Г. К. Ольховиков
Екатеринбург

ОБ ОДНОЙ НОВОЙ ТРЕХЗНАЧНОЙ ПАРАНЕПРОТИВОРЕЧИВОЙ ЛОГИКЕ

1. Истинностные провалы и интерпретация условных предложений

Формулы пропозициональной логики в классическом случае интерпретируются следующим образом. Переменные принимают значения из области {0, 1}, в которой 0 является выделенным значением и интерпретируется как истинность, а 1 интерпретируется как ложность соответствующего высказывания. Значения сложных формул задаются с помощью следующих матриц:

p	q	$p \& q$	$p \vee q$	$\neg p$	$p \supset q$
0	0	0	0	1	0
0	1	1	0	1	1
1	0	1	0	0	0
1	1	1	1	0	0

Классическую логику высказываний, которая основана на такой интерпретации пропозициональных формул, будем в дальнейшем обозначать как *CL*, а приведенные выше матрицы — как С-матрицы.

Однако не все предложения естественного языка, которым при их формализации сопоставляются истинные формулы *CL*, истинны сами по себе. В естественном языке многие предложения не имеют определенных истинностных значений; в этих случаях мы имеем дело с истинностнозначными провалами. Важнейшим примером таких предложений являются условные предложения с ложными антецедентами. Ради простоты логической теории такие предложения истолковываются в *CL* как истинные, и такая корректировка естественного языка выглядит вполне оправданной. Ничего нельзя возразить и против того, что мы обязаны утверждать такие предложения в качестве теорем тех теорий, которые мы намерены сформулировать в *CL*. Однако все эти соображения не отменяют того факта, что истинность тех предложений, которые истолковываются как истинные в интересах формализации, радикально отличается от истинности тех предложений, которые являются истинными уже в естественном языке. Предложения этой последней категории *должны* быть формализованы как истинные, если мы хотим получить корректную формализацию; истинность их переводов на формализованный язык является существенным условием адекватности самого перевода. В то же время нет никакой необходимости истолковывать переводы предложений, не имеющих в естественном языке определенного истинностного значения, как истинные формулы; с тем же успехом мы могли бы приписать всем таким переводам «ложь» в качестве их значения. Истинность такого рода формул, следовательно, *случайна*, в противоположность *необходимой* истинности формул, переводящих в язык пропозициональных формул истинные предложения естественного языка. Неразличение в рамках *CL* случайной и существенной истинности приводит далее к тому, что нарушается единообразие в истолковании истинностнозначных провалов: в самом деле, как предложение «Если $2+2=5$, то $4+8=7$», так и предложение «Неверно, что если $2+2=5$, то $4+8=7$» не имеют в естественном языке определенного истинностного значения. Но первое из них будет представлено в *CL* истинной формулой, а второе — ложной. Подобная путаница приводит, в частности, к разговорам о так называемых «парадоксах материальной импликации» (например, в связи с законом утверждения консеквента), хотя при правильном прочтении эти формулы вряд ли так уж парадоксальны.

Чтобы исправить ситуацию, я предложил бы строить формализацию логики высказываний, приближенную к логическим связям естественного языка, следующим образом. Мы будем оперировать трехэлементным множеством истинностных значений {0, 1, 2}, где 0, 1 являются выделенными значениями. При этом 0 будет пониматься как существенная истинность, 1 — как случайная истинность или же как истинность в интересах формализации, и, наконец, 2 — как ложность соответствующего высказывания.

Предполагается, что *всем* предложениям естественного языка, не имеющим определенного истинностного значения, при их переводе на язык пропозициональной логики будет сопоставляться значение 1. Значения сложных формул задаются следующими матрицами (которые в дальнейшем будем называть М-матрицами):

p	q	$\neg p$	Lp	$p \vee q$	$p \& q$	$p \supset q$
0	0	2	0	0	0	0
0	1	2	0	0	1	1
0	2	2	0	0	2	2
1	0	1	2	0	1	0
1	1	1	2	1	1	1
1	2	1	2	1	2	2
2	0	0	2	0	2	1
2	1	0	2	1	2	1
2	2	0	2	2	2	1

Здесь Lp означает «p — существенно истинно» и может рассматриваться как (истинностно-функционально истолкованная) сильная алетическая модальность.

Формулы пропозициональной модальной логики, которые в соответствии с М-матрицами при любых значениях входящих в них пропозициональных переменных принимают значения из множества {0, 1}, будем в дальнейшем называть М-тавтологиями. С первого взгляда видна связь М-матриц для связок $\neg$, $\&$, $\vee$ с трехзначной логикой Клини K_3[1]. Однако определение импликации, которое как раз и воплощает изложенные выше идеи об истинностных значениях условных предложений в естественном языке, является достаточно своеобразным и, насколько мне известно, ранее не рассматривалось. В дальнейшем логику, основанную на интерпретации модальных пропозициональных формул с помощью М-матриц, будем обозначать через *LImp*.

Можно поставить вопрос о функциональной полноте множества связок $\{\neg, L, \&, \vee, \supset\}$. Ответ на этот вопрос утвер-

[1] О K_3 см., например: Логика и компьютер. Вып. 4; *Карпенко А. А.* Многозначные логики. М.: Наука, 1997. С. 22—23.

дительный, мы не будем разбирать его здесь подробно. Вместо этого мы сразу рассмотрим основания для более сильного утверждения о функциональной полноте множества {¬, L, ⊃}; из этого последнего утверждения будет следовать и утвердительный ответ на первый из поставленных вопросов. Как известно[1], с помощью суперпозиций так называемой функции Вебба для трехзначной логики $V_3(x, y) = \max(x, y) + 1$, где + обозначает сложение по модулю 3, выразима любая функция трехзначной логики. Поэтому, если нам удастся представить $V_3(x, y)$ в виде некоторой суперпозиции функций ¬, L, ⊃, это будет равносильно доказательству функциональной полноты множества {¬, L, ⊃}. Такая суперпозиция для $V_3(x, y)$ задается, например, формулой $\neg L(Lx \supset y) \supset \neg L \neg (x \supset L \neg y)$ (*), как в этом можно удостовериться на основании следующей таблицы:

x	y	max (x, y)	max (x, y) + 1	Lx	L¬y	Lx ⊃ y
0	0	0	1	0	2	0
0	1	1	2	0	2	1
0	2	2	0	0	0	2
1	0	1	2	2	2	1
1	1	1	2	2	2	1
1	2	2	0	2	0	1
2	0	2	0	2	2	1
2	1	2	0	2	2	1
2	2	2	0	2	0	1

x	y	x ⊃ L¬y	¬L (Lx ⊃ y)	¬L¬(x ⊃ L¬y)	(*)
0	0	2	2	2	1
0	1	2	0	2	2
0	2	0	0	0	0
1	0	2	0	2	2
1	1	2	0	2	2
1	2	0	0	0	0
2	0	1	0	0	0
2	1	1	0	0	0
2	2	1	0	0	0

[1] См.: *Яблонский С. В.* Введение в дискретную математику. М.: Высшая школа, 2001. С. 50.

Таким образом, набор $\{\neg, \mathrm{L}, \supset\}$ функционально полон, через его элементы, с помощью их суперпозиций, можно выразить любую из функций трехзначной логики, в том числе и все прочие функции, которые выше были заданы с помощью М-матриц, то есть & и $\vee$. Поэтому связки $\neg$, L, $\supset$ мы в дальнейшем примем в качестве исходных связок *Limp*.

Множество М-тавтологий может быть задано и чисто синтаксическим способом, то есть в виде неинтерпретированного модального пропозиционального исчисления, в котором выводимы все М-тавтологии, и только они. Но прежде чем перейти к рассмотрению такой системы, отметим ряд важных свойств *Limp*, достаточно очевидных уже на семантическом уровне. Во-первых, все тавтологии *CL*, не содержащие знака $\neg$, являются и М-тавтологиями. Во-вторых, множество М-тавтологий не включает всех тавтологий *CL*. Оно не включает также множества всех теорем интуиционистской логики высказываний и множества всех теорем минимальной пропозициональной логики Колмогорова — Иогансона. В самом деле, формула $(p \supset q) \supset ((p \supset \neg q) \supset \neg p)$ доказуема и в *CL*, и в интуиционистской, и в минимальной пропозициональной логиках, но при этом не является М-тавтологией. В-третьих, множество М-тавтологий, не содержащих вхождений модального функтора L, не исчерпывается формулами, доказуемыми в *CL*. В самом деле, в *CL* недоказуема, например, следующая М-тавтология: $(p \supset \neg q) \supset \neg(p \supset q)$. Очевидно также, что *Limp* является слабо паранепротиворечивой логикой, поскольку формула $p \,\&\, \neg p$, не будучи М-тавтологией, оказывается, в соответствии с М-матрицами, выполнимой формулой. Кроме того, легко убедиться, что и отрицание «закона исключенного третьего», то есть формула $\neg(p \vee \neg p)$, также оказывается выполнимой. Наконец, если рассматривать *Limp* как модальную логику, то обнаруживается, что и в этом отношении ее свойства достаточно интересны. Она не является нормальной модальной логикой, так как в ней не имеет места правило Геделя. С другой стороны, как мы увидим ниже, многие интуитивно очевидные теоремы о модальностях доказуемы в *Limp* (см. ниже Т13, Т17, Т18). В *Limp* не проходят известные формулы, выражающие так называемые «парадоксы строгой импликации», то есть формулы

$Lp \supset L(q \supset p)$ и $L\neg p \supset L(p \supset q)$, зато М-тавтологиями оказываются «обратные» им и не менее парадоксальные формулы $L\neg p \supset \neg(p \supset q)$ и $L(q \supset p) \supset Lp$. В отличие от четырехзначной модальной логики Лукасевича, в *Limp* имеются теоремы вида $L\alpha$: такова, например, формула $L\neg L\neg(p \supset p)$. Таким образом, *Limp* в качестве модальной логики оказывается удобной в целом ряде отношений, и прежде всего в силу своей относительной простоты. Но, конечно, она не является идеальной модальной логикой: очень легко указать неправдоподобные и даже парадоксальные модальные М-тавтологии.

На мой взгляд, в рамках *Limp* будет наиболее продуктивно следующее определение модальности, несколько отличающееся от традиционного, и в частности в том отношении, что оно исключает из числа модальностей так называемые несобственные модальности p и $\neg p$. Модальностью в *Limp* будем считать любую унарную истинностную функцию, отображающую множество $\{\tilde{0}, \tilde{1}, \tilde{2}\}$ в множество $\{0, 2\}$. При таком подходе в *Limp* оказывается всего 8 попарно различных модальностей, которые задаются, в частности, следующими формулами *Limp*: $L(p \supset \neg p)$, $\neg L(p \supset \neg p)$, Lp, $L\neg p$, $\neg Lp$, $\neg L\neg p$, $L\neg(p \supset Lp)$, $\neg L\neg(p \supset Lp)$.

2. Limp как аксиоматическая система

Исходными символами системы *Limp* являются пропозициональные переменные, которые содержатся в следующем счетно-бесконечном списке:

$p, q, r, s, p_1, q_1, \ldots,$

Кроме того, в число исходных символов входят унарные связки L и $\neg$, а также бинарная связка $\supset$. Определения правильно построенной формулы, доказательства, вывода из гипотез даются стандартным способом. Метаутверждение $\vdash \alpha$ означает, что α доказуема в *Limp*, а метаутверждение $\alpha_1, \ldots, \alpha_n \vdash \beta$ означает, что β выводимо в системе *Limp* из гипотез $\alpha_1, \ldots, \alpha_n$.

Аксиомами *Limp* являются:

A1. $p \supset (q \supset p)$.

A2. $(p \supset (q \supset r)) \supset ((p \supset q) \supset (p \supset r))$.

A3. $\neg(p \supset q) \supset (p \supset \neg q)$.

A4. $(\neg p \supset \neg\neg p) \supset p$.

A5. $(Lp \supset L\neg q) \supset \neg(q \supset p)$.

A6. $(\neg p \supset \neg q) \supset (Lq \supset L\neg\neg Lp)$.

Правилами вывода *Limp* являются:

R1. Правило подстановки формул $\alpha_1, \ldots, \alpha_n$ вместо пропозициональных переменных $\beta_1, \ldots, \beta_n$ соответственно.

R2. Modus ponens (MP): если $\vdash A$ и $\vdash A \supset B$, то $\vdash B$.

В дальнейшем подстановка в ранее доказанную формулу Ф будет обозначаться Ф $(\alpha_1/\beta_1, \ldots, \alpha_n/\beta_n)$. Если формула входит в доказательство теоремы T* за номером m как ранее доказанная формула, мы будем пользоваться ею как теоремой, обозначая через T*: m. Если правило вывода R, исходное или производное, отлично от правила подстановки, его применение к формулам, встречающимся в данном доказательстве или выводе из гипотез за номерами $m_1, \ldots, m_n$, будем обозначать R $(m_1, \ldots, m_n)$.

В силу A1 и A2 в *Limp* дословно, также как в *CL*, могут быть доказаны следующие **теоремы**:

T1. $p \supset p$.

T2. $(p \supset (p \supset q)) \supset (p \supset q)$.

T3. $p \supset ((p \supset q) \supset q)$.

T4. $(p \supset (q \supset r)) \supset (q \supset (p \supset r))$.

T5. $(p \supset q) \supset ((q \supset r) \supset (p \supset r))$.

T6. $(q \supset r) \supset ((p \supset q) \supset (p \supset r))$.

T7. $((p \supset q) \supset (p \supset r)) \supset (p \supset (q \supset r))$.

А также следующие **производные правила вывода**:

DR1. $A \supset B, B \supset C \vdash A \supset C$.

DR2. $A \supset B \vdash (B \supset C) \supset (A \supset C)$.

DR3. $B \supset C \vdash (A \supset B) \supset (A \supset C)$.

DR4. $A \supset (B \supset C) \vdash B \supset (A \supset C)$.

DR5. Если $\vdash A \supset B$ и $\vdash B \supset C$, то $\vdash A \supset C$.

DR6. Если $\vdash A \supset B$, то $\vdash (B \supset C) \supset (A \supset C)$.

DR7. Если $\vdash B \supset C$, то $\vdash (A \supset B) \supset (A \supset C)$.

DR8. Если $\vdash A \supset (B \supset C)$, то $\vdash B \supset (A \supset C)$.

DR9. $A_1, \ldots, A_{i-1}, A_i, \ldots, A_n \vdash B$, если и только если $A_1, \ldots, A_{i-1} \vdash A_i \supset (\ldots \supset (A_n \supset B)\ldots)$, где $1 \leq i \leq n$.

Докажем некоторые важные **теоремы** ***Limp***, которые понадобятся нам в дальнейшем.

T8. $(Lp \supset L\neg q) \supset (q \supset \neg p)$.

1) $(Lp \supset L\neg q) \supset \neg(q \supset p)$ — A5;
2) $\neg(q \supset p) \supset (q \supset \neg p)$ — A3 $(q/p, p/q)$;
3) $(Lp \supset L\neg q) \supset (q \supset \neg p)$ — DR5 (1, 2).

T9. $p \supset \neg\neg p$.

1) $L\neg p \supset L\neg p$ — T1$(L\neg p/p)$;
2) $(L\neg p \supset L\neg p) \supset (p \supset \neg\neg p)$ — T8$(\neg p/p, p/q)$;
3) $p \supset \neg\neg p$ — MP (1, 2).

T10. $\neg\neg p \supset p$.

1) $\neg\neg p \supset (\neg p \supset \neg\neg p)$ — A1$(\neg\neg p/p, \neg p/q)$;
2) $(\neg p \supset \neg\neg p) \supset p$ — A4;
3) $\neg\neg p \supset p$ — DR5 (1, 2).

T11. $L\neg p \supset (p \supset q)$.

1) $L\neg p \supset (L\neg q \supset L\neg p)$ — A1$(L\neg p/p, L\neg q/q)$;
2) $(L\neg q \supset L\neg p) \supset (p \supset \neg\neg q)$ — T8 $(\neg q/p, p/q)$;
3) $\neg\neg q \supset q$ — T10 (q/p);
4) $(p \supset \neg\neg q) \supset (p \supset q)$ — DR7 (3);
5) $(L\neg q \supset L\neg p) \supset (p \supset q)$ — DR5 (2, 4);
6) $L\neg p \supset (p \supset q)$ — DR5 (1, 5).

T12. $L\neg L\neg p \supset p$.

1) $L\neg L\neg p \supset (L\neg p \supset L\neg(p \supset p))$ — T11$(L\neg p/p, L\neg(p \supset p)/q)$;
2) $(L\neg p \supset L\neg(p \supset p)) \supset ((p \supset p) \supset p)$ — T11: 5$(p \supset p/p, p/q)$;
3) $L\neg L\neg p \supset ((p \supset p) \supset p)$ — DR5 (1, 2);
4) $(p \supset p) \supset (L\neg L\neg p \supset p)$ — DR8 (3);
5) $p \supset p$ — T1;
6) $L\neg L\neg p \supset p$ — MP (4, 5).

T13. $p \supset L\neg L\neg p$.

1) $L\neg L\neg L\neg p \supset L\neg p$ — T12 $(L\neg p/p)$;
2) $(L\neg L\neg L\neg p \supset L\neg p) \supset (p \supset L\neg L\neg p)$ — T11: 5$(L\neg L\neg p/q)$;
3) $p \supset L\neg L\neg p$ — MP (1, 2).

T14. $(\neg p \supset \neg q) \supset (Lq \supset Lp)$.

1) $L\neg\neg Lp \supset (\neg Lp \supset \neg\neg Lp)$ — T11$(\neg Lp/p, \neg\neg Lp/q)$;
2) $(\neg Lp \supset \neg\neg Lp) \supset Lp$ — A4 (Lp/p);
3) $L\neg\neg Lp \supset Lp$ — DR5 (1, 2);
4) $(\neg p \supset \neg q) \supset (Lq \supset L\neg\neg Lp)$ — A6;

5) $(Lq \supset L\neg\neg Lp) \supset (Lq \supset Lp)$ — DR7 (3);
6) $(\neg p \supset \neg q) \supset (Lq \supset Lp)$ — DR5 (4, 5).

T15. $L\neg\neg p \supset Lp$.

1) $\neg p \supset \neg\neg\neg p$ — T9 $(\neg p/p)$;
2) $(\neg p \supset \neg\neg\neg p) \supset (L\neg\neg p \supset Lp)$ — T14 $(\neg\neg p/q)$;
3) $L\neg\neg p \supset Lp$ — MP (1, 2).

T16. $Lp \supset L\neg\neg p$.

1) $\neg\neg\neg p \supset \neg p$ — T10 $(\neg p/p)$;
2) $(\neg\neg\neg p \supset \neg p) \supset (Lp \supset L\neg\neg p)$ — T14 $(\neg\neg p/p,\ p/q)$;
3) $Lp \supset L\neg\neg p$ — MP (1, 2).

T17. $Lp \supset LLp$.

1) $\neg p \supset \neg p$ — T1$(\neg p/p)$;
2) $(\neg p \supset \neg p) \supset (Lp \supset L\neg\neg Lp)$ — A6 (p/q);
3) $Lp \supset L\neg\neg Lp$ — MP (1, 2);
4) $L\neg\neg Lp \supset LLp$ — T15 (Lp/p);
5) $Lp \supset LLp$ — DR5 (3, 4).

T18. $Lp \supset p$.

1) $L\neg\neg p \supset (\neg p \supset \neg\neg p)$ — T11$(\neg p/p,\ \neg\neg p/q)$;
2) $Lp \supset L\neg\neg p$ — T16;
3) $Lp \supset (\neg p \supset \neg\neg p)$ — DR5 (1, 2);
4) $(\neg p \supset \neg\neg p) \supset p$ — A4;
5) $Lp \supset p$ — DR5 (3, 4).

T19. $(p \supset q) \supset (L\neg q \supset L\neg p)$.

1) $p \supset q$ — посылка;
2) $q \supset \neg\neg q$ — T9(q/p);
3) $(p \supset q) \supset (p \supset \neg\neg q)$ — DR3(2);
4) $p \supset \neg\neg q$ — MP (1, 3);
5) $\neg\neg p \supset p$ — T10;
6) $(p \supset \neg\neg q) \supset (\neg\neg p \supset \neg\neg q)$ — DR2 (5);
7) $\neg\neg p \supset \neg\neg q$ — MP (4, 6);
8) $(\neg\neg p \supset \neg\neg q) \supset (L\neg q \supset L\neg p)$ — T14$(\neg p/p,\ \neg q/q)$;
9) $L\neg q \supset L\neg p$ — MP (7, 8);
10) $(p \supset q) \supset (L\neg q \supset L\neg p)$ — DR9 (1—9).

T20. $\neg p \supset L\neg Lp$.

1) $\neg p \supset L\neg L\neg\neg p$ — T13$(\neg p/p)$;
2) $Lp \supset L\neg\neg p$ — T16;
3) $(Lp \supset L\neg\neg p) \supset (L\neg L\neg\neg p \supset L\neg Lp)$ — T19 $(Lp/p,\ L\neg\neg p/q)$;

4) $L\neg L\neg\neg p \supset L\neg Lp$ — MP (2, 3);

5) $\neg p \supset L\neg Lp$ — DR5 (1, 4).

T21. $(p \supset \neg q) \supset \neg(p \supset q)$.

1) $(p \supset \neg q) \supset (L\neg\neg q \supset L\neg p)$ — T19($\neg q/q$);

2) $Lq \supset L\neg\neg q$ — T16 (q/p);

3) $(L\neg\neg q \supset L\neg p) \supset (Lq \supset L\neg p)$ — DR6 (2);

4) $(Lq \supset L\neg p) \supset \neg(p \supset q)$ — A5(q/p, p/q);

5) $(L\neg\neg q \supset L\neg p) \supset \neg(p \supset q)$ — DR5 (3, 4);

6) $(p \supset \neg q) \supset \neg(p \supset q)$ — DR5 (1, 5).

T22. $(L\neg p \supset p) \supset p$.

1) $L\neg p \supset (p \supset L\neg(p \supset p))$ — T11($L\neg(p \supset p)/q$);

2) $(L\neg p \supset (p \supset L\neg(p \supset p))) \supset ((L\neg p \supset p) \supset (L\neg p \supset L\neg(p \supset p)))$ — A2($L\neg p/p$, p/q, $L\neg(p \supset p)/r$)

3) $(L\neg p \supset p) \supset (L\neg p \supset L\neg(p \supset p))$ — MP (1, 2);

4) $(L\neg p \supset L\neg(p \supset p)) \supset ((p \supset p) \supset p)$ — T11: 5 ($p \supset p/p$, p/q);

5) $(L\neg p \supset p) \supset ((p \supset p) \supset p)$ — DR5(3, 4);

6) $(p \supset p) \supset ((L\neg p \supset p) \supset p)$ — DR8(5);

7) $p \supset p$ — T1;

8) $(L\neg p \supset p) \supset p$ — MP (6, 7).

T23. $(Lp \supset q) \supset ((p \supset (\neg p \supset q)) \supset ((L\neg p \supset q) \supset q))$.

1) $Lp \supset q$ — посылка;

2) $p \supset (\neg p \supset q)$ — посылка;

3) $L\neg p \supset q$ — посылка;

4) $(L\neg p \supset q) \supset (L\neg q \supset L\neg L\neg p)$ — T19($L\neg p/p$);

5) $L\neg q \supset L\neg L\neg p$ — MP (3, 4);

6) $L\neg L\neg p \supset p$ — T12;

7) $L\neg q \supset p$ — DR1(5, 6);

8) $L\neg q \supset (\neg p \supset q)$ —DR1(2, 7);

9) $(\neg p \supset q) \supset (L\neg q \supset L\neg\neg p)$ — T19($\neg p/p$);

10) $L\neg q \supset (L\neg q \supset L\neg\neg p)$ — DR1(8, 9);

11) $(L\neg q \supset (L\neg q \supset L\neg\neg p)) \supset (L\neg q \supset L\neg\neg p)$ — T2($L\neg q/p$, $L\neg\neg p/q$);

12) $L\neg q \supset L\neg\neg p$ — MP (10, 11);

13) $L\neg\neg p \supset Lp$ — T15;

14) $L\neg q \supset Lp$ — DR1(12, 13);

15) $L\neg q \supset q$ — DR1(1, 14);

16) $(L\neg q \supset q) \supset q$ — T22 (q/p);

17) q — MP (15, 16);

18) $(Lp \supset q) \supset ((p \supset (\neg p \supset q)) \supset ((L\neg p \supset q) \supset q))$ — DR9 (1—17).

T24. $L\neg p \supset \neg(p \supset q)$.

1) $L\neg p \supset (p \supset \neg q)$ — T11 $(\neg q/q)$;

2) $(p \supset \neg q) \supset \neg(p \supset q)$ — T21;

3) $L\neg p \supset \neg(p \supset q)$ — DR5 (1, 2).

T25. $p \supset (L\neg q \supset L\neg(p \supset q))$.

1) $p \supset ((p \supset q) \supset q)$ — T3;

2) $((p \supset q) \supset q) \supset (L\neg q \supset L\neg(p \supset q))$ — T19 $(p \supset q/p)$;

3) $p \supset (L\neg q \supset L\neg(p \supset q))$ — DR5 (2, 3).

T26. $p \supset (Lq \supset L\,(p \supset q))$.

1) $\neg(p \supset q) \supset (p \supset \neg q)$ — A3;

2) $p \supset (\neg(p \supset q) \supset \neg q)$ — DR8 (1);

3) $(\neg(p \supset q) \supset \neg q) \supset (Lq \supset L\,(p \supset q))$ — T14 $(p \supset q/p)$;

4) $p \supset (Lq \supset L\,(p \supset q))$ — DR5 (2, 3).

T27. $\neg q \supset \neg(p \supset q)$.

1) $\neg q \supset (p \supset \neg q)$ — A1 $(\neg q/q)$;

2) $(p \supset \neg q) \supset \neg(p \supset q)$ — T21;

3) $\neg q \supset \neg(p \supset q)$ — DR5 (1, 2).

Полученные теоремы позволяют доказать следующие **метатеоремы**, выявляющие важнейшие свойства системы *Limp*.

MT1. Пусть A — формула системы *Limp* и $p_1, \ldots, p_n$ — список пропозициональных переменных, среди которых имеются все пропозициональные переменные, входящие в A. Пусть $t_1, \ldots, t_n$ — некоторые значения из {0, 1, 2} переменных $p_1, \ldots, p_n$ соответственно. Пусть $\alpha(t_1, \ldots, t_n)$ — последовательность формул, удовлетворяющая следующим условиям:

1) если $t_i = 0$, то $Lp_i \in \alpha(t_1, \ldots, t_n)$;

2) если $t_i = 1$, то $p_i \in \alpha(t_1, \ldots, t_n)$ и $\neg p_i \in \alpha(t_1, \ldots, t_n)$;

3) если $t_i = 2$, то $L\neg p_i \in \alpha(t_1, \ldots, t_n)$;

4) формула входит в последовательность $\alpha(t_1, \ldots, t_n)$ только в силу пп. 1—3;

5) если $i < j$, то любая формула, содержащая p_i, находится в $\alpha(t_1, \ldots, t_n)$ раньше любой формулы, содержащей p_j;

6) p_i находится в последовательности $\alpha(t_1, \ldots, t_n)$ раньше, чем $\neg p_i$.

Тогда справедливы следующие утверждения:

I. Если согласно матрицам M при значениях $t_1, \ldots, t_n$ переменных $p_1, \ldots, p_n$ соответственно формула A принимает значение 0, то $\alpha(t_1, \ldots, t_n) \vdash LA$.

II. Если согласно матрицам M при значениях $t_1, \ldots, t_n$ переменных $p_1, \ldots, p_n$ соответственно формула A принимает значение 1, то $\alpha(t_1, \ldots, t_n) \vdash A$ и $\alpha(t_1, \ldots, t_n) \vdash \neg A$.

III. Если согласно матрицам M при значениях $t_1, \ldots, t_n$ переменных $p_1, \ldots, p_n$ соответственно формула A принимает значение 0, то $\alpha(t_1, \ldots, t_n) \vdash L\neg A$.

Доказательство. Докажем МТ1 индукцией по общему числу s (A) вхождений в A знаков L, $\neg$ и $\supset$.

База индукции. Пусть $s(A) = 0$. Тогда в силу очевидных выводимостей $Lp_i \vdash Lp_i$; $p_i \neg p_i \vdash p_i$; $p_i \neg p_i \vdash \neg p_i$; $L\neg p_i \vdash L\neg p_i$ утверждения I—III оказываются истинными.

Шаг индукции. Пусть для $s(A) \leq k$ утверждения I—III верны, и пусть $s(A) = k + 1$. Тогда возможны лишь следующие три случая:

1. A имеет вид $A' \supset A''$. Тогда $s(A')$, $s(A'') \leq k$.

1.1. Если значением A при $t_1, \ldots, t_n$ согласно матрицам M является 0, то при тех же значениях $t_1, \ldots, t_n$ A" принимает значение 0, а A' — значение из {0, 1}. В силу предположения индукции имеем:

$$\alpha(t_1, \ldots, t_n) \vdash LA'' \tag{1}$$

и либо

$$\alpha(t_1, \ldots, t_n) \vdash A', \tag{2}$$

либо

$$\alpha(t_1, \ldots, t_n) \vdash LA'. \tag{3}$$

Если (3), то в силу T18 имеем $\vdash LA' \supset A'$ и по MP имеем вновь $\alpha(t_1, \ldots, t_n) \vdash A'$. Итак, (2) имеет место в любом случае. По T26 имеем $\vdash A' \supset (LA'' \supset L(A' \supset A''))$, и по MP из (2) получаем $\alpha(t_1, \ldots, t_n) \vdash LA'' \supset L(A' \supset A'')$. Отсюда в силу (1) и по MP получаем $\alpha(t_1, \ldots, t_n) \vdash L(A' \supset A'')$.

1.2. Если значением A при $t_1, \ldots, t_n$ согласно матрицам M является 2, то при тех же значениях $t_1, \ldots, t_n$ A" принимает значение 2, а A' — значение из {0, 1}. Поэтому в силу предположения индукции имеем:

$$\alpha(t_1, ..., t_n) \vdash L\neg A'' \qquad (4)$$

и вновь имеем либо (2), либо (3). Значит, как было показано выше, выводимость (2) выполняется в любом случае. По T25 имеем $\vdash A' \supset (L\neg A'' \supset L\neg(A' \supset A''))$. Отсюда и из (2) по MP получаем $\alpha(t_1, ..., t_n) \vdash L\neg A'' \supset L\neg(A' \supset A'')$. Отсюда и из (4) по MP получаем $\alpha(t_1, ..., t_n) \vdash L\neg(A' \supset A'')$.

1.3. Если значением A при $t_1, ..., t_n$ согласно матрицам M является 1, то при тех же значениях $t_1, ..., t_n$ либо A'' принимает значение 1, либо A' — значение 2. В первом случае имеем:

$$\alpha(t_1, ..., t_n) \vdash A'' \qquad (5)$$

и

$$\alpha(t_1, ..., t_n) \vdash \neg A''. \qquad (6)$$

По A1 имеем $\vdash A'' \supset (A' \supset A'')$. Отсюда и из (5) получаем $\alpha(t_1, ..., t_n) \vdash A' \supset A''$.

По T27 имеем $\vdash \neg A'' \supset \neg(A' \supset A'')$. Отсюда и из (6) получаем $\alpha(t_1, ..., t_n) \vdash \neg(A' \supset A'')$. Во втором же случае имеем:

$$\alpha(t_1, ..., t_n) \vdash L\neg A'. \qquad (7)$$

По T11 имеем $\vdash L\neg A' \supset (A' \supset A'')$. Отсюда и из (7) получаем $\alpha(t_1, ..., t_n) \vdash A' \supset A''$.

По T24 имеем $\vdash L\neg A' \supset \neg(A' \supset A'')$. Отсюда и из (7) получаем $\alpha(t_1, ..., t_n) \vdash \neg(A' \supset A'')$.

2. A имеет вид $\neg A'$. Тогда $s(A') \leq k$.

2.1. Если A при $t_1, ..., t_n$ согласно матрицам M принимает значение 0, то при тех же $t_1, ..., t_n$ A' принимает значение 2. По предположению индукции имеем:

$$\alpha(t_1, ..., t_n) \vdash L\neg A'. \qquad (8)$$

Но $L\neg A'$ графически совпадает с LA, так что (8) может быть записано и в виде $\alpha(t_1, ..., t_n) \vdash LA$.

2.2. Если A при $t_1, ..., t_n$ согласно матрицам M принимает значение 1, то при тех же $t_1, ..., t_n$ A' принимает значение 1. По предположению индукции имеем:

$$\alpha(t_1, ..., t_n) \vdash \neg A', \qquad (9)$$

$$\alpha(t_1, ..., t_n) \vdash A'. \qquad (10)$$

По T9 имеем $\vdash A' \supset \neg\neg A''$. Отсюда и из (10) по МР получаем $\alpha(t_1, ..., t_n) \vdash \neg\neg A'$. Последняя выводимость может быть записана как $\alpha(t_1, ..., t_n) \vdash \neg A$, в то время как (9) может быть записана и как $\alpha(t_1, ..., t_n) \vdash A$.

2.3. Если A при $t_1, ..., t_n$ согласно матрицам M принимает значение 2, то при тех же $t_1, ..., t_n$ A' принимает значение 0. По предположению индукции имеем:

$$\alpha(t_1, ..., t_n) \vdash LA'. \tag{11}$$

По T16 имеем $\vdash LA' \supset L\neg\neg A' = L\neg A$. Отсюда и из (11) по МР получаем $\alpha(t_1, ..., t_n) \vdash L\neg A$.

3. A имеет вид LA'. Тогда s (A') $\leq$ k.

3.1. Если A при $t_1, ..., t_n$ согласно матрицам M принимает значение 0, то при тех же $t_1, ..., t_n$ A' принимает значение 0. По предположению индукции имеем:

$$\alpha(t_1, ..., t_n) \vdash LA'. \tag{12}$$

По T17 имеем $\vdash LA' \supset LLA'$. Отсюда и из (12) по МР получаем $\alpha(t_1, ..., t_n) \vdash LLA'$.

3.2. Если A при $t_1, ..., t_n$ согласно матрицам M принимает значение 2, то при тех же $t_1, ..., t_n$ A' принимает значение из {1, 2}. По предположению индукции имеем либо

$$\vdash \alpha(t_1, ..., t_n) \vdash \neg A', \tag{13}$$

либо

$$\alpha(t_1, ..., t_n) \vdash L\neg A'. \tag{14}$$

Если имеет место (14), то по T18 имеем $\vdash L\neg A' \supset \neg A'$ и по МР отсюда и из (14) получаем (13). Итак, (13) имеет место в любом случае. По T20 имеем $\vdash \neg A' \supset L\neg LA'$. Отсюда и из (13) по МР получаем $\alpha(t_1, ..., t_n) \vdash L\neg LA'$.

МТ1 доказана.

МТ2. Если $\vdash A$, то A — M-тавтология.

Доказательство. Легко убедиться, что все аксиомы *LImp* суть M-тавтологии, а все правила вывода *LImp* сохраняют свойство M-тавтологичности.

МТ3. Если A — М-тавтология, то $\vdash A$.

Доказательство. Если A — М-тавтология, то для любых $t_1, \ldots, t_n$, (определяемых как в МТ1) имеем либо $\alpha(t_1, \ldots, t_n) \vdash LA$ (15), либо $\alpha(t_1, \ldots, t_n) \vdash A$ (16). Если имеет место (15), то по Т18 имеем $\vdash LA \supset A$ и по МР вновь получаем (16). Т. к. (16) имеет место в любом случае и по определению $\alpha(t_1, \ldots, t_n)$, для любых $t_1, \ldots, t_{n-1}$ имеем следующие выводимости:

$$\alpha(t_1, \ldots, t_{n-1}), Lp_n \vdash A, \tag{17}$$

$$\alpha(t_1, \ldots, t_{n-1}), p_n, \neg p_n \vdash A, \tag{18}$$

$$\alpha(t_1, \ldots, t_{n-1}), L\neg p_n \vdash A. \tag{19}$$

Из (17)—(19) по DR9 получаем:

$$\alpha(t_1, \ldots, t_{n-1}) \vdash Lp_n \supset A, \tag{20}$$

$$\alpha(t_1, \ldots, t_{n-1}) \vdash p_n \supset (\neg p_n \supset A), \tag{21}$$

$$\alpha(t_1, \ldots, t_{n-1}) \vdash L\neg p_n \supset A. \tag{22}$$

По Т23 имеем $\vdash (Lp_n \supset A) \supset ((p_n \supset (\neg p_n \supset A)) \supset ((L\neg p_n \supset A) \supset$ $\supset A))$. Отсюда и из (20)—(22), трижды применяя МР, получаем $\alpha(t_1, \ldots, t_{n-1}) \vdash A$ для любых $t_1, \ldots, t_{n-1}$. Таким образом, последовательно сокращая i в $\alpha(t_1, \ldots, t_i) \vdash A$, $1 \leq i \leq n$, можно, очевидно, добиться того, чтобы $\vdash A$. МТ3 доказана.

Прежде чем перейти к доказательству дальнейших метатеорем, введем ряд важных понятий. Формальная система называется непротиворечивой в абсолютном смысле, если только существуют формулы, недоказуемые в этой системе. Формальная система называется непротиворечивой в смысле Поста, если и только если ни одна формула, не содержащая связок, недоказуема в данной системе. Формальная система называется непротиворечивой относительно преобразования A в A*, если и только если не существует такой формулы A, что как A, так и A* одновременно являются теоремами данной системы. Формальная система называется полной в абсолютном смысле (в смысле Поста, относительно преобразования A в A*), если и только если добавление к данной системе произвольной новой аксиомы делает ее противоречивой в абсолютном смысле (в смысле Поста, относительно преобразования A в A*).

МТ4. Система *LImp* является:

I. Непротиворечивой в абсолютном смысле.

II. Непротиворечивой в смысле Поста.

III. Непротиворечивой относительно преобразования A в $L\neg A$.

IV. Противоречивой относительно преобразования A в $\neg A$.

Доказательство. (I) Как следует из МТ2, любая формула, не являющаяся М-тавтологией, не доказуема в *LImp*.

(II) Ни одна формула, не содержащая связок, не является М-тавтологией и поэтому, в силу МТ2, не доказуема в *LImp*.

(III) Как следует из определения матриц M, A и $L\neg A$ не могут быть М-тавтологиями одновременно. Значит, в силу МТ2—3, хотя бы одна из них недоказуема в *LImp*.

(IV) Например, формулы $L\neg(p \supset p) \supset p$ и $\neg(L\neg(p \supset p) \supset p)$ обе являются М-тавтологиями и значит, в силу МТ3, обе они доказуемы в *LImp*.

МТ5. Система *LImp* является:

I. Полной в абсолютном смысле.

II. Полной в смысле Поста.

III. Полной относительно преобразования A в $L\neg A$.

Доказательство. Пусть A недоказуема в *LImp*. Тогда A — не М-тавтология и при некоторых значениях $t_1, \ldots, t_n$ списка ее переменных $p_1, \ldots, p_n$ принимает значение 2. Пусть A* получается из A следующей подстановкой:

если $t_i=0$, то вместо p_i подставляется формула $\neg L\neg(p \supset p)$;

если $t_i=1$, то вместо p_i подставляется формула $L\neg(p \supset p) \supset p$;

если $t_i=2$, то вместо p_i подставляется формула $L\neg(p \supset p)$.

Если мы добавим A к *LImp* в качестве новой аксиомы, то по правилу подстановки получим $\vdash A^*$. Как легко убедиться, в соответствии с М-матрицами A* тождественно равна 2. Значит $L\neg A^*$ оказывается тождественно равна 0 и, будучи в силу этого М-тавтологией, доказуема в *Limp*. Имеем $\vdash A^*$, $\vdash L\neg A^*$ и, в силу Т11, $\vdash L\neg A^* \supset (A^* \supset B)$. Дважды применяя MP, получаем $\vdash B$, где B — произвольная формула, т. е. *Limp*+A оказывается абсолютно противоречивой, а следовательно, и противоречивой в смысле Поста, и противоречивой относительно преобразования A в $L\neg A$. MT5 доказана.

МТ6. Все аксиомы *Limp*, кроме, возможно, A1, независимы.

Доказательство.

1) Независимость A2. Зафиксируем множество истинностных значений {0, 1, 2, 3}, где 0, 1 — выделены. Рассмотрим следующую интерпретацию связок *Limp*:

p	¬p	Lp
0	4	0
1	1	4
2	0	4
3	0	4
4	0	4

⊃	0	1	2	3	4
0	0	1	4	4	4
1	0	1	4	4	4
2	1	1	1	4	1
3	1	1	1	1	1
4	1	1	1	1	1

2) Пусть зафиксировано множество истинностных значений {0, 1, 2}, где 0, 1 являются выделенными значениями. Пусть функторы L и ¬ интерпретируются так же, как и в М-матрицах. Тогда независимость A3 как аксиомы *Limp* можно доказать, приняв следующую интерпретацию связки ⊃:

⊃	0	1	2
0	1	1	2
1	1	1	2
2	1	1	1

3) Пусть зафиксировано множество истинностных значений {0, 1}, где 0 является выделенным значением. Пусть ⊃ интерпретируется как в С-матрицах, а L и ¬ интерпретируются в соответствии со следующей таблицей:

p	Lp	¬p
0	0	0
1	1	0

Вышеописанная интерпретация верифицирует все аксиомы и правила вывода системы *Limp*, кроме А4, доказывая тем самым независимость этой последней.

4) Независимость А5 в качестве аксиомы *Limp* может быть доказана с помощью следующей интерпретации ее формул. Пусть зафиксировано множество истинностных значений {0, 1, 2}, где 0, 1 являются выделенными значениями. Пусть функторы $\supset$ и $\neg$ интерпретируются так же, как и в М-матрицах, а L — как функтор, принимающий значение 0 для любого значения его аргумента.

5) Независимость А6 в качестве аксиомы *Limp* может быть доказана с помощью следующей интерпретации ее формул. Пусть зафиксировано множество истинностных значений {0, 1, 2}, где 0, 1 являются выделенными значениями. Пусть функторы $\supset$ и $\neg$ интерпретируются так же, как и в М-матрицах, а L — в соответствии со следующей таблицей:

p	Lp
0	1
1	2
2	2

МТ6 доказана.

И. И. Иванова
Бишкек

РАЦИОНАЛИСТИЧЕСКИЕ ЕРЕСИ КАК СРЕДСТВО ДЕУНИВЕРСАЛИЗАЦИИ КЛАССИЧЕСКОЙ ЛОГИКИ

Проблема отказа от классической логики как некоторого универсального метода правильного мышления предполагает формулировку и рассмотрение целого ряда вспомогательных вопросов. Наиболее важными среди последних видятся задачи уточнения понятия классической логики, выяснения цели ее деуниверсализации, а также поиска для этого соответствующих средств.

Первая из указанных вспомогательных задач возникает