1996 год

Методические основы теории турбулентности и морского волнения

Г. С. Голицын

Введение

В 2001 г. исполнилось 60 лет теории локально однородной и изотропной турбулентности, основы которой были заложены в 1941 г. Андреем Николаевичем Колмогоровым [1, 2], а также его учеником Александром Михайловичем Обуховым [3]. Развитие теории турбулентности за первые 20–25 лет изложены в энциклопедическом двухтомном труде «Статистическая гидромеханика», вышедшем первым изданием в середине 1960-х гг., а вторым – в 1990-х гг. Дополненный английский перевод появился в первой половине 1970-х гг. [4]. Авторам этого труда, ученикам А. Н. Колмогорова Андрею Сергеевичу Монину и Акиве Моисеевичу Яглому, внесшим огромный вклад в развитие этой теории и ее приложений, в 2001 г. исполнилось по 80 лет.

Эта теория, одна из самых красивых физических теорий, объясняет огромное разнообразие природных процессов в атмосфере и океане (см. обзор А. М. Яглома [5] к 40-летию теории), в астрофизике, технике и т. д. В 1991 г. было организовано специальное заседание Королевского общества в Лондоне, посвященное 50-летию теории [6], см. также книгу У. Фриша [7]. А. Н. Колмогоров впервые определил класс процессов в средах, куда поступает энергия извне или благодаря неустойчивости самих этих процессов и тем или иным образом эта энергия выводится из игры. Такие процессы всегда случайны, и возможно лишь статистическое их описание. Они находятся в динамическом равновесии, далеком от статистического. Устойчивыми могут оказаться лишь распределения для разностей значений искомых величин, для чего А. Н. Колмогоров ввел аппарат структурных функций, ставших одним из основных инструментов описания случайных процессов [4]. Общая теория процессов со стационарными случайными приращениями в n-мерном пространстве, т. е. векторных полей, была создана трудами А. М. Обухова и А. М. Яглома.

Для турбулентности А. Н. Колмогоров ввел понятие интервала равновесия, в котором в крупных масштабах энергия вводится в поток, а затем, сохраняясь, передается каскадом вихрей вплоть до самых мелких, где она диссипирует благодаря действию вязкости. Интервал масштабов, где происходит передача энергии без заметной диссипации, получил название инерционного, так как там в потоке действуют лишь силы инерции. Такая схема может действовать в других обстоятельствах, например, как мы увидим ниже, для волнения морской поверхности. Поэтому представляется методически полезным, по крайней мере для преподавания и/или, как говорят, для расширения горизонта, сделать обзор различных подходов, ведущих в инерционном интервале к основным результатам 1941 г. для турбулентности и сравнить их с соответствующими результатами для волн на поверхности моря. Насколько мне известно, таких детальных сравнений и обсуждений в литературе не проводилось. При этом будет дано физически обоснованное объяснение формы коэффициента турбулентной диффузии для процессов на морской поверхности в масштабах от метра до тысячи километров. Среди представленного материала есть и несколько методических новинок.

Основные результаты теории

Приведем здесь основные гипотезы и результаты А. Н. Колмогорова.

Гипотеза 1. Для масштабов r, меньших внешнего масштаба турбулентности L_0, распределения вероятностей разности скоростей, измеренных в двух точках, разделенных расстоянием r, однородны и изотропны и определяются лишь значениями r, скоростью диссипации кинетической энергии на единицу массы ε и кинематической вязкостью ν.

В этих предположениях вводятся микромасштаб длины

$$l_\nu = \nu^{3/4}\varepsilon^{-1/4}, \tag{2.1}$$

и микромасштаб времени

$$\tau_\nu = \nu^{1/2}\varepsilon^{-1/2}, \tag{2.2}$$

а также микромасштаб скорости

$$\nu_{\nu} = \upsilon^{1/4}\varepsilon^{1/4}. \tag{2.3}$$

Теперь средний квадрат разности скоростей в двух точках, находящихся на расстоянии r друг от друга, записывается как

$$<\upsilon^2(r)> = \varepsilon^{1/2}\,\nu^{1/2} f(r\varepsilon^{1/4}\nu^{-3/4}), \tag{2.4}$$

где угловые скобки означают осреднение, $f(r/l_{\nu})$ – безразмерная функция, подлежащая определению из экспериментов (прямых или численных). Весь интервал масштабов $r << L_0$ получил название интервала равновесия, поскольку здесь энергия со скоростью ε передается от масштабов порядка L_0 к микромасштабам, где она и диссипирует. Для простоты в (2.3) и (2.4) и всюду далее, если не оговаривается, подразумевается модуль разности скоростей.

Гипотеза 2. В области масштабов $l_{\nu} << r << L_0$ распределения вероятностей для разности скоростей зависят лишь от ε и r. Эта часть интервала масштабов получила название инерционного интервала, поскольку здесь действуют лишь силы инерции (и давление, изотропизирующее поток [8]).

Теперь из соображений размерности и/или при исключении из (2.4) величины кинематической вязкости ν получаем

$$<\upsilon^2(r)> = a_{\upsilon}(\varepsilon r)^{2/3}, \tag{2.5}$$

где $a_{\upsilon} = 0(1)$ (подробнее см. [5]). Далее подобные численные коэффициенты для простоты и краткости не выписываются.

Соответствующая спектральная плотность

$$F_{\upsilon}(k) = \varepsilon^{2/3}k^{-5/3},\ k = 2\pi/r. \tag{2.6}$$

Эквивалентное этому выражение было получено А. М. Обуховым [3], что соответствует формуле Колмогорова (2.5).

А. Н. Колмогоров в [2] вывел из уравнения Навье – Стокса динамическое уравнение турбулентности, связывающее вторые и третьи моменты для разности продольных компонент скорости (компоненты разности скоростей в направлении вектора r). Оно имеет вид:

$$D_{lll}(r) - 6\nu\frac{dD_{ll}(r)}{dr} = -\frac{4}{5}\varepsilon r, \tag{2.7}$$

где $D_{lll}(r) = <\upsilon_l^3(r)>$ и $D_{ll}(r) = <\upsilon_l^2(r)>$, l – означает проекцию вектора разности скоростей на направление радиуса вектора $\boldsymbol{r}$. В инерционном интервале отсюда

$$D_{lll}(r) = -\frac{4}{5}\varepsilon r, \tag{2.8}$$

а при $r << l_{\nu}$ имеем

$$D_{ll}(r) = <\upsilon^2(r)> = \frac{1}{15}\frac{\varepsilon}{\nu}r^2. \tag{2.9}$$

Последним важным результатом 1941 г. было объяснение А. М. Обуховым эмпирически найденной Л. Ф. Ричардсоном [9] зависимости коэффициента относительной диффузии двух частиц в атмосфере $K \propto r^{4/3}$, т. е. средней скорости разбегания пары частиц в турбулентном потоке в зависимости от r, расстояния между частицами. Из соображений размерности, используя ε и r в качестве определяющих параметров, Обухов получил

$$K = \frac{d<r^2>}{dt} = \varepsilon^{1/3}r^{4/3}. \tag{2.10}$$

Затем А. М. Обухов в 1949 г. [10], а С. Коррзин в 1951 г. [11] для поля пассивной примеси в инерционном интервале турбулентности получили, соответственно, формулы, аналогичные (2.5) и (2.6). А. М. Яглом [12] вывел уравнение, аналогичное (2.7), описывающее динамику поля температуры в турбулентном потоке, связывающее структурную функцию температуры T второго порядка со смешанными моментами $D_{lTT}(r)$, и справа в нем стоит член $-4/3\,\varepsilon_T r$, где ε_T – скорость генерации температурных возмущений в потоке. В том же 1949 г. в аналогичных предположениях Обухов описал статистическую структуру поля давления [12], а А. М. Яглом – структуру поля ускорений [13]. Подробное изложение этих результатов можно найти в [14]. Работа [13], по-видимому, послужила импульсом для ряда работ, начавшихся в 1960-х гг. в СССР, поэтому кратко резюмируем ее результаты.

Яглом различает лагранжевы ускорения жидких частиц

$$A_i = d\upsilon_i/dt, \tag{2.11}$$

ускорения в точке (эйлеровы)

$$a_i = \partial\upsilon_i/\partial t \tag{2.12}$$

и конвективные ускорения

$$a_i = -u_k(\partial u_i/\partial x_k). \tag{2.13}$$

Наибольший интерес представляют лагранжевы ускорения A_i. В [11] показано, что поле ускорений мелкомасштабно, они имеют средний квадрат, равный

$$<A_i^2> = \varepsilon^{3/2}\nu^{-1/2}, \tag{2.14}$$

их пространственная корреляционная функция быстро спадает на расстояниях, больших l_ν из (2.1), а временная – на $\tau > \tau_\nu$ из (2.2). Временной спектр лагранжевых ускорений оказывается равным в инерционном интервале

$$F_A(\omega) = \varepsilon = \mathrm{const}, \tag{2.15}$$

а спектральная плотность разностей лагранжевых скоростей

$$F_\upsilon(\omega) = \varepsilon\omega^{-2}. \tag{2.16}$$

Заметим, что постоянная спектральная плотность (2.15) соответствует белому шуму или, что одно и то же, δ-коррелированному случайному процессу. У нас это значит, что в инерционном интервале

$$< A(t+\tau)A(t)> = B_A(\tau) = \varepsilon\delta(\tau). \tag{2.17}$$

Спектральной плотности (2.16) соответствует структурная функция

$$D_\upsilon^2(\tau) = <[\upsilon(t+\tau) - \upsilon(t)]^2> = \varepsilon\tau.$$

Из соображений размерности этот результат был получен Л. Д. Ландау и опубликован в первом издании книги [15] в 1944 г. Он с самого начала был известен А. М. Обухову, но опубликован им лишь в 1959 г. [16]. Обухов получил его, предположив, что изменения скоростей и координат лагранжевой частицы представляют собой шестимерный марковский процесс. По его терминологии формула (2.18) описывает «диффузию в пространстве скоростей», а скорость диссипации ε играет роль коэффициента диффузии по аналогии с броуновской диффузией в пространстве координат (подробнее см. [4, т. 2]).

Дж. К. Бэтчелор в начале 1950-х гг. показал [17, 18], что в турбулентном потоке квадрат размера облака частиц расширяется пропорционально кубу времени

$$r^2 \sim \varepsilon\tau^3, \tag{2.19}$$

откуда следует закон (2.10).

Заметим, что в интервале, где выполняются закономерности (2.15) – (2.19), временная спектральная плотность смещений лагранжевой частицы будет

$$F_\upsilon(\omega) = \varepsilon\omega^{-4}. \tag{2.20}$$

Приложения и другие подходы

За первые две декады развитие феноменологической теории локально однородной и изотропной турбулентности было в основном закончено, включая и разнообразные приложения, например, к магнитной гидродинамике [19, 20]. Внешняя простота основных результатов, формул (2.5), (2.8) – (2.10), а также (2.15) – (2.19), получаемых лишь из соображений подобия и размерности и без употребления уравнений гидродинамики, наводила на мысль, что эти результаты имеют какой-то более общий характер.

По-видимому, первой попыткой найти систему, отличную от чисто гидродинамической, была работа 1963 г. Е. А. Новикова [21]. Он использовал уравнение Ланжевена со случайной силой

$$\frac{d\upsilon}{dt} = \lambda\upsilon + f(t), \tag{3.1}$$

где сила $f(t)$ предполагалась имеющей конечное время корреляции τ_0. Тогда для времен $t >> \tau_0$ получаются все закономерности статистики лагранжевой частицы, т. е. формулы (2.15) – (2.19).

В следующем 1964 г. Новиков [22] рассмотрел уравнение Навье – Стокса со случайными силами и получил динамическое уравнение (2.7), где скорость диссипации кинетической энергии определялась как спектральная плотность поля случайных сил, т. е. из формулы, аналогичной (2.15). Отметим, что в [18] была получена поправка к правой части (2.17) в виде множителя $1 - 5/14\,(r/L_0)^2$, где L_0 – внешний масштаб турбулентности.

Выскажем здесь пару методических замечаний. Работа А. М. Яглома [13] показала, что ускорения в турбулентном потоке имеют корреляционную функцию, затухающую как по времени, так и по пространству на колмогоровских микромасштабах времени (2.2) и длины (2.1). Е. А. Новиков показал, что простейшая система со случайным вынуждением и линейным затуханием для времен, много больших корреляции случайных сил, эквивалентна по своей статистике лагранжевой частице в турбулентном потоке. Отсюда следует, что для получения этих статистических характеристик в инерционном интервале, во-первых, можно предположить δ-коррелированность по времени рассматриваемого процесса возбуждения частицы. Тогда спектральная плотность случайных сил будет белым шумом, т. е. будет определяться формулой (2.15). Во-вторых, переход к пространственным характеристикам полей скорости, ускорений, смещений в том же инерционном интервале может быть сделан с помощью формулы (2.19) для среднего квадрата смещений, откуда

$$\tau \sim (r^2/\varepsilon)^{1/3}, \tag{3.2}$$

и для частоты $\omega = 2\pi/\tau$ и пространственного волнового числа $k = 2\pi/r$ можно получить соотношение, типа дисперсионного

$$\omega \sim \varepsilon^{1/3} k^{2/3}. \tag{3.3}$$

Частотный и пространственный спектры случайных полей связаны соотношением

$$F(k) = F(\omega)\frac{d\omega}{dk}\cdot \tag{3.4}$$

Подставляя сюда (2.16), с учетом (3.3) получаем (2.6). Аналогично, подставляя (3.2) в (2.18), получаем (2.5). Преобразования от лагранжевых координат к эйлеровым нелинейны (Монин [21]), но они не содержат никаких размерных внешних параметров. Поэтому они сказываются лишь на величинах численных коэффициентов, которые все равно должны определяться лишь экспериментально. Таким образом, предположение о δ-коррелированности по времени ускорений в потоке позволяет получить для инерционного интервала все закономерности лагранжевой статистики турбулентности. Получающееся из них соотношение (3.3) типа дисперсионного восстанавливает и всю пространственную структуру, правда, лишь, так сказать, для изменений модуля скорости. Однако, вспомнив, что для несжимаемой жидкости $div\,\upsilon = 0$, можно получить и все векторные соотношения. Лишь множитель $-4/5$ в (2.8) таким образом не восстанавливается.

Вывод соотношений для интервала равновесия из правила скорейшего отклика

Это правило, наиболее четко сформулированное автором в 1997 г. [24, 25], гласит, что если мы знаем возбуждение (forcing) какой-либо величины, то сама эта величина оценивается как произведение возбуждения на наименьшее время, присущее этой системе. В линейной теории наименьшее время соответствует наибольшему инкременту.

В общем случае поиск соответствующих времен можно делать с помощью критериев подобия, представляя эти безразмерные критерии в виде отношений времен. В [24, 25] даны многочисленные примеры из гидродинамики, геофизики, астрофизики действия этого правила, в том числе и для статистики (частоты) событий (например, землетрясений, энергетического спектра космических лучей и т. д.). Покажем, как с помощью этого правила выводятся результаты А. Н. Колмогорова для всего интервала равновесия (опять же без численных коэффициентов).

Считаем, как и в [1–3], ε заданным внешним параметром, определяемым скоростью генерации кинетической энергии турбулентности в области больших масштабов L_0 вследствие неустойчивости крупных вихрей и уравновешиваемой вязкой диссипацией в области мелких масштабов порядка микромасштаба l_ν из (2.1). Припишем каждому вихрю масштаба $r << L_0$ число Рейнольдса

$$Re = \upsilon r/\nu \tag{4.1}$$

Умножим и разделим справа число Re на r. Тогда оно представится в виде отношения двух времен – вязкого

$$\tau_\nu = r^2/\nu \tag{4.2}$$

и динамического

$$\tau_d = r/\upsilon, Re = \tau_\nu/\tau_d. \tag{4.3}$$

Наше правило гласит, что изменение кинетической энергии на единицу массы жидкой частицы за время τ будет

$$<\upsilon^2(\tau)> = \varepsilon\tau, \tag{4.4}$$

что совпадает с (2.18). При $Re >> 1$ имеем $\tau_d << \tau_\nu$ и с учетом перехода от лагранжева описания к эйлерову [23] получаем

$$<\upsilon^2(\tau)> = \varepsilon r/<\upsilon>, \tag{4.5}$$

откуда, умножая это равенство справа и слева на $<\upsilon>$, с точностью до порядка величины имеем

$$<\upsilon^3(\tau)> = \varepsilon r, \tag{4.6}$$

$$<\upsilon^2(\tau)> = (\varepsilon r)^{2/3}. \tag{4.7}$$

Для малых вихрей $Re \le 1$ и $\tau_v \le \tau_d$. Тогда

$$<\upsilon^2(\tau)> = \varepsilon\tau = \frac{\varepsilon}{\nu} r^2, \tag{4.8}$$

и получаем формулы А. Н. Колмогорова [1] для структурных функций в области микромасштабов. Эти формулы получаются и из динамического уравнения (2.7) – см. (2.9).

Элементарный вывод соотношений для инерционного интервала

Этот вывод использует лишь понятия из школьной физики.

Ускорение a есть сила на единицу массы, а изменение скорости – произведение ускорения на время:

$$\upsilon \sim a\tau. \tag{5.1}$$

Умножим справа и слева это соотношение на v и учтем, что произведение силы, отнесенной к единице массы, т. е. величина a, на скорость есть удельная мощность работы в системе. Обозначим эту мощность $\varepsilon = a\upsilon$. Тогда

$$\upsilon^2(\tau) \sim \varepsilon\tau. \tag{5.2}$$

Умножим (5.2) справа и слева на τ^2 и заметим, что $v\tau$ – расстояние, проходимое частицей. Тогда

$$r^2(\tau) \sim \varepsilon\tau^3. \tag{5.3}$$

Рассмотрим совокупность таких частиц. Для каждой из них выполняются соотношения (5.1)–(5.3) и в среднем для всех них. Произведем операцию осреднения по ансамблю таких частиц, т. е. вычислим средние значения изменения квадрата скорости и квадрата проходимых путей. Поскольку мы не вычисляем при этом численных коэффициентов в формулах (5.2) и (5.3), то эти соотношения сохраняют свой вид. Тогда из (5.3) следует

$$\tau = (r^2/\varepsilon)^{1/3}, \tag{5.4}$$

и, подставляя это в (5.2), получим

$$<\upsilon^2> \sim (\varepsilon r)^{2/3}. \tag{5.5}$$

Умножая (5.2) на r справа и слева с учетом соотношения $\upsilon\tau \sim r$, получим

$$\langle \upsilon^3 \rangle \sim \varepsilon r. \tag{5.6}$$

Вывод этот, представляется, хорошо иллюстрирует механическую природу возникающих статистических закономерностей.

Морское волнение

Для простоты мы здесь будем рассматривать глубокое море, когда дисперсионное соотношение в пренебрежении капиллярными волнами имеет вид

$$\omega^2 = kg = 2\pi g/\lambda, \tag{6.1}$$

где g – ускорение силы тяжести, λ – длина волны. Для частот выше частоты максимума спектра вертикальных смещений волнения, т. е. для времен меньше периода максимальных волн, можно ожидать некоей универсальной структуры. Впервые такая структура была предложена О. М. Филлипсом в 1958 г. [22]. Из соображений, что только сила тяжести является лимитирующим фактором при обрушении волн, с помощью анализа размерностей он предложил зависимость

$$F_d(\omega) = \beta g^2 \omega^{-5}, \tag{6.2}$$

где β – численный коэффициент, оказавшийся, судя по последующим измерениям, функцией безразмерного разгона волн $X = xg/u_*^2$, где x –разгон ветра, u_*– динамическая скорость или скорость трения, мера передачи импульса от ветра волнам (см. [23]). При этом $\beta \sim X^{-1/3}$, оставаясь в пределах от 0.8 до 2 на 10^{-2} при среднем значении по многим сериям измерений $1.2 \cdot 10^{-2}$. Там же приведено значение среднего квадрата скорости уклона волн $\langle \alpha^2 \rangle \approx 1.4 \cdot 10^{-2}$. Близкое совпадение этих двух величин дает возможность проинтерпретировать величину $\beta g^2 = (\beta^{1/2} g)^2$ как квадрат среднего ускорения силы тяжести, действующей вдоль склона волн.

Спектру смещений (6.2) соответствует спектр ускорений

$$F_a(\omega) = \omega^4 F_d(\omega) = \beta g^2 \omega^{-1}, \tag{6.3}$$

которому соответствует структурная функция

$$D_a(\tau) \sim \beta g^2 = \mathrm{const}. \tag{6.4}$$

Обратная частотная зависимость спектра (6.3) является типичной для процессов так называемого фликкер-шума. Отметим также, что (6.2) соответствует спектр уклонов, равный с учетом (6.1)

$$F_a(\omega) = \lambda^{-2} F_d(\omega) = \beta(4\pi^2\omega)^{-1}, \tag{6.5}$$

Однако с течением времени набирались данные, свидетельствующие, что степень −5 слишком крутая и лучше подходит зависимость ω^{-4}. Впервые такую зависимость четко проследил Тоба [28] в 1973 г., он предложил, опять же из соображений размерности, зависимость

$$F_d(\omega) = \alpha u_* g \omega^{-4}, \tag{6.6}$$

где $\alpha = 0(0.1)$. Зависимость, сводящуюся к этой, еще в 1965 г. предложил В. Е. Захаров [29] (см. также [30]), которая была получена из гамильтонова формализма для волн в приближении слабой нелинейности. Перераспределение энергии по спектру идет путем четырехволновых взаимодействий. Позднее зависимость (6.6) по-разному обосновывали С. А. Китайгородский в 1983 г. [31] и сам О. М. Филлипс в 1985 г. [32].

С нашей точки зрения, формула (6.6) имеет очень простую интерпретацию, аналогичную той, которая обсуждалась выше. Вспомним, что g – мера ускорений, действующих на жидкую частицу поверхности воды, u_* – масштаб скорости, а их произведение – мера мощности движений. Обозначим это произведение ε, что мы делаем с полным основанием, так как эта величина характеризует удельную мощность, передаваемую от ветра волнению. Спектр ускорений теперь уже будет постоянным в интервале частот, где действует зависимость (6.6), и спектр уклонов будет также постоянным

$$F_a(\omega) = \alpha u_* / 4\pi^2 g.$$

Эта зависимость аналогична (3.16) из [32]. Независимость спектра уклонов от частоты подтверждает наше наблюдение, что случайные ускорения действуют вдоль уклонов волн и спектр этих ускорений, как следует из (6.6), – белый шум. В работе [32] приведены 4 спектра уклонов для u_* от 11 до 45 см/с. Три из них в диапазоне частот от 1 до 10 $с^{-1}$ действительно практически постоянны, и нормировкой на u_* их можно свести в узкую практически горизонтальную полосу. Однако спектр 4 с $u_* = 45$ см/с падает в этом интервале частот примерно как $\omega^{-1/2}$. С этим исключением (6.7) можно считать согласующейся с данными измерений, хотя больший объем данных был бы полезен.

Пространственные спектры находятся с помощью соотношения (3.4) с учетом (6.1). Пространственный спектр смещений взволнованной поверхности будет

$$F_r(k) = \varepsilon g^{-3/2} k^{-5/2} = \alpha u_* g^{-1/2} k^{-5/2}, \tag{6.8}$$

а спектральная плотность уклонов

$$F_a(k) = \frac{\alpha u_*}{g\pi^2}(kg)^{-1/2} = \frac{\alpha u_*}{g\pi^{5/2}} \frac{\lambda^{1/2}}{g^{1/2}}. \tag{6.9}$$

Пространственный спектр (6.8) хорошо подтверждается данными [33], в которых получено $F(k) \propto k^{-n}$, где показатель n находится в пределах 2.4 – 2.6.

Из (6.6) следует, что спектр вертикальных скоростей

$$F_\omega(\omega) = \omega^2 F_d(\omega) = \varepsilon\omega^{-2}. \tag{6.10}$$

Такую же зависимость от частоты должен иметь и спектр горизонтальных скоростей, как и спектр горизонтальных смещений должен иметь вид (6.6), а спектр горизонтальных ускорений должен быть постоянным. Тогда, как и в п. 2, средний квадрат смещений по горизонтали должен быть порядка $\varepsilon\tau^3$, а коэффициент турбулентности диффузии $K \sim \varepsilon^{1/3} r^{4/3} \sim (u_* g)^{1/3} r^{4/3}$.

Согласно многочисленным данным, собранным в [33] и книге Р. В. Озмидова [34], коэффициент относительной диффузии трассеров на поверхности океана пропорционален $r^{4/3}$ в интервале расстояний от нескольких метров до тысячи и более километров. Однако в интервале от нескольких сотен метров до нескольких километров величина $K \approx \text{const}$, а на больших масштабах зависимость $\propto r^{4/3}$ продолжается, но с коэффициентом примерно на полпорядка ниже, чем в более мелких масштабах.

Поведению коэффициента диффузии в области более мелких масштабов можно дать такое же объяснение, как и в п. 2 (см. выше). Однако зависимость в больших масштабах нуждается в другом объяснении, поскольку спектр (6.6) действует лишь для частот, соответствующих волнам с длинами порядка сотни метров или меньше.

Мы предлагаем здесь объяснение, связанное с двухмерностью нерегулярных движений масштабов порядка километров и более аналогично тому, как это предлагал Д. Лилли [35] для объяснения «закона –5/3» в атмосфере на больших масштабах. В двумерной турбулентности, как показал Р. Крейкнан [36], на масштабах, больших масштабов накачки завихренности в систему, происходит передача энергии со скоростью ε в сторону малых волновых чисел, т. е. больших масштабов. Для пространственного спектра таких движений действует «закон $-5/3$», а для среднего квадрата расстояний между выделенными частицами – закон (2.19), т. е. $<r^2> \sim \varepsilon\tau^3$. Это соотношение для двумерного турбулентного потока было недавно подтверждено в специальных лабораторных экспериментах [37]. Таким образом, если считать, что случайные движения на поверхности океана организованы по законам двумерной или квазигеострофической турбулентности (их подобие в смысле статистических характеристик было показано Дж. Чарни [38]), то тогда $K \propto r^{4/3}$.

Отличие коэффициента в зависимости $K \sim \varepsilon^{1/3} r^{4/3}$ на полпорядка для интервала в метры и километры указывает, что двумерной или квазигеострофической турбулентности у поверхности океана величина скорости генерации кинетической энергии на полтора порядка меньше, чем для более мелкомасштабного интервала [33]. Подробное обсуждение причин видимого выполнения закона Ричардсона в атмосфере и океане можно найти в [39].

Дискуссия и заключение

Для турбулентности и морского волнения существуют инерционные интервалы, в которых энергия переносится по спектру масштабов от крупных к мелким. В первом случае это энергия, генерируемая неустойчивостью крупномасштабных вихрей, а во втором – энергия, передаваемая ветром волнению. В инерционных интервалах диссипация энергии мала и она передается по спектру со скоростью ε каскадом вихрей или путем четырехволновых взаимодействий. Частотные спектры смещений при лагранжевом описании турбулентности или при измерениях в одной точке равны $\varepsilon\omega^{-4}$, с точностью до численных коэффициентов, которые можно определить лишь экспериментально. Таким спектрам соответствует постоянный спектр ускорений, т. е. белый шум, – напоминаем, для инерционного только интервала. Соответственно корреляционная функция ускорений в этом интервале времен может быть аппроксимирована как $\varepsilon\delta(t)$.

Можно, наоборот, стартовать от такого предположения о корреляции ускорений, получить, что лагранжева структурная функция скорости будет $\varepsilon\tau$, средний квадрат проходимого пути или расстояния между парой частиц в потоке будут расти как $\varepsilon\tau^3$, чему соответствует коэффициент относительной диффузии в турбулентном потоке $\varepsilon^{1/3} r^{4/3}$.

Те же закономерности получаются и для волн в предположении δ-коррелированности ускорений. Показано, что спектру ускорений с точностью до постоянного множителя соответствует частотный спектр наклонов волн. Данные наблюдений последнего не противоречат исходной гипотезе о δ-коррелированности поля ускорений. На этой основе объясняется вид коэффициента диффузии $\propto \varepsilon^{1/3} r^{4/3}$ в интервалах от метров до сотен метров и с другим значением ε в интервале масштабов от единиц до тысяч километров. Последний интервал соответствует обратному каскаду энергии от масштабов самых крупных волн (сотни метров) к синоптическим и ветровым движениям вблизи поверхности океана, описываемым законами двумерной или квазигеострофической турбулентности.

Эта работа была инициирована визитом автора в январе–феврале 2000 г. в Университет штата Аризона по приглашению профессоров Д. Бойера и Дж. Фернандо. Различные аспекты обсуждались со многими людьми; среди которых я хочу вспомнить Е. Б. Гледзера, Ф. В. Должанского, М. М. Заславского, В. И. Кляцкина, В. М. Пономарева, О. М. Филлипса, М. И. Фортус, И. П. Чунчузова. Всем им я искренне благодарен.

---

1. *Колмогоров А. Н.* Локальная структура турбулентности в несжимаемой жидкости при очень больших числах Рейнольдса // Докл. АН СССР. 1941. Т. 30, № 4. С. 299–303.

2. *Колмогоров А. Н.* Рассеяние энергии при локально изотропной турбулентности // Докл. АН СССР. Т. 32, № 1. С. 19–21.

3. *Обухов А. М.* О распределении энергии в спектре турбулентного потока // Изв. АН СССР. Сер. геогр. и геофиз. Т. 32, № 1. С. 22–24.

4. *Монин А. С., Яглом А. М.* Статистическая гидромеханика. М., 1965. Ч. 1; 1967. Ч. 2; 2-е изд. Л., 1992. Т. 1; 1996. Т. 2. (Statistical Hydromechanics. MIT Press. 1971. V. 1; 1975. V. 2).

5. *Яглом А. М.* Закономерности мелкомасштабной турбулентности в атмосфере и океане // Изв. АН СССР. ФАО. 1981. Т. 17, № 12. С. 1235–1257.

6. *Hunt J. C. R., Phillips O. M., Williams D.* (Eds.) Kolmogorov's Ideas 50 Years on // Proc. Roy Soc. L., 1991. A434.

7. *Frish U.* Turbulence: The legacy of A.N. Kolmogorov. Cambridge Univ. Press, 1995.

8. *Batchelor G. K.* The Theory of Homogeneous Turbulence. Cambridge Univ. Press, 1953. (*Бэтчелор Дж. К.* Теория однородной турбулентности. М., 1955).

9. *Richardson L. F.* Atmospheric diffusion shown on a distance-neighbour graph // Proc. Roy. Soc. V. A110, № 756. P. 709–737.

10. *Обухов А. М.* Структура температурного поля в турбулентном потоке // Изв. АН СССР. Сер. геогр. и геофиз. 1949. Т. 13, № 1. С. 58–69.

11. *Corrsin S.* On the spectrum of isotropic temperature fluctuations in an isotropic turbulence // J. Appl. Phys. 1951. Vol. 22, № 6. P. 469–473.

12. *Обухов А. М.* Пульсации давления в турбулентном потоке // Докл. АН СССР. 1949. Т. 66, № 1. С. 17–20.

13. *Яглом А. М.* О поле ускорений в турбулентном потоке // Докл. АН СССР. 1949. Т. 67, № 5. С. 795–798.

14. *Обухов А. М., Яглом А. М.* Микроструктура турбулентного потока // Прикл. матем. мех. 1951. Т. 15, № 1. С. 3–26.

15. *Ландау Л. Д., Лифшиц Е. М.* Механика сплошных сред. М., 1953.

16. *Oboukhov A. M.* Description of turbulence in terms of Lagrangean variables // Adv. in Geophys. 1959. Vol. 6. P. 113–115.

17. *Batchelor G. K.* The application of the similarity theory of turbulence to atmospheric diffusion // Quart. J. Roy. Meteor. Soc. 1950. Vol. 76, № 328. P. 133–146.

18. *Batchelor G. K.* Diffusion in a field of homogeneous turbulence. II. The relative motion of particles // Proc. Cambr. Phil. Soc. 1952. Vol. 48, №. 2. P. 345–362.

19. *Голицын Г. С.* О флуктуациях магнитного поля и плотности тока в турбулентном потоке слабопроводящей жидкости // Докл. АН СССР. 1960. Т. 132, № 2. С. 315–318.

20. *Новиков Е. А.* О магнитной гидродинамике ионосферы // Изв. АН СССР. Сер. геофиз. 1960. № 11. С. 1624–1634.

21. *Новиков Е. А.* Метод случайных сил в теории турбулентности // Журн. эксп. теор. физ. 1963. Т. 44, № 6. С. 2159–2168.

22. *Новиков Е. А.* Функционалы и метод случайных сил в теории турбулентности // Журн. эксп. теор. физ. 1964. Т. 47, № 5. Р. 1919–1926.

23. *Голицын Г. С.* Принцип скорейшей реакции в гидродинамике, геофизике, астрофизике // Докл. РАН. 1997. Т. 356, № 3. Р. 321–324.

24. *Golitsyn G. S.* Convection in viscous and rotating fluids from the viewpoint of forced flow theory // Buoyant Convection in Geophysical Flows / E. J. Plate et. al. (eds). Kluwer, 1998. P. 129–155.

25. *Монин А. С.* О лагранжевых уравнениях гидродинамики несжимаемой вязкой жидкости // Прикл. матем. мех. 1962. Т. 26, № 2. С. 320–327.

26. *Phillips O. M.* The equilibrium range in the spectrum of wind-generated ocean waves // J. Fluid Mech. 1958. Vol. 4. P. 426–434.

27. *Phillips O. M.* The Dynamics of Upper Ocean. Cambr. Univ. Press, 1977.

28. *Toba Y.* Local balance in the air-sea boundary processes. III. On the spectrum of wind waves //J. Oceanogr. Soc. Japan. 1973. Vol. 29. P. 209–229.

29. *Захаров В. Е., Филоненко Н. Н.* Спектр энергии для стохастических колебаний поверхности жидкости // Докл. АН СССР. 1966. Т. 170, № 6. С. 1292–1295.

30. *Захаров В. Е., Заславский М. М.* Кинетические уравнения в слаботурбулентной теории ветровых волн // Изв. АН СССР. ФАО. 1982. Т. 18, № 9. С. 970–979.

31. *Kitaigorodsky S. A.* On the theory of the equilibrium range in the spectrum of wind-generated gravity waves // J. Phys. Oceanogr. 1983. Vol. 13. P. 816–827.

32. *Phillips O. M.* Spectral and statistical properties of the equilibrium range in wind-generated gravity waves // J. Fluid Mech. 1985. Vol. 156. P. 505–531.

33. *Окубо А., Озмидов Р. В.* Эмпирическое соотношение между горизонтальным коэффициентом диффузии и масштабом явления // Изв. АН СССР. ФАО. 1970. Т. 6, № 5. С. 534–536.

34. *Озмидов Р. В.* Диффузия примесей в океане. Л., 1986. (English edition by Kluwer, 1989).

35. *Lilly D. K.* Stratified turbulence and the mesoscale variability of the atmosphere // J. Atmos. Sci. 1983. Vol. 40. P. 749–761.

36. *Kraichnan R. H.* Inertial ranges in two-dimensional turbulence //Phys. Fluids. 1967. Vol. 10, № 7. P. 1417–1423.

37. *Jullien M.-C., Paret J., Tabeling P.* Richardson pair dispersion in two-dimensional turbulence // Phys. Rev. Lett. 1999. Vol. 82, № 14. P. 2872–2875.

38. *Charney J. G.* Geostrophic turbulence // J. Atmos. Sci. 1971. Vol. 28. P. 1087–1095.

39. *Golitsyn G. S.* Why and when the Richardson diffusion law is observed in the atmosphere and at the ocean surface? Environ. Fluid Mech. 2001. Vol. 1.