решение для трехмерной задачи [7],

$$\bar{u}^*(\rho_\xi, \rho_x) = \rho_x \int_0^{2\pi} \int_0^\pi u^*(\xi, x) d\varphi_x d\vartheta_x,$$

$$\bar{q}^*(\rho_\xi, \rho_x) = \rho_x \int_0^{2\pi} \int_0^\pi q^*(\xi, x) d\varphi_x d\vartheta_x \quad (17)$$

Интегралы (17) также были вычислены аналитически. С учетом соотношений (18), система уравнений (15) также будет справедлива, если иметь в виду сферическую систему координат. Следовательно, предложенная выше алгоритм решения может быть применен и в случае сферической симметрии.

Примеры. Построенные алгоритмы были опробованы на примерах. Для задач с плоской симметрией полученные решения МГЭ совпадают на любом промежутке времени с известными точными решениями для задачи (1), (2) с линейной функцией $f(t)$, для задачи (1), (3) с линейной функцией $b(t)$ и для задачи (1), (4) с линейными функциями $a(t)$ и $g(t)$. Для других краевых

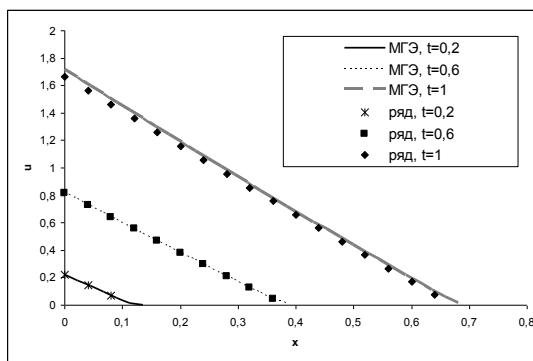


Рис. 1. Сравнение решений задачи (1), (2).

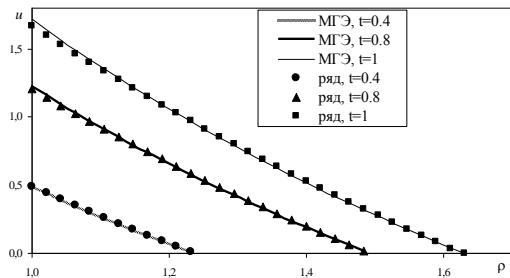


Рис. 2. Решения задачи с круговой симметрией.

условий решения МГЭ близки к решениям методом степенных рядов вблизи начального момента времени. При этом предложенный алгоритм позволяет построить решение, удовлетворяющее уравнению и краевому условию на конечном промежутке времени. Для примера на рис. 1 сравниваются решения МГЭ и методом степенных рядов для задачи (1), (2) при $f(t) = e^t - 1$, $\sigma = 3$. Также были рассмотрены задачи с круговой и сферической симметрией при $f(t) = e^t - 1$, $\sigma = 3$, $R = 1$. Результаты сравнения решений МГЭ и методом степенных рядов, показанные на рис. 2, 3, аналогичны плоскосимметричному случаю.

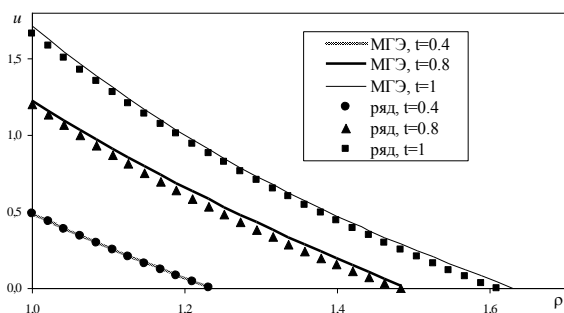


Рис. 3 Решения задачи со сферической симметрией.

Работа выполнена при частичной финансовой поддержке Программы президиума РАН № 15, проект 12-П-1-1025 и РФФИ, проекты 11-07-00245, 12-07-33945.

Список литературы

1. Зельдович Я. Б., Компанец А.С. К теории распространения тепла при теплопроводности, зависящей от температуры // В кн.: Сборник, посвященный 70-летию А. Ф. Иоффе. М.: Изд-во АН СССР, 1950. С. 61–71.
2. Баренблатт Г.И., Ентов В.М., Рыжик В.М. Теория нестационарной фильтрации жидкости и газа. М.: Недра, 1972. 220 с.
3. Сидоров А.Ф. Избранные труды: Математика. Механика. М.: Физматлит, 2001. 576 с.
4. Казаков А.Л., Спёвак Л.Ф. Аналитическое решение краевой задачи для нелинейного вырождающегося параболического уравнения // Вестник КГТУ им. А.Н.Туполева. 2012. № 4, вып. 1. С. 157–161.
5. Казаков А.Л., Спёвак Л.Ф. Численное исследование одной модели механики сплошной среды на основе нелинейного параболического уравнения с вырождением // Вестник КГТУ им. А.Н.Туполева. 2013. № 1. С. 103–109.
6. A.L. Kazakov, L.F. Spevak. Numerical and analytical studies of a nonlinear parabolic equation with boundary conditions of a special form // Applied Mathematical Modelling. 2013. Vol. 37.Iss. 10-11. P. 6918–6928.
7. Бреббия К., Телес Ж., Вроубел Л. Методы граничных элементов. М.: Мир, 1987. 524 с.