

РАЗРАБОТКА НЕТРАДИЦИОННЫХ ФУНКЦИОНАЛОВ И АЛГОРИТМОВ РАСЧЁТА НАПРЯЖЕНО-ДЕФОРМИРОВАННОГО СОСТОЯНИЯ

DEVELOPMENT OF TRADITIONAL NOT FUNCTIONALS AND ALGORITHMS FOR CALCULATING THE STRESS-STRAIN STATE

Н.В. Судаков, В.И. Трусковский, В.Г. Шеркунов
«Южно-Уральский государственный университет» (национальный исследовательский университет),
г. Челябинск, пр. Ленина, 76,
E-mail: dvg@susu.ac.ru

Abstract

Develop possible options algorithms based on non-traditional functions for determining the stress-strain state in the implementation of shaping operations by pressure treatment of ring blanks abrasive compositions vulcanite

Точное решение системы дифференциальных уравнений механики сплошной среды в рамках ограничений прикладной задачи, которое бы соответствовало действительному напряженному и деформированному состоянию, достигается лишь в простейших случаях, имеющих ограниченный практический интерес. В связи с этим приоритет отдается приближенным методам, которые при необходимости позволяют уточнять решение. К таким методам относятся вариационные, в основе которых лежит ряд принципов и соответствующих вариационных уравнений, эквивалентных исходной системе уравнений механики сплошной среды [1, 2]. Широкую известность получили вариационные принципы Лагранжа, Журдена, Кастильяно, Маркова и, наконец, принцип виртуальных скоростей (перемещений) и напряжений В.Л. Колмогорова [3, 4], из которого названные выше принципы вытекают как частные при упрощенной постановке задачи.

Использование прямых методов при реализации вариационных принципов позволяет уточнить решение путем добавления членов ряда последовательности координатных функций для искомым параметров. Однако, при этом усугубляется проблема минимизации функционалов. Проблемы, в основном, обусловлены неквадратичностью функционалов, которая в свою очередь является следствием нелинейной связи напряжений со скоростями деформаций в физических уравнениях, а также между скоростью скольжения и напряжениями трения в законах трения.

Для решения указанной проблемы исследователями предлагаются различные варианты алгоритмов и нестандартные приемы, в той или иной мере позволяющие преодолеть математические трудности и получить приближенное решение. Однако, пока не найдено оптимального формализованного алгоритма.

Хорошо зарекомендовавший себя вариационный принцип виртуальных скоростей и напряжений для одновременного определения напряженного и деформированного состояний [3] остается пока достаточно трудоемким. Заметим также, что принцип не обеспечивает точного удовлетворения физических уравнений.

Ряд оригинальных приемов использован в работах [5 – 9].

Широкое распространение, благодаря своей универсальности, получил метод гидродинамических приближений [10] и метод упругих решений [11 – 14]. Суть методов заключается в том, что процедура минимизации неквадратичных функционалов заменяется минимизацией последовательности квадратичных функционалов. Такой подход обеспечивает достижение результата, однако, ценой увеличения объема вычислений.

Значительно проще реализуются вариационные задачи по анализу только деформированного состояния, например, на основе определения поля скоростей. Относительная простота объясняется меньшим числом неизвестных, богатой (по сравнению с напряжениями) опытной информацией, что немаловажно для постановки задач в подходящем варианте, а также большим числом и наглядностью граничных условий. Основной недостаток рассмотренного подхода заключается в том, что информация о напряженном состоянии деформируемой несжимаемой среды может быть получена из физических уравнений лишь с точностью до неизвестного гидростатического давления.

Известные экспериментальные методы определения напряженного и деформированного состояний и являются по своей сути экспериментально-аналитическими. Эти методы сталкиваются в конечном итоге с теми же проблемами, что и теория. Прямые методы замера напряжений внутри объема тела пока не разработаны. Вместе с тем достаточно хорошо разработаны методы экспериментального исследования деформированного состояния. Накоплен богатый экспериментальный материал. В этой связи представляется актуальной задача определения поля напряжений по экспериментально найденному полю скоростей либо деформаций, как с точки зрения получения теоретических результатов, так и с точки зрения возможности обработки опытной информации.

Решению затронутой проблемы посвящено достаточно много работ [3, 15, 16 – 19].

Сделанные в известных работах предложения по существу сводятся к минимизации функционала невязки при удовлетворении дифференци-

альных уравнений равновесия взамен минимизации традиционного функционала.

Работы, посвященные определению поля напряжений по известному полю скоростей, показывают, что оптимальный и, вместе с тем, достаточно формализованный алгоритм определения напряжений по полю скоростей еще не найден.

В целом, многообразие подходов, зачастую недостаточно обоснованных, при использовании вариационных методов для определения напряженного и деформированного состояний в краевых задачах обработки материалов давлением, в определенной мере можно объяснить недостаточной прозрачностью сути функционалов и вариационных уравнений известных принципов.

В этой связи уместно привести комментарии к вариационным принципам, приведенные в работе [20] А.Г. Залазинским.

1) Вариационный принцип Лагранжа заменяет статические граничные условия и дифференциальные уравнения равновесия. Поле напряжений, найденное по полю перемещений (деформаций), может не удовлетворять дифференциальным уравнениям равновесия и граничным условиям в напряжениях.

2) Вариационный принцип Журдена, предназначенный для анализа больших пластических деформаций, позволяет определить поле скоростей, по которому с использованием определяющих уравнений могут быть найдены напряжения. Последние также могут не удовлетворять дифференциальным уравнениям равновесия и граничным условиям в напряжениях.

3) Вариационный принцип Кастильяно вводится на основе статически возможного напряженного состояния, удовлетворяющего уравнениям равновесия и статическим граничным условиям. Влечет за собой необходимость выполнения условий совместности деформаций.

4) Функционал принципа виртуальных скоростей и напряжений является как бы невязкой в удовлетворении определяющих уравнений.

Замечания В.Л. Колмогорова относительно минимизации нетрадиционного функционала, комментарии А.Г. Залазинского, а также имеющие место в задачах ОМД отступления от классической постановки вариационной задачи послужили поводом для обобщений, касающихся существа функционалов и разработки на этой основе предложений по альтернативным функционалам и возможным алгоритмам определения напряженного и деформированного состояний в задачах обработки материалов давлением.

Нетрадиционные функционалы и алгоритмы определения напряженного и деформированного состояний

Результаты анализа позволяют сделать общий вывод для всех известных вариационных принципов – функционалы известных вариационных принципов являются невязками при удовлетворении тех или иных уравнений из состава замкнутой

системы уравнений механики сплошной среды, которые минимизируются на основе соответствующих вариационных уравнений.

Ясная трактовка сути функционалов в отличие от их формального представления в виде некоторых математических выражений открывает перспективу поиска других более простых, но вместе с тем адекватных, с точки зрения достижения необходимых результатов, функционалов и алгоритмов определения напряженного и деформированного состояний.

Рассмотрим некоторые из возможных функционалов и алгоритмов определения напряженного и деформированного состояний на примере осесимметричной деформации несжимаемой среды в цилиндрической системе координат.

Действительное напряженное и деформированное состояние удовлетворяет замкнутой системе уравнений механики сплошной среды и граничным условиям задачи. На действительном НДС тождественно удовлетворяется основное энергетическое уравнение.

В соответствии с методом Ритца искомые функции напряжений и скоростей представляются некоторыми функциональными рядами с ограниченным числом членов ряда и соответствующим числом неизвестных коэффициентов – варьируемых параметров. Ограниченность числа членов ряда предполагает приближенное решение краевой задачи. Становится очевидным, что при удовлетворении основного энергетического уравнения в общем случае будет иметь место невязка.

На стадии конструирования функциональных рядов для напряжений и скоростей перемещений часть уравнений и граничных условий замкнутой системы удастся удовлетворить. Например [21], при реализации принципа виртуальных скоростей и напряжений поле напряжений задается статически допустимым, а поле скоростей кинематически возможным, что обеспечивает удовлетворение статических и геометрических уравнений, а также соответствующих граничных условий. Остаются неудовлетворенными только физические уравнения. Приближенное удовлетворение физических уравнений достигается на основе минимизации невязки при удовлетворении основного энергетического уравнения. Таков традиционный подход реализации принципа виртуальных скоростей и напряжений. Однако, очевидна и иная реализация указанной проблемы.

Вариант 1.

Как показано в работе [21], аналогичные результаты могут быть получены на основе минимизации функционала невязки при удовлетворении непосредственно физических уравнений вместо минимизации базового функционала. При этом отмечено, что в принципе можно использовать два варианта функционала. Первый вариант функционала предполагает физическую связь между инвариантными характеристиками напряженного и деформированного состояний, а второй – между компонентами соответствующих девиаторов

$$J(a_k, \beta_k) = \int_V [T(r, z, a_k) - T(r, z, \beta_k)]^2 dV \rightarrow \min \quad (1)$$

$$J(a_k, \beta_k) = \int_V \left\{ [S_{rr}(r, z, a_k) - S_{rr}(r, z, \beta_k)]^2 + [S_{zz}(r, z, a_k) - S_{zz}(r, z, \beta_k)]^2 \right\} dV \rightarrow \min, \quad (2)$$

где a_k – неизвестные параметры функциональных рядов для напряжений;

β_k – неизвестные параметры функциональных рядов для скоростей;

$T(r, z, a_k)$ – интенсивность касательных напряжений, определяемая на основе статически допустимых напряжений;

$T(r, z, \beta_k)$ – интенсивность касательных напряжений, определяемая на основе кинематически возможного поля скоростей и определяющего физического уравнения;

$S_{i,j}(r, z, a_k)$ – компоненты девиатора напряжений, определяемые на основе статически допустимых напряжений;

$S_{i,j}(r, z, \beta_k)$ – компоненты девиатора напряжений, определяемые на основе кинематически возможного поля скоростей и физических уравнений.

Анализ методики, изложенной в работе [21] показал, что физические уравнения будут приближенно удовлетворены лишь в целом для деформируемого объема, т.е. на среднеинтегральном уровне. Корректное удовлетворение физических уравнений на локальном уровне (в произвольной точке деформируемого объема) минимизация невязки при удовлетворении интегральных уравнений не обеспечивает. Приближенное решение, найденное на основе принципа виртуальных скоростей и напряжений, соответствует квазидопустимому в физическом отношении состоянию.

В рассмотренных вариантах определения НДС функциональные ряды для напряжений и скоростей конструируются независимо друг от друга, что может усложнить процедуру минимизации невязок функционалов при удовлетворении физических уравнений. В частности система вариационных уравнений может не иметь решения по причине существенной несогласованности функциональных рядов для напряжений и скоростей. В связи с этим ниже предлагаются другие возможные алгоритмы определения НДС, предусматривающие независимое конструирование функциональных рядов.

Вариант 2.

После конструирования функциональных рядов для кинематически возможного поля скоростей, включающего неизвестные параметры a_k , из физических уравнений определяются только

$$J(a_k, \beta_k) = \int_V [\sigma_1(r, z, a_k) - \sigma_2(r, z, a_k, \beta_k)]^2 dV \rightarrow \min. \quad (3)$$

девиаторные составляющие $S_{i,j}(a_k)$ компонентов

тензора напряжений. С учетом $S_{i,j}(a_k)$ из диф-

ференциальных уравнений равновесия определяют- ся нормальные напряжения с точностью до функ- ции интегрирования $f(r)$ и $f(z)$. Функция

$f(r)$ представляется функциональным рядом с дополнительными

коэффициентами β_k ($f(r) \rightarrow f(r, \beta_k)$), после чего $f(z)$ определя- ется из условия равенства нулю нормального напряжения на свободном от нагрузок контуре.

Использование физических уравнений при определении компонентов девиатора напряжений не обеспечивает удовлетворение физических уравнений в целом. Таким образом, решение задачи, как и в первом варианте алгоритма, сводится к минимизации функционала невязки (1) при удовлетво- рении физических уравнений.

Вариант 3.

В отличие от варианта 2 после конструиро- вания функциональных рядов для кинематически возможного поля скоростей из физических уравне- ний предлагается определять касательные напря- жения и нормальные напряжения с точностью до гидростатического давления. Удовлетворение диф- ференциальных уравнений равновесия сведется к их решению относительно гидростатического да- вления. Проблема состоит в том, что результат ре- шения дифференциальных уравнений равновесия дает разные функциональные значения для гидро- статического давления

$$\sigma_1(r, z, a_k) = \Phi_1(r, z, a_k) + f(z),$$

$$\sigma_2(r, z, a_k) = \Phi(r, z, a_k) + f(r),$$

где Φ_1 и Φ_2 – известные функции. Функция

$f(z)$ и $f(r)$ определяются (задаются) так же,

как и в варианте 2. В результате

$$f(r) \rightarrow f(r, \beta_k), \text{ а}$$

$$\sigma_2(r, z, a_k) \rightarrow \sigma_2(r, z, a_k) \rightarrow \sigma_2(r, z, a_k, \beta_k).$$

Очевидно, что неизвестные параметры a_k и

β_k в данном случае могут быть найдены на основе

минимизации функционала невязки при удовлетво- рении равенства гидростатических давлений, полу- ченных в результате решения различных диффе- ренциальных уравнений равновесия

НДС, определенное по рассматриваемому алгоритму, будет точно удовлетворять всем уравнениям кроме дифференциальных уравнений равновесия. Последнее удовлетворяется приближенно, причем на среднеинтегральном уровне, когда в целом обеспечивается равновесие тела, а дифференциальные уравнения равновесия в произвольных точках тела не выполняются. Заметим, что физические уравнения в рассматриваемом случае удовлетворяются точно, в том числе и на локальном уровне.

Вариант 3.1.

$$J(a_k) = \int_V \left[\frac{\partial(S_{zz}(a_k) + \sigma(a_k))}{\partial z} + \frac{\partial S_{rz}(a_k)}{\partial r} + \frac{1}{r} S_{rz}(a_k) \right]^2 dV \rightarrow \min \quad (4)$$

В (4) под интегралом $S_{i,j}$ и σ известные функции независимых аргументов r, z и искомых параметров a_k . Из соображений компактности записи аргументы r и z в скобках не приведены.

Если в варианте 3 приближенно удовлетворяются оба уравнения равновесия, то в варианте 3.1 приближенно удовлетворяется только второе уравнение, а первое – точно. Ошибка во втором случае, вероятно, будет больше, чем в первом.

Вариант 4.

Недостаток вариантов 2 и 3 состоит в том, что при ограниченном числе членов функциональных рядов поля скоростей трудно прогнозировать напряженное состояние, так как напряжения определяются не функциями скоростей, а их частными

$$\begin{aligned} \sigma_{rz} &= \frac{\partial}{\partial r} [(1-\nu)\nabla^2\varphi - \frac{\partial^2\varphi}{\partial z^2}], & \sigma_{rr} &= \frac{\partial}{\partial z} [\nu\nabla^2\varphi - \frac{\partial^2\varphi}{\partial r^2}], \\ \sigma_{\varphi\varphi} &= \frac{\partial}{\partial z} [\nu\nabla^2\varphi - \frac{1}{r}\frac{\partial\varphi}{\partial r}], & \sigma_{zz} &= \frac{\partial}{\partial z} [(2-\nu)\nabla^2\varphi - \frac{\partial^2\varphi}{\partial z^2}], \end{aligned} \quad (5)$$

где ν – коэффициент Пуассона, для несжимаемой среды равный 0,5.

$$\nabla^2\varphi = \left(\frac{\partial^2\varphi}{\partial r^2} + \frac{1}{r}\frac{\partial\varphi}{\partial r} + \frac{\partial^2\varphi}{\partial z^2} \right). \quad (6)$$

Из физических уравнений определяются компоненты тензора скоростей деформаций ξ_{ij} . Последние должны удовлетворять условиям совмест-

$$\omega(r, z, a_k) = \left(\frac{\partial^2}{\partial r^2} + \frac{1}{r}\frac{\partial}{\partial r} + \frac{\partial^2}{\partial z^2} \right) \cdot \left(\frac{\partial^2\varphi}{\partial r^2} + \frac{1}{r}\frac{\partial\varphi}{\partial r} + \frac{\partial^2\varphi}{\partial z^2} \right) = 0. \quad (7)$$

На этапе удовлетворения уравнения (7) может быть определена часть неизвестных коэффициентов, например, методом неопределенных коэффициентов. Заметим, что приближенно могут быть найдены все коэффициенты минимизацией функционала невязки при удовлетворении уравнения совместности

$$J(a_k) = \int_V \omega(r, z, a_k)^2 dV \rightarrow \min. \quad (8)$$

Далее из геометрических соотношений находится поле скоростей с точностью до функций ин-

В отличие от варианта 3 после определения функции $f(z)$ за основу берется гидростатическое давление $\sigma(r, z, a_k) = \sigma_1(r, z, a_k)$, найденное из решения первого дифференциального уравнения равновесия. Очевидно, что второе дифференциальное уравнение равновесия при этом тождественно удовлетворяться не будет. Параметры a_k могут быть найдены минимизацией функционала невязки при удовлетворении второго дифференциального уравнения равновесия

производными. Иначе говоря, при достаточно корректно заданном поле скоростей, поле напряжений может оказаться не корректным. Проблема может быть устранена, если использовать следующий вариант алгоритма.

Поле напряжений задается функциональными рядами, удовлетворяющими дифференциальным уравнениям равновесия и граничным условиям, с точностью до неизвестных коэффициентов a_k . Для выполнения указанной процедуры удобно использовать функцию напряжений $\varphi(r, z, a_k)$ [169], связанную с напряжениями следующими зависимостями

ности деформаций. В частности, для линейно-вязкой среды, а также в случае линеаризации функционала на основе метода гидродинамических приближений удовлетворение условия совместности сводится к удовлетворению известного бигармонического уравнения

тегирования, которые обычно удается определить из условий симметрии поля скоростей относительно осей координат. В более сложных случаях, по меньшей мере, одна из функций представляется функциональным рядом с дополнительными коэффициентами β_k . При этом некоторые граничные условия могут остаться не удовлетворенными, например, равенство нулю радиальной скорости течения на контакте с инструментом при условии прилипания, равенство вертикальной составляю-

щей скорости материала на границе с инструментом, скорости инструмента и т.п.

Коэффициенты, оставшиеся неопределенными, могут быть найдены путем минимизации функционалов невязки при удовлетворении оговоренных выше кинематических граничных условий. Для примера ниже показан функционал невязки при удовлетворении условия прилипания на контакте с инструментом ($z=h$)

$$J(a_k, \beta_k) = \int_S [v_r(r, h, a_k, \beta_k)]^2 ds \rightarrow \min. \quad (9)$$

Не исключена совместная минимизация нескольких функционалов, например, функционала невязки при удовлетворении условия прилипания и условия равенства вертикальной составляющей скорости течения материала на границе с инструментом скорости инструмента. Вместо совместной минимизации двух функционалов можно минимизировать один функционал, представляющий сумму двух первых.

Результат решения задачи в рассмотренном варианте алгоритма будет точно удовлетворять дифференциальным уравнениям равновесия, физическим уравнениям и статическим граничным условиям. Условия совместности могут быть определены либо точно (метод неопределенных коэффициентов), либо приближенно на основе минимизации соответствующего функционала невязки. Частично кинематические граничные условия могут быть удовлетворены точно, а частично приближенно путем минимизации невязки при их удовлетворении.

Вариант 5.

Вариационный принцип виртуальных скоростей (перемещений) претендует на определение только деформированного состояния. Вместе с тем, как уже отмечалось, известны многочисленные попытки определения поля напряжений на основе найденного (не содержащего неизвестных коэффициентов) поля скоростей. Для несжимаемого материала определение поля напряжений сведется к решению дифференциальных уравнений равновесия относительно гидростатического давления, удовлетворению граничных условий в напряжениях и последующей минимизации невязок при удовлетворении равенства гидростатических давлений, полученных в результате решения различных дифференциальных уравнений равновесия. Алгоритм по существу сводится к варианту 3. Вместе с тем имеется принципиальное различие. Суть различия алгоритмов состоит в том, что по варианту 3 поле скоростей и напряжений определяются совместно, а по варианту 5 за два этапа. На первом этапе определяется поле скоростей на основе минимизации базового функционала невязки, а на втором этапе определяется поле напряжений при заданном поле скоростей на основе минимизации нетрадиционного функционала.

Вариант 3 предпочтительней варианта 5, так как имеются большие возможности для адаптации поля скоростей и напряжений, что в конечном ито-

ге должно обеспечить более высокую точность и упростить процедуру минимизации функционалов.

Возможны и другие варианты определения поля напряжений по заданному полю скоростей. В частности в работе [3] предложено гидростатическое давление задавать функциональным рядом, который должен удовлетворять граничным условиям в напряжениях. При этом коэффициенты ряда будут находиться из функционала невязки при удовлетворении системы дифференциальных уравнений равновесия. Вариант по существу предусматривает поэтапное независимое варьирование поля скоростей и поля напряжений. На первом этапе неизвестные коэффициенты поля скоростей найдутся на основе минимизации базового функционала, а на втором этапе находятся коэффициенты поля напряжений на основе минимизации функционала невязки при удовлетворении дифференциальных уравнений равновесия.

Вариант 6.

Вариационный принцип виртуальных напряжений (принцип Кастильяно) претендует на определение только поля напряжений. При этом найденное на основе минимизации базового функционала поле напряжений удовлетворяет точно дифференциальным уравнениям равновесия и статическим граничным условиям. Остальные уравнения замкнутой системы удовлетворяются приближенно с некоторой усредненной по объему и недифференцированной по отдельным уравнениям невязкой. Информация о поле напряжений при необходимости может быть использована для анализа формоизменения. Для этого необходимо определить поле скоростей (перемещений) по заданному полю напряжений. Процедура определения поля скоростей будет такая же, как и в варианте 4 алгоритма. Однако, определенное на основе минимизации базового функционала невязки, поле напряжений может не удовлетворять уравнениям совместности. В этом случае поле скоростей не может быть найдено, либо потребуются определить поле напряжений более корректно с последующей попыткой удовлетворения условий совместности деформаций.

Принципиальное отличие алгоритмов по вариантам 4 и 6 состоит в том, что в варианте 4 осуществляется совместное определение поля напряжений и скоростей, а в варианте 6 за два этапа, на каждом из которых осуществляется независимая минимизация двух различных функционалов. Вариант 4 предпочтительнее в связи с лучшими возможностями для адаптации поля напряжений и поля скоростей.

Вариант 7.

При конструировании кинематически возможного поля скоростей в ряде случаев достаточно проблематично удовлетворить всем кинематическим граничным условиям и условию несжимаемости. Например, при сложной геометрии деформируемого объема попытки удовлетворить всем требованиям, предъявляемым к кинематически возможным полям скоростей, приводят либо к необос-

нованному усложнению функциональных рядов, либо заканчиваются безрезультатно. Выход из этой ситуации в частности находят применением разрывных решений, использованием штрафных функций и т.д.

По нашему мнению, в некоторых случаях может оказаться эффективным требование к функциональным рядам ограничить выполнением граничных условий, а условие несжимаемости удовлетворять приближенно на основе минимизации следующего функционала невязки

$$J(a_k, \beta_k) = \int_V \xi_{ii}(r, z, a_k, \beta_k)^2 dV \rightarrow \min. \quad (10)$$

Заметим, что минимизация функционала (10) в общем случае будет осуществляться совместно с минимизацией каких-либо других функционалов, представленных в вариантах 1 – 6.

Вариант 8.

Предусматривает определение НДС при деформации сжимаемой среды.

$$J(a_k, \beta_k) = \int_V [\sigma(r, z, a_k) - \sigma(r, z, \beta_k)]^2 dV \rightarrow \min, \quad (12)$$

где $\sigma(r, z, a_k)$ – гидростатическое давление, определенное на основе заданного поля напряжений и физического уравнения (11);

$\sigma(r, z, \beta_k)$ – гидростатическое давление, определенное на основе заданного поля скоростей и физического уравнения (12).

Минимизация функционалов (11) и (12) должна осуществляться совместно либо указанные функционалы должны быть объединены в один функционал, представляющий сумму двух первых.

$$J(a_k) = \int_V \left[\frac{\partial \sigma_{rr}(a_k)}{\partial r} + \frac{\partial \sigma_{rz}(a_k)}{\partial z} + \frac{1}{r} (\sigma_{rr} - \sigma_{\varphi\varphi}) \right]^2 dV \rightarrow \min. \quad (14)$$

Минимизация (13) и (14) должна осуществляться одновременно либо функционалы объединены суммированием.

Вариант 5, предусматривающий определение напряжений по окончательному полю скоростей (не содержащему варьируемых параметров) для сжимаемого материала позволит определить компоненты тензора напряжений из физических уравнений. Дифференциальные уравнения равновесия и граничные условия, очевидно, будут удовлетворены приближенно на среднем интегральном уровне благодаря процедуре минимизации базового функционала при определении поля скоростей. Возможности для уточнения поля напряжений в рассматриваемом случае отсутствуют.

Вариант 6 может быть использован без изменений.

Возможные пути совершенствования алгоритмов

На основании вывода о том, что традиционный (базовый) функционал представляет по своей сути некоторую интегрированную (обобщенную) невязку в результате неудовлетворения каких-либо

Замкнутая система уравнений будет иметь дополнительное определяющее уравнение для шаровых составляющих тензора напряжений

$$\sigma = \sigma(\xi \dots), \quad (11)$$

где $\xi = \frac{1}{3} \xi_{ii}$ – скорость относительного изменения объема, ... – предполагается зависимость гидростатического давления от каких-либо других параметров процесса деформации, например, степени деформации, температуры и т.д.

В принципе могут быть использованы варианты алгоритмов, рассмотренные выше (по понятным причинам за исключением варианта 7). При этом в варианте 1 к функционалу (1) либо (2) должен быть добавлен функционал невязки при удовлетворении реологической связи между шаровыми составляющими соответствующих тензоров

При реализации варианта 3 в отличие от несжимаемой среды гидростатическое давление, как и остальные компоненты тензора напряжений, будет определено по заданному полю скоростей. На этом этапе часть неизвестных коэффициентов может быть определена из граничных условий для напряжений, а оставшиеся коэффициенты – путем минимизации функционала невязки при удовлетворении двух дифференциальных уравнений равновесия

уравнений из состава замкнутой системы, были предложены альтернативные варианты функционалов, представляющих невязки при удовлетворении тех конкретных уравнений, которые не удалось удовлетворить при разработке математической модели. В этой связи становится очевидным, что перечень возможных функционалов, вероятно, не ограничивается функционалами, представленными в предыдущем разделе. Важно иметь в виду, что при любой постановке задачи наряду с базовым функционалом всегда можно найти альтернативный функционал, использование которого может оказаться предпочтительнее по каким-либо соображениям.

Процедура минимизация всех рассмотренных выше функционалов сопровождается интегрированием, дифференцированием и решением в общем случае не линейной относительно искомых параметров системы алгебраических уравнений. Практика решения краевых задач обработки материалов давлением показывает, что на этапе минимизации функционалов достаточно часто возника-

ют математические трудности, сопровождающиеся значительным временем расчета, нестабильностью расчетной процедуры в случае изменения исходных данных, отсутствием решения системы вариационных уравнений. Указанные проблемы усугубляются с увеличением числа варьируемых параметров и неквадратичностью функционалов. Зачастую существующие программные средства компьютерной математики не позволяют решить указанные проблемы. В этой ситуации исследователи вынуждены заниматься решением проблем сугубо математического характера, отвлекаясь от конкретных профессиональных прикладных задач.

Можно полагать, что возможность выбора функционалов и алгоритмов в определенной мере позволит смягчить математические трудности. Вместе с тем кардинальное решение проблемы требует поиска неординарных подходов. Ниже предлагаются вниманию два нетрадиционных подхода, направленных на решение затронутых проблем.

Поэтапная минимизация невязок

Фрагменты поэтапной минимизации функционалов невязок прослеживаются в предыдущем разделе. Так, в вариантах алгоритма 4 и 5 поля напряжений и скоростей определялись соответственно по заданным полям скоростей и напряжений. При этом предполагалось, что заданные поля скоростей и напряжений были определены на основе принципа виртуальных скоростей и напряжений, предусматривающих минимизацию невязки базового функционала. На следующем этапе определялись поля напряжений (вариант 4) и скоростей (вариант 5) с использованием процедуры минимизации невязок соответствующих нетрадиционных функционалов. Такой подход при определении напряженного и деформированного состояний по существу означает независимость варьируемых параметров поля скоростей и поля напряжений в отличие от вариантов, предусматривающих одно-

временное определение всех параметров из единой системы уравнений, связывающей параметры поля скоростей и поля напряжений. Идея поэтапного определения неизвестных параметров, по нашему мнению, имеет право на существование и практическое применение. В этой связи она может быть дополнена некоторыми другими вариантами ее реализации.

Представляет интерес идея, высказанная в работе [21] согласно которой «...если функционал является невязкой при удовлетворении равенства адекватных по существу функций, то можно потребовать удовлетворения равенства частных производных (в принципе любого порядка) этих функций по аргументам r и z , равенства смешанных производных и, наконец, равенства самих функций».

Целесообразность такого подхода заключается в том, что частные производные могут зависеть от меньшего числа варьируемых параметров. Таким образом, часть параметров может быть определена на первом этапе минимизацией функционала невязки при удовлетворении равенства частных производных, например, второго порядка на втором этапе – минимизацией функционала невязки при удовлетворении равенства, например, смешанных производных и т.д., а на заключительном этапе оставшиеся параметры могут быть найдены минимизацией функционала невязки при удовлетворении равенства непосредственно самих функций.

Так, по варианту 2 алгоритма после решения дифференциальных уравнений равновесия относительно гидростатического давления и удовлетворения граничных условий получаем два решения:

$$\sigma_1(r, z, a_k), \sigma_2(r, z, a_k, \beta_k).$$

На первом этапе потребуем равенства смешанных производных на основе минимизации функционала

$$J(a_k, \beta_k) = \int_V \left[\frac{\partial^2 \sigma_1(r, z, a_k)}{\partial r \partial z} - \frac{\partial^2 \sigma_2(r, z, a_k, \beta_k)}{\partial r \partial z} \right]^2 dV \rightarrow \min. \quad (15)$$

На втором этапе потребуем равенства первых частных производных на основе минимизации функционала

$$J(a_k, \beta_k) = \int_V \left[\frac{\partial \sigma_1(r, z, a_k)}{\partial r} - \frac{\partial \sigma_2(r, z, \beta_k)}{\partial r} \right]^2 dV \rightarrow \min \quad (16)$$

либо функционала

$$J(a_k, \beta_k) = \int_V \left[\frac{\partial \sigma(r, z, a_k)}{\partial z} - \frac{\partial \sigma(r, z, a_k, \beta_k)}{\partial z} \right]^2 dV \rightarrow \min, \quad (17)$$

либо

$$J(a_k, \beta_k) = \int_V [A(r, z, a_k, \beta_k)^2 + B(r, z, a_k, \beta_k)^2] dV \rightarrow \min, \quad (18)$$

где через A и B обозначены выражения в квадратных скобках соответственно первого и второго функционалов, представленных выше.

На третьем этапе оставшиеся неопределенными на предыдущих этапах коэффициенты нахо-

дятся из функционала (3) невязки при удовлетворении равенства самих функций.

Дискретно-локальный метод минимизации невязок

Существующие программные комплексы позволяют обеспечить замену процедуры интегрирования и минимизации функционалов на решение конечного числа алгебраических уравнений, представляющих невязки при удовлетворении соответствующих уравнений, которые по своей сути представляют невязки при удовлетворении соответствующих уравнений в конкретных точках деформируемого тела. Для этого исследуемая зона разбивается равномерной определенного вида сеткой, а

для узловых точек записывается уравнение невязки. В результате получаем систему уравнений вида [21]

$$T(r_i, z_j, a_k) - T(r_i, z_i, \beta_k) = 0, \quad (19)$$

где r_i и z_i – координаты узловых точек.

При этом, следует иметь в виду, что с увеличением числа уравнений минимизированная невязка будет расти, но вместе с тем приближаться к фактической минимизированной невязке. В пределе при бесконечном числе уравнений следует ожидать получение точного значения невязки, когда решается не переопределенная система вариационных уравнений. В последнем случае минимизированная невязка является усредненной по всему объему тела, а в предлагаемом варианте – минимизированной и усредненной лишь для узловых точек тела. Эффективность предлагаемого приближенного метода может быть оценена непосредственным расчетом невязок в произвольных, не совпадающих с узловыми, точками тела после нахождения коэффициентов.

В заключение принципиально важно отметить, что предлагаемый вариант дискретно-локальной минимизации невязок коренным образом решает проблемы, связанные с неквадратичностью функционалов.

К вопросу о целесообразности использования гипотезы о несжимаемости

Существует мнение [20], что для компактного материала относительное изменение объема на всей стадии конечного (большого) формоизменения носит упругий характер. Иначе говоря, при развитой пластической деформации имеет место малое упругое изменение объема, но вместе с тем вызывающее значительные средние нормальные напряжения, которыми нельзя пренебречь при расчете напряжений. Это обстоятельство приводит к проблемам определения поля напряжений при заданном поле скоростей (деформаций). В результате можно придти к выводу, что использование гипотезы о несжимаемости становится неоправданным, если стоит задача определения поля напряжений по полю скоростей. Заметим также, что условие несжимаемости, являясь по сути дополнительным ограничением, приводит зачастую к проблемам конструирования кинематически возможного поля скоростей.

Для упрощения процедуры конструирования кинематически возможных полей скоростей, а также возможности определения поля напряжений по полю скоростей для компактных материалов целесообразно отказаться от гипотезы о несжимаемости деформируемых сред. При этом следует использовать гипотезу об упругом характере изменения объема на любой стадии конечного формоизменения.

Несжимаемую среду следует считать частным случаем сжимаемой, так как последняя, при необходимости может быть сколь угодно прибли-

жена к несжимаемой путем неограниченного увеличения модуля объемной деформации. Примером реализации этого положения может служить метод штрафных функций.

Математические модели, будучи разработанные на основе отмеченных выше положений, позволят обобщить сжимаемые и несжимаемые материалы, придав им статус материалов с различной склонностью (вплоть до нуля) к объемному сжатию и расширению в процессе конечного формоизменения.

Апробация возможных алгоритмов определения НДС

Апробация возможных алгоритмов определения НДС осуществлялась на примере осадки сплошной цилиндрической заготовки в условиях прилипания на контакте с инструментом (рис.1) с учетом нелинейно вязких свойств деформируемого материала.

Точность результатов оценивалась величиной невязок удовлетворения замкнутой системы уравнений и граничных условий. Если иметь в виду, что в основе алгоритмов лежат математические модели, в которых часть уравнений и граничных условий удовлетворена независимо от результатов решения, то оценка точности алгоритма по существу сводится к оценке величины минимизированных невязок при удовлетворении тех уравнений и граничных условий, которые не были удовлетворены ранее.

Как уже отмечалось, основные трудности численной реализации задачи имеют место при интегрировании и последующей минимизации функционалов. Известные методы численного интегрирования, дифференцирования и решения систем нелинейных алгебраических уравнений не всегда оказываются эффективными. Зачастую вычислительная процедура требует значительного машинного времени, характеризуется сбоями, вызванными, например, неудачными исходными приближениями при решении системы уравнений, а в ряде случаев решение вообще не достигается. Отмеченные обстоятельства и определяют в целом стабильность вычислительной процедуры на базе какого-либо известного метода численного интегрирования, дифференцирования и решения нелинейной системы уравнений.

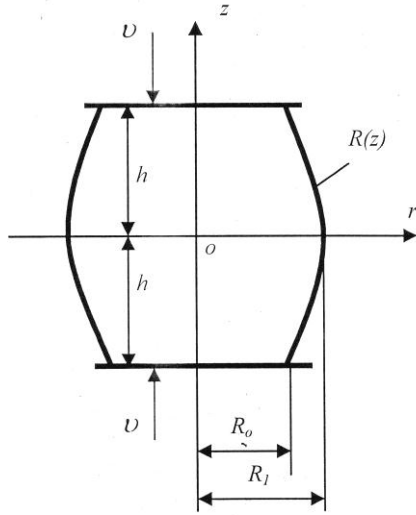


Рис.1. Схема осадки цилиндрической заготовки

В дальнейшем были использованы программные средства [22], которые численное интегрирование осуществляют на основе алгоритмов Ромберга, ускоряющих сходимость последовательности метода трапеций или метода прямоугольников к интегралу; для вычисления производных используют модифицированный метод Рундлера, а для решения систем уравнений и неравенств – итерационный метод Левенберга-Маркардта, поз-

$$\sigma_{rr} = S_{rr} + \sigma, \quad \sigma_{\varphi\varphi} = S_{\varphi\varphi} + \sigma, \quad \sigma_{zz} = S_{zz} + \sigma, \quad \sigma_{rz} = S_{rz}, \quad (22)$$

где

$$S_{ij} = \frac{2T(H)}{H} = 2\mu(H)\xi_{ij}. \quad (23)$$

Геометрические уравнения

$$\xi_{rr} = \frac{\partial v_r}{\partial r}, \quad \xi_{\varphi\varphi} = \frac{v_r}{r}, \quad \xi_{rz} = \frac{1}{2} \left(\frac{\partial v_r}{\partial z} + \frac{\partial v_z}{\partial r} \right). \quad (24)$$

Условие несжимаемости

$$\xi_{rr} + \xi_{\varphi\varphi} + \xi_{zz} = 0. \quad (25)$$

Граничные условия для скоростей

$$v_r = 0 \text{ при } r = 0; \quad v_r = 0$$

$$\text{при } z = \pm h; \quad v_z = 0 \text{ при } z = 0;$$

$$v_z = \mp v \text{ при } z = \mp h \quad (26)$$

Условие на контуре $R(z)$

$$\sigma_{rr} \cdot n_r^2 + \sigma_{zz} \cdot n_z^2 + 2\sigma_{rz} \cdot n_r \cdot n_z = 0, \quad (27)$$

где n_r и n_z – направляющие косинусы.

$$n_z = \frac{R'(z)}{\sqrt{1+R'(z)^2}}, \quad n_r = \sqrt{1-n_z^2}. \quad (28)$$

воляющий в случае переопределенной системы уравнений получить приближенное решение путем минимизации невязок.

Замкнутая система уравнений осесимметричной задачи

Принципиальная схема осадки цилиндрической заготовки приведена на рис. 1. Деформация характеризуется прилипанием на контакте с инструментом и образованием бочки, которая в зависимости от условий деформации может быть как одинарной, так и двойной.

Замкнутая система уравнений для несжимаемого материала включает следующее:

Дифференциальные уравнения равновесия

$$\frac{\partial \sigma_{rr}}{\partial r} + \frac{\partial \sigma_{rz}}{\partial z} + \frac{1}{r}(\sigma_{rr} - \sigma_{\varphi\varphi}) = 0, \quad (20)$$

$$\frac{\partial \sigma_{rz}}{\partial r} + \frac{\partial \sigma_{zz}}{\partial z} + \frac{\sigma_{rz}}{r} = 0. \quad (21)$$

Физические уравнения

Известный алгоритм определения НДС, использующий нестандартный прием

При заданном поле скоростей определяются ξ_{ij} (24) и S_{ij} (23), записываются дифференциальные уравнения равновесия с учетом (23) и решаются относительно частных производных по аргументам r и z искомого среднего нормального напряжения σ

$$\frac{\partial \sigma}{\partial z} = - \left(\frac{\partial S_{rr}}{\partial r} + \frac{\partial S_{rz}}{\partial z} + \frac{1}{r}(S_{rr} - S_{\varphi\varphi}) \right), \quad (29)$$

$$\frac{\partial \sigma}{\partial r} = - \left(\frac{\partial S_{zz}}{\partial z} + \frac{\partial S_{rz}}{\partial r} + \frac{S_{rz}}{r} \right). \quad (30)$$

Интегрируя (29) и (30), получают

$$\sigma_1 = -S_{rr} - \int \frac{\partial S_{rz}}{\partial z} dr - \int \frac{(S_{rr} - S_{\varphi\varphi})}{r} dr + f(z), \quad (31)$$

$$\sigma_2 = -S_{zz} - \int \frac{\partial S_{rz}}{\partial r} dz - \int \frac{S_{rz}}{r} dz + f(r). \quad (32)$$

В уравнениях (31) и (32) все параметры кроме функций $f(r)$ и $f(z)$ определены. Задача сводится к нахождению указанных функций, которые бы обеспечили тождество $\sigma_1 = \sigma_2$ и удовлетворение граничных условий.

Приравняв (31) и (32), получают уравнение вида

$$\phi_1(r, z) + f(z) = \phi_2(r, z) + f(r), \quad (33)$$

в котором функции $\phi_i(r, z)$ определены.

Далее на основе логических соображений и нестандартных приемов делается попытка упрощения задачи, связанной с определением двух неизвестных функций. В частности, один из приемов предусматривает перегруппировку одночленов уравнения (33) таким образом, чтобы по одну сторону знака равенства находились одночлены, зависящие только от аргумента r , а по другую – только аргумента z . Этот прием приводит к упрощениям, если $\phi_i(r, z)$ представляют некоторую сумму функций, зависящих только от одного аргумента, например

$$\phi_i(r, z) = \psi_1(r) + \psi_2(z) + \dots + \psi_k(r) + \psi_k(z).$$

В этом случае результат перегруппировки (33) дает уравнение вида

$$\sum \psi_j(r) + f(r) = \sum \psi_j(z) + f(z), \quad (34)$$

из которого следует очевидный вывод о том, что левая и правая части уравнения должны быть равны некоторой константе C . В итоге, удается выразить две функции через одну константу

$$f(r) = C - \sum \psi_j(r), \quad f(z) = C - \sum \psi_j(z). \quad (35)$$

Далее остается определить константу из граничных условий задачи. Для нахождения константы достаточна информация о напряжении лишь в одной точке области определения напряжений. Вместе с тем располагаем информацией о напряжениях на контурах $R(z)$, которая при определении

константы будет не реализована в полной мере. Практически это означает, что граничные условия будут удовлетворены некорректно. Заметим также, что реализация рассмотренного приема достигается лишь в простейших краевых задачах, характеризующихся линейными физическими уравнениями и простой геометрией контура области определения напряжений. В общем случае функции $\phi_i(r, z)$

наряду с одночленами, зависящими только от одного аргумента, содержат одночлены вида, $\psi_j(r, z)$, т.е. зависящие от двух аргументов, в результате чего желаемая перегруппировка (34) не удается.

Для простейшего кинематически возможного поля скоростей

$$v_r = \frac{3\nu}{4h} \left(1 - \frac{z^2}{h^2}\right) r,$$

$$v_z = -\frac{3\nu}{2h} \left(1 - \frac{1}{3} \frac{z^2}{h^2}\right) z$$

и линейно вязкой среды $T(H) = \mu H$, где $\mu = \text{const}$.

Рассматриваемый алгоритм приводит к следующим результатам

$$\sigma = -\frac{3}{4} \mu \frac{\nu}{h} \left[\frac{R_1^2}{h^2} \left(1 - \frac{r^2}{R_1^2}\right) + 2 \left(\frac{z^2}{h^2} + 1\right) \right], \quad (36)$$

$$\sigma_{rr} = -\frac{3}{4} \mu \frac{\nu}{h} \left[\frac{R_1^2}{h^2} \left(1 - \frac{r^2}{R_1^2}\right) + 4 \frac{z^2}{h^2} \right], \quad \sigma_{\varphi\varphi} = \sigma_{rr},$$

$$\sigma_{zz} = -\frac{3}{4} \mu \frac{\nu}{h} \left[\frac{R_1^2}{h^2} \left(1 - \frac{r^2}{R_1^2}\right) + 4 \frac{z^2}{h^2} + 6 \right],$$

$$\sigma_{rz} = -\frac{3}{2} \mu \nu \frac{rz}{h^3}.$$

Напряжения удовлетворяют физическим уравнениям, дифференциальным уравнениям равновесия и граничным условиям на свободном контуре в одной его точке. В целом на контуре $R(z)$ условие равенства нулю нормального к контуру напряжения не выполняется.

Располагая только полем скоростей, приведенным выше, из основного энергетического уравнения можно найти усилие деформации P , которое должно дать верхнюю оценку усилия. В частности при $\mu = 0,15 \text{ Нс/мм}^2$, $h = 50 \text{ мм}$, $R_1 = 100 \text{ мм}$ и $\nu = 5 \text{ м/с}$ верхняя оценка усилия составила $2,4 \cdot 10^3 \text{ кН}$. Используя зависимость (36), получили

$P = 2,121 \cdot 10^3 \text{ кН}$. Таким образом, усилие деформации, как и следовало, ожидать, уменьшилось. При корректном удовлетворении граничных условий на контуре $R(z)$ усилие, вероятно, будет еще ниже.

Для окончательных выводов по качеству полученного решения проанализируем ситуацию на контуре $R(z)$ с учетом полученных результатов.

Равенство нулю нормального напряжения на свободном от нагрузок контуре $R(z)$ требует выполнения уравнения (27). Записав (27) с учетом найденных выше напряжений и направляющих косинусов, получим уравнение вида

$$f(R(Z), R'(Z), z) = 0,$$

анализ которого показывает, что (27) тождественно удовлетворяется лишь при

$$R(Z) = R = \text{const.}$$

В связи с этим усматривается противоречие между заданным полем скоростей, приводящим к образованию бочки, и полем напряжений, соответствующим ситуации, когда отсутствует бочка. При этом следует иметь в виду, что задача решалась для идеальной линейно-вязкой среды на основе простейшего подходящего поля скоростей. Становится очевидным, что использованный выше нестандартный прием имеет ограниченные возможности.

Корректное удовлетворение условия на контуре предполагает задание более сложного поля скоростей, включающего большее число варьируемых параметров. Например, использование поля скоростей с тремя варьируемыми параметрами позволило бы удовлетворить условие на контуре в трех его точках, а при четырех варьируемых параметрах – в четырех точках и т.д. Однако увеличение полноты функциональных рядов для скоростей приводит к невозможности реализации использованного выше нестандартного приема.

Апробация алгоритма с функционалом невязки при удовлетворении физических уравнений (вариант 2)

Поле скоростей задавалось полиномом 9-ой степени по независимым аргументам r и z . Часть

$$f(r) = a_1 + a_2 \frac{r^2}{R^2} + a_3 \frac{r^4}{R^4} + a_4 \frac{r^6}{R^6} + a_5 \frac{r^8}{R^8}. \quad (37)$$

В итоге статически допустимое поле напряжений зависело от пяти параметров, унаследованных от поля скоростей, и от пяти параметров, содержащих в (37). В целом задача свелась к определению 10-ти неизвестных коэффициентов.

Заметим, что согласованность девиаторных составляющих поля скоростей и поля напряжений на основе физических связей упрощает процедуру минимизации невязок при удовлетворении физических, но в целом (с учетом шаровой составляющей) не обеспечивает удовлетворение физических уравнений.

Таким образом, задача свелась к определению неизвестных коэффициентов, при которых физические уравнения удовлетворялись бы наилучшим образом.

Попытка определения коэффициентов путем минимизации известного базового функционала принципа виртуальных скоростей и напряжений, а также предложенных во 2-ом разделе более простых функционалов программными средствами Mathcad Pro не увенчалась успехом. Ситуация до-

	13.163	12.322	9.949	6.029	0.283	
	12.986	12.215	10.013	6.332	2.304	
T1=	12.454	11.887	10.181	7.17	4.901	T2=
	11.573	11.329	10.397	8.403	8.14	
	10.352	10.541	10.611	9.909	12.338	

коэффициентов полинома была определена методом неопределенных коэффициентов при удовлетворении всех кинематических граничных условий и условия несжимаемости. В итоге кинематически возможное поле скоростей включало пять неизвестных коэффициентов. Заметим, что математические выкладки с полиномами высокой степени в ручном варианте громоздки и трудоемки, что чревато ошибками. Эта проблема была успешно решена путем использования символьных преобразований, которые обеспечивают программные средства Mathcad Pro.

Поле напряжений задавалось не независимо от поля скоростей, как это делается в вариационном принципе виртуальных скоростей и напряжений. По заданному полю скоростей из физических уравнений определялась девиаторная составляющая поля напряжений, т.е. S_{ij} , после чего из дифференциальных уравнений равновесия определялись нормальные напряжения с точностью до функций интегрирования $f(r)$ и $f(z)$. Функция $f(z)$ находилась из условия равенства нулю нормальных напряжений на контуре $R(z)$, а функция $f(r)$ в выражении для σ_{zz} задавалась пятью четными членами степенного ряда

статочной типичной для задач механики сплошной среды. Выход из нее обычно предполагает упрощение задачи либо применение (разработку) других программных средств численных решений. В нашем случае решение задачи было достигнуто использованием предложенного выше дискретно-локального варианта минимизации невязок при удовлетворении переопределенной системы физических уравнений.

Ниже приводятся результаты реализации задачи, выполненные при непосредственном участии автора диссертации и частично опубликованные в работе [21].

Сравнение расчетных значений соответствующих компонентов определителей T1 (интенсивность касательных напряжений, рассчитанная на основе поля напряжений) и T2 (интенсивность касательных напряжений, рассчитанная на основе интенсивности скоростей деформации сдвига с учетом определяющего уравнения) показывает, что физические уравнения в узловых точках удовлетворяются с высокой точностью.

13.059	12.339	10.129	6.046	0.323
12.91	12.225	10.115	6.25	2.298
12.481	11.908	10.121	6.937	4.893
11.822	11.469	10.295	8.307	8.299
10.409	10.442	10.31	10.228	13.161

Величину невязки при удовлетворении физических уравнений в произвольных точках деформируемого тела характеризуют графики на рис.2. Максимальное различие T1 и T2 не превышает двух процентов.

Решение по предложенному алгоритму, обеспечивая высокую точность удовлетворения физических уравнений, достигается в пределах одной минуты и характеризуется стабильностью вычислительной процедуры.

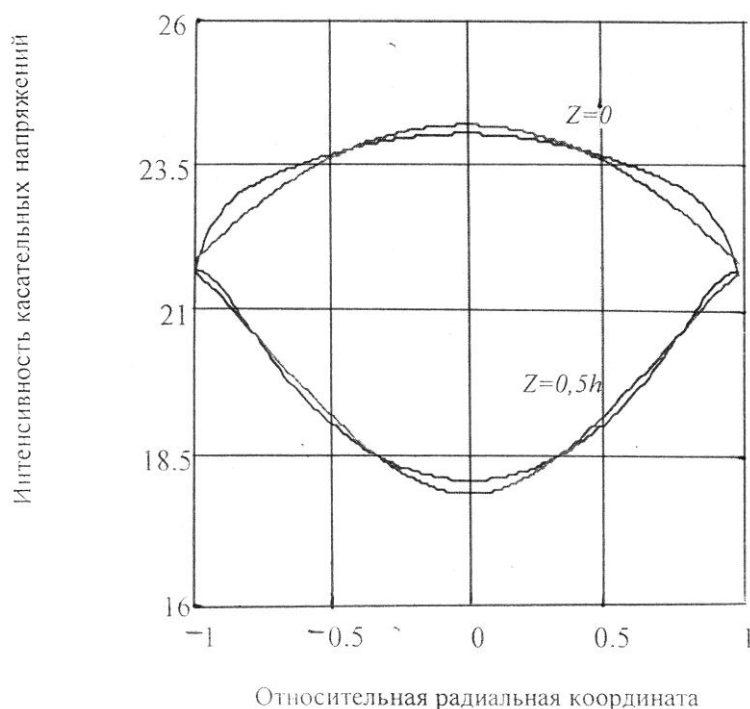


Рис.2. К анализу минимизированной невязки при удовлетворении физических уравнений

Апробация алгоритма с функционалом невязки при удовлетворении граничных условий (вариант 4)

Напряжения задавались с помощью функции напряжений, $\varphi(r, z, a_i)$, которая представляла полином 9-ой степени по аргументам r и z . Связь между коэффициентами полинома находилась методом неопределенных коэффициентов на основе удовлетворения бигармонического уравнения (7).

Аналитические выкладки, связанные с удовлетворением (7) и определением напряжений по (5), выполнялись с помощью операторов символьных преобразований Mathcad Pro. В виду громоздкости выражения для напряжений здесь не приводятся.

При заданных напряжениях из физических уравнений определяли компоненты тензора скоростей деформаций, после чего из геометрических уравнений находили скорости перемещения с точностью до неизвестных функций $f(z)$ в выражении для v_r и $f(r)$ в выражении для v_z . Из условий $v_r = 0$ при $r = 0$ и $v_z = 0$ при $z = 0$ получили $f(r) = 0$, $f(z) = 0$. В итоге было получено поле напряжений и поле скоростей, включающее семь неизвестных коэффициентов.

Таким образом, на этапе задания поля напряжений и поля скоростей были удовлетворены точно дифференциальные уравнения равновесия, условие совместности скоростей деформаций (7), физические и геометрические уравнения. Не были удовлетворены граничные условия для скоростей $v_r = 0$ при $z = \pm h$ и $v_r = \bar{v}$ при $z = \pm h$, а также условие на свободном контуре для напряжений. Задача свелась к нахождению семи коэффициентов a_i , при которых наилучшим образом удовлетворялись бы указанные выше граничные условия.

Как и в предыдущем варианте алгоритма, минимизация функционала была заменена дискретно-локальной минимизацией невязок при удовлетворении переопределенной системы алгебраических уравнений.

При семи неизвестных было записано 16 уравнений. При этом по 5 уравнений соответственно для удовлетворения условий $v_r = 0$ при $z = \pm h$, $v_r = \bar{v}$ при $z = \pm h$ и 6 уравнений для удовлетворения равенства нулю нормального напряжения на свободном контуре.

Анализ полученных результатов показал, что величина невязки незначительна и не превышает 1,5%.

Как и в предыдущем случае, расчетное время не превышало одной минуты, сбоев процедуры расчета при изменении исходных данных не наблюдалось.

Таким образом, оба варианта алгоритма, предусматривающие замену минимизации функционалов невязок минимизацией невязок при удовлетворении переопределенной системы соответствующих уравнений, с точки зрения принятых выше критериев оптимальности практически равноценны.

Анализ других вариантов алгоритмов при условии одинаковой полноты функциональных рядов также показал возможность их практического использования. Наиболее существенные, хотя и приемлемые, невязки имели место при решении переопределенной системы уравнений, представляющих равенство гидростатических давлений, полученных в результате решения дифференциальных уравнений равновесия (вариант 3).

В дальнейшем за основу анализа НДС различных вариантов деформации сплошных и полых цилиндрических заготовок принят вариант 4 с минимизацией невязок при удовлетворении переопределенной системы уравнений, отвечающей за выполнение граничных условий.

Выводы

1. В настоящее время пока отсутствуют методы анализа напряженного и деформированного состояний при обработке материалов давлением, которые могли бы составить серьезную альтернативу вариационным методам. Основным достоинством вариационных методов является возможность уточнения результатов решения на основе формализованной процедуры расширения полноты функциональных рядов, которыми описываются искомые функции.

2. К недостаткам вариационных методов следует отнести сложную и не всегда успешную процедуру минимизации нелинейных функционалов. Это обстоятельство побудило исследователей к поиску различных нестандартных приемов, изысканию методов линеаризации функционалов, разработке различных вариантов алгоритмов поиска экстремума функционалов, применению зачастую недостаточно обоснованных допущений и т.д.

3. Несмотря на усилия исследователей, оптимальный алгоритм определения напряженного и деформированного состояний пока не найден. В частности, известные попытки определения поля напряжений по заданному полю скоростей нельзя признать успешными.

4. В решении определения напряженного и деформированного состояний может оказаться полезным изыскание неклассических функционалов, минимизация которых закономерно и логично вписывается в процедуру приближенного решения замкнутой системы уравнений краевой задачи обработки материалов давлением. К таким функционалам следует отнести функционалы невязок при удовлетворении тех или иных уравнений.

5. Разработаны возможные варианты алгоритмов определения напряженного и деформированного состояний, в основе которых в зависимости от постановки задачи лежат различные функции невязок.

6. С целью упрощения процедуры минимизации функционалов предложено поэтапное определение варьируемых параметров на основе минимизации нескольких функционалов.

7. С целью сокращения времени расчета, и повышения стабильности расчетной процедуры взамен минимизации функционалов предложен дискретно-локальный вариант минимизации невязок при удовлетворении переопределенной системы соответствующих уравнений, который может быть классифицирован как новый метод приближенного определения полей скоростей и напряжений.

8. Сделана оценка эффективности возможных вариантов алгоритмов определения НДС в краевых задачах обработки давлением. Показано, что предложенные алгоритмы достаточно эффективны, как с точки зрения быстродействия, стабильности расчетной процедуры, так и точности результатов расчета.

Список литературы

1. Михайлов Ю.А., Глазунов Ю.Т. Вариационные методы в теории нелинейного тепло- и массопереноса. – Рига. – Зинатне, 1985. – 260 с.
2. Работнов Ю.Н. Механика деформируемого твердого тела. – М.: Наука, 1979. – 744 с.
3. Колмогоров В.Л., Карпов С.В., Федотов В.П. Математическая модель осадки на прессе осесимметричного тела // Обработка металлов давлением: Сб. науч. тр. – Свердловск: УПИ, 1978. – Вып. 5. – С. 23 – 27.
4. Теорияковки и штамповки / Т.П. Унксов, У. Джонс, В.Л. Колмогоров, Р.Д. Витнер и др. – М.: Машиностроение, 1992. – 720 с.
5. Михайлов А.В. Замена функционала виртуальных скоростей и напряжений последовательностью квадратичных функционалов. – Обработка металлов давлением. Межвузовский сб. – Свердловск. – Изд. УПИ им. С.М. Кирова, 1986, С. 19 – 23.
6. Писаренко Г.С., Можаровский Н.С. Уравнения и краевые задачи теории пластичности и ползучести. – Киев: Наукова думка. – 1981. – 496 с.
7. Морозов Е.Н., Никишков Г.П. Метод конечных элементов в механике разрушения. – М.: Наука, 1980. – 256 с.
8. Степанский Л.Г., Унксов Е.П. О приближенном решении некоторых плоскодеформированных и осесимметричных пластических задач. – М.: Изв. АН СССР. Механика и машиностроение, №1, 1961, С. 261 – 279.
9. Саккаев Ю.Г. Оценка решения одной плоской задачи теории пластичности / Инженерный журнал. Т.2, вып.4, 1962, С. 12 – 29.
10. Ильющин А.А., Поздеев А.А. Метод гидродинамических приближений / Инженерный журнал. Т.1, вып.4, 1961, С. 18 – 26.

11. Качанов Л.М. Основы теории пластичности. М.: Наука, 1979. – 321 с.
12. Ворович И.И., Красовский Ю.П. О методе упругих решений // АН СССР. – 1959. Т.126, вып.4, С. 740 – 743.
13. Быков Д.Л. О некоторых методах решения задач теории пластичности // Упругость и неупругость. М.: МГУ, 1974, вып.5, С. 119 – 139.
14. Биргер И.А. Некоторые общие методы решения задач теории пластичности // ПММ. – 1951. Т.15, вып.6, С. 765 – 770.
15. Федотов В.П., Трубин В.Н., Голомидов А.И. Определение напряженного состояния по деформированному при ковке. – Обработка металлов давлением. – Межвузовский сб. – Свердловск. Изд УПИ им. С.М. Кирова, 1986, С. 139 – 144.
16. Томсен Э., Янг К., Кобаяши Ш. Механика пластической деформации при обработке металлов. – М.: Машиностроение, 1969. – 503 с.
17. Полищук Е.Г., Портнов М.В., Вайсбурд В.А. Определение полей напряжений для жестко-пластических сред. – Обработка металлов давлением. Межвузовский сб. – Свердловск. - Изд.УПИ им. С.М.Кирова, 1989, С. 9 – 13.
18. Коновалов В.А., Михайлов А.В., Степанов В.П. Напряженно-деформированное состояние при радиальном сжатии двухслойной трубы. – Обработка металлов давлением. – Межвузовский сб. – Свердловск. – Изд. УПИ им. С.М. Кирова, 1986, С. 128 – 133.
19. Тимошенко С.П., Гудьер Дж. Теория упругости: Пер. с англ. / Под ред. Г.С. Шапиро. – 2-е изд. – М.: Наука, 1979. – 560 с.
20. Залазинский А.Г. Пластическое деформирование структурно-неоднородных материалов. – Екатеринбург: УрОРАН, 2000, ISBN 5 – 7691 – 0987 – 4.
21. Судаков В.Н., Шеркунов В.Г. Совершенствование алгоритмов определения напряженно-деформированного состояния в задачах обработки материалов давлением. – Научно-технические ведомости СПбГПУ. Выпуск 51. 2007, С. 92 – 94.
22. Mathcad 6.0 PLUS. Финансовые, инженерные и научные расчеты в среде Windows 95. Изд. 2-е, стереотипное. – М.: Информационно издательский дом «Филин», 1997. – 712 с.