УДК 512.532.2

Б. М. Верников

МНОГООБРАЗИЯ ПОЛУГРУПП, НА СВОБОДНЫХ ОБЪЕКТАХ КОТОРЫХ ПОЧТИ ВСЕ ВПОЛНЕ ИНВАРИАНТНЫЕ КОНГРУЭНЦИИ 1.5-ПЕРЕСТАНОВОЧНЫ*

Одним из наиболее важных и активно изучаемых классов многообразий универсальных алгебр является класс *конгруэнц-перестановочных* многообразий, т. е. многообразий, на всех алгебрах которых любые две конгруэнции α и β *перестановочны* (удовлетворяют равенству $\alpha\beta = \beta\alpha$). Важность этого класса в немалой степени определяется тем, что он включает в себя все многообразия групп и колец. Но применительно к многообразиям еще одного классического типа алгебр – полугрупп – понятие конгруэнц-перестановочности оказывается слишком жестким и не представляющим существенного интереса. Говоря это, мы имеем в виду следующий факт, впервые доказанный еще в начале 60-х годов в [1] и впоследствии неоднократно передоказывавшийся и усиливавшийся (см., в частности, [2, 3]): многообразие полугрупп конгруэнц-перестановочно тогда и только тогда, когда оно является многообразием периодических групп.

Однако условие конгруэнц-перестановочности можно естественным образом ослабить, потребовав, чтобы перестановочными были не все конгруэнции на всех полугруппах из многообразия, а только все вполне инвариантные конгруэнции на всех полугруппах, свободных в данном многообразии. Это ослабленное условие выполнено уже в широких и важных классах многообразий полугрупп. В частности, в работах [4] и [5] независимо было доказано, что этим свойством обладает всякое *вполне простое* многообразие, т. е. многообразие, состоящее из вполне простых полугрупп. В этих же двух работах (а также в ряде более ранних работ разных авторов) в связи с изучением тождеств в решетках многообразий полугрупп была выявлена важная роль многообразий полугрупп, на свободных объектах которых перестановочны не все вполне инвариантные конгруэнции, а только те из них, которые содержатся в наименьшей полурешеточной конгруэнции (т. е. наименьшей конгруэнции, фактор по которой – полурешетка). Последним свойством, как показано в [4]

*Работа выполнена при поддержке РФФИ (грант № 05-01-00540), межвузовской научной программы «Университеты России» (проект № 04.01.437) и президентской программы поддержки ведущих научных школ Российской Федерации (проект НШ-2227.2003.1).

и [5], обладает уже всякое *вполне регулярное* многообразие, т. е. многообразие, состоящее из *вполне регулярных* полугрупп (объединений групп).

Для краткости назовем многообразия полугрупп, на всех свободных объектах которых любые две вполне инвариантные конгруэнции [содержащиеся в наименьшей полурешеточной конгруэнции] перестановочны, [*почти*] *fi-перестановочными.* Условие почти fi-перестановочности, вообще говоря, не наследуется подмногообразиями (см. [6], пример 2.10) – в отличие от условия fi-перестановочности, наследственность которого вытекает из некоторых простых и весьма общих соображений (см. [6], лемма 1.1). Многообразия, все подмногообразия которых почти fi-перестановочны, будем называть *наследственно почти fi-перестановочными.* Отметим, что свободные объекты подмногообразий многообразия $\mathcal{V}$ – это в точности относительно свободные полугруппы, принадлежащие $\mathcal{V}$. Поэтому наследственная почти fi-перестановочность многообразия $\mathcal{V}$ эквивалентна тому, что на всех относительно свободных полугруппах из $\mathcal{V}$ (а не только на $\mathcal{V}$-свободных полугруппах) любые две вполне инвариантные конгруэнции, содержащиеся в наименьшей полурешеточной конгруэнции, перестановочны.

Полное описание fi-перестановочных и наследственно почти fi-перестановочных многообразий полугрупп получено в [6], а полное описание почти fi-перестановочных многообразий полугрупп – в [7]. При этом в двух указанных работах было установлено, что в некоторых весьма обширных частных случаях из [почти] fi-перестановочности многообразия $\mathcal{V}$ вытекает, что вполне инвариантные конгруэнции α и β на $\mathcal{V}$-свободных полугруппах [содержащиеся в наименьшей полурешеточной конгруэнции] удовлетворяют следующему условию, существенно более сильному, чем перестановочность:

$$\alpha \vee \beta = \alpha \cup \beta \tag{1}$$

(здесь и далее через $\vee$ обозначается объединение в решетке конгруэнций, а через $\cup$ – теоретико-множественное объединение; первым из этих символов ниже будет обозначаться также объединение в решетках многообразий).

Положим $\alpha \circ_n \beta = \alpha\beta\alpha\cdots$, где число сомножителей в правой части равенства равно n. Напомним, что конгруэнции α и β называются *n-перестановочными*, если $\alpha \circ_n \beta = \beta \circ_n \alpha$. Ясно, что перестановочность конгруэнций – это в точности их 2-перестановочность. Общеизвестно, что

$$\alpha \vee \beta = \alpha \cup \beta \cup \alpha\beta \cup \beta\alpha \cup \cdots \cup \alpha \circ_n \beta \cup \beta \circ_n \alpha \cup \cdots . \tag{2}$$

Очевидно, что из перестановочности конгруэнций α и β вытекает, что $\alpha \vee \beta = \alpha\beta$. Ясно, что условие (1) сильнее, чем 2-перестановочность, и слабее, чем 1-перестановочность. Более того, равенство (2) показывает, что (1) – это, вероятно, единственное естественное ограничение на конгруэнции, расположенное «посередине» между 1-перестановочностью и 2-перестановочностью. Поэтому мы будем называть конгруэнции α и β со свойством (1) 1.5-*перестановочными.*

Многообразия полугрупп, на всех свободных объектах которых любые две вполне инвариантные конгруэнции [содержащиеся в наименьшей полурешеточной конгруэнции] 1.5-перестановочны, назовем [*почти*] fi-1.5-*перестановочными.* Многообразия, все подмногообразия которых почти fi-1.5-перестановочны, будем называть *наследственно почти* fi-1.5-*перестановочными.* Описание fi-1.5-перестановочных многообразий полугрупп получено в работе [8]. В данной работе описаны почти fi-1.5-перестановочные и наследственно почти fi-1.5-перестановочные многообразия полугрупп.

Приведем некоторые определения и обозначения, необходимые для формулировки основных результатов работы. Напомним, что многообразие полугрупп называется *цепным*, если решетка его подмногообразий является цепью. Отметим, что всякое цепное многообразие групп является периодическим и потому может рассматриваться как многообразие полугрупп. Через $L(\mathcal{V})$ обозначается решетка подмногообразий многообразия $\mathcal{V}$, а через $\operatorname{var}\Sigma$ – многообразие полугрупп, заданное системой тождеств Σ. Введем обозначения для ряда конкретных многообразий полугрупп:

$$\begin{aligned}
&\mathcal{T} = \operatorname{var}\{x = y\};\ \ \mathcal{A}_p = \operatorname{var}\{x^p y = y,\, xy = yx\},\ \text{где } p \text{ – простое число;}\\
&\mathcal{SL} = \operatorname{var}\{x^2 = x,\, xy = yx\};\ \ \mathcal{C} = \operatorname{var}\{x^2 = x^3,\, xy = yx\};\\
&\mathcal{LZ} = \operatorname{var}\{xy = x\};\ \ \mathcal{RZ} = \operatorname{var}\{xy = y\};\ \ \mathcal{ZM} = \operatorname{var}\{xy = 0\};\\
&\mathcal{LRB} = \operatorname{var}\{x^2 = x,\, xyx = xy\};\ \ \mathcal{RRB} = \operatorname{var}\{x^2 = x,\, xyx = yx\};\\
&\mathcal{LZM} = \operatorname{var}\{xyz = xy\};\ \ \mathcal{RZM} = \operatorname{var}\{xyz = yz\};\\
&\mathcal{P} = \operatorname{var}\{xy = x^2 y,\, x^2y^2 = y^2x^2\};\ \ \overleftarrow{\mathcal{P}} = \operatorname{var}\{xy = xy^2,\, x^2y^2 = y^2x^2\}.
\end{aligned}$$

В дальнейшем мы будем без специальных оговорок использовать тот общеизвестный факт, что многообразия $\mathcal{A}_p$, $\mathcal{LZ}$, $\mathcal{RZ}$, $\mathcal{SL}$, $\mathcal{ZM}$ и только они являются атомами решетки всех многообразий полугрупп (см., например, [9]).

Основными результатами работы являются следующие две теоремы.

Теорема 1. *Многообразие полугрупп $\mathcal{V}$ почти fi-1.5-перестановочно тогда и только тогда, когда выполнено одно из следующих условий:*

1) *$\mathcal{V} = \mathcal{G} \vee \mathcal{F}$, где $\mathcal{G}$ – цепное многообразие групп, а $\mathcal{F}$ – одно из многообразий $\mathcal{SL}$ и $\mathcal{T}$;*

2) *$\mathcal{V}$ совпадает с одним из многообразий $\mathcal{LZ}$ и $\mathcal{RZ}$;*

3) $\mathcal{V}$ *содержит* $\mathcal{SL}$ *и содержится в одном из многообразий* $\mathcal{LRB} \vee \mathcal{ZM}$, $\mathcal{RRB} \vee \mathcal{ZM}$, $\mathcal{LZM} \vee \mathcal{SL}$ *и* $\mathcal{RZM} \vee \mathcal{SL}$;
4) $\mathcal{V}$ *совпадает с одним из многообразий* $\mathcal{P}$ *и* $\overleftarrow{\mathcal{P}}$;
5) $\mathcal{V}$ *удовлетворяет одной из следующих систем тождеств:*

$$xyz = 0; \tag{3}$$
$$x_1x_2x_3 = x_{1\pi}x_{2\pi}x_{3\pi},\ x^2 = 0,\ \text{где } \pi \in \{(12),(23),(123)\}; \tag{4}$$
$$xyz = zyx,\ x^2 = 0,\ xyx = 0; \tag{5}$$
$$xyz = zyx,\ x^2 = 0,\ xyzt = 0; \tag{6}$$

6) $\mathcal{V} = \mathcal{SL} \vee \mathcal{M}$, *где* $\mathcal{M}$ *удовлетворяет одной из следующих систем тождеств:*

$$x_1x_2x_3 = x_{1\pi}x_{2\pi}x_{3\pi},\ x^2y = 0,\ \text{где } \pi \in \{(12),(13),(23)\};$$
$$x_1x_2x_3 = x_{1\pi}x_{2\pi}x_{3\pi},\ xy^2 = 0,\ \text{где } \pi \in \{(12),(23)\};$$
$$x_1x_2x_3 = x_{1\pi}x_{2\pi}x_{3\pi},\ x^2y = xy^2,\ x^2yz = 0,\ \text{где } \pi \in \{(12),(23)\};$$
$$x_1x_2x_3 = x_{1\pi}x_{2\pi}x_{3\pi},\ x^2y = yx^2,\ x^3y = 0,\ \text{где } \pi \in \{(12),(23)\};$$
$$x_1x_2x_3 = x_{1\pi}x_{2\pi}x_{3\pi},\ x^2y = yx^2,\ x^2y^2 = 0,\ \text{где } \pi \in \{(12),(23)\};$$
$$x_1x_2x_3=x_{1\pi}x_{2\pi}x_{3\pi}, x^2y=yx^2, x^3y=x^2y^2, x^2y^2z=0,\ \text{где } \pi \in \{(12),(23)\};$$
$$xyz = zyx,\ xyx = 0;$$
$$xyz = zyx,\ x^2y = yxy,\ x^2yz = 0;$$
$$xyz = zyx,\ x^2y = xyx,\ x^3y = 0;$$
$$xyz = zyx,\ x^2y = xyx,\ x^2y^2 = 0;$$
$$xyz = zyx,\ x^2y = xyx,\ x^3y = x^2y^2,\ x^2y^2z = 0;$$
$$xyz = yzx,\ x^3y = 0;$$
$$xyz = yzx,\ x^2y^2 = 0;$$
$$xyz = yzx,\ x^3y = x^2y^2,\ x^2y^2z = 0;$$

7) $\mathcal{V} = \mathcal{C} \vee \mathcal{N}$, *где* $\mathcal{N}$ *удовлетворяет тождествам* $x^2y = xyx = yx^2 = 0$ *и тождеству вида* $x_1x_2x_3 = x_{1\pi}x_{2\pi}x_{3\pi}$ *для некоторой нетривиальной перестановки* π.

Теорема 2. *Многообразие полугрупп* $\mathcal{V}$ *наследственно почти* fi*-1.5-перестановочно тогда и только тогда, когда выполнено одно из следующих условий:*

1) $\mathcal{V} = \mathcal{G} \vee \mathcal{F}$, *где* $\mathcal{G}$ *– цепное многообразие групп, а* $\mathcal{F}$ *– одно из многообразий* $\mathcal{SL}$ *и* $\mathcal{T}$;

2) $\mathcal{V}$ *содержится в одном из многообразий* $\mathcal{LRB}$ *и* $\mathcal{RRB}$*;*

3) $\mathcal{V}$ *совпадает с одним из многообразий* $\mathcal{P}$ *и* $\overleftarrow{\mathcal{P}}$*;*

4) $\mathcal{V} = \mathcal{F} \vee \mathcal{M}$*, где* $\mathcal{F}$ *– одно из многообразий* $\mathcal{SL}$ *и* $\mathcal{T}$*, а* $\mathcal{M}$ *удовлетворяет одной из систем тождеств* (3)–(6)*;*

5) $\mathcal{V} = \mathcal{C} \vee \mathcal{N}$*, где* $\mathcal{N}$ *удовлетворяет одной из систем тождеств* (4) *и* (5).

Теоремы 1 и 2 описывают соответствующие классы многообразий полугрупп по модулю цепных многообразий групп (то же самое относится и к описанию fi-1.5-перестановочных многообразий полугрупп, полученному в [8]). В этой связи отметим, что описание локально конечных цепных многообразий групп непосредственно вытекает из результатов работы В. А. Артамонова [10]. В то же время задача описания произвольных цепных многообразий групп является, по-видимому, чрезвычайно сложной, так как из результатов С. В. Иванова [11] вытекает, что для всякого простого $p > 10^{216}$ существует континуум не локально конечных многообразий групп экспоненты p, решетка подмногообразий которых есть 3-элементная цепь.

Доказательство теоремы 1. Необходимость. Пусть $\mathcal{V}$ – почти fi-1.5-перестановочное многообразие полугрупп. Ясно, что $\mathcal{V}$ почти fi-перестановочно. В работе [7] показано, что всякое почти fi-перестановочное многообразие либо вполне регулярно, либо содержит $\mathcal{SL}$ и удовлетворяет тождеству

$$xy = (xy)^2, \tag{7}$$

либо удовлетворяет одному из условий 4–7 теоремы 1. Дальнейшие рассмотрения распадаются на два случая.

Случай 1: $\mathcal{V}$ *вполне регулярно.* Предположим сначала, что $\mathcal{V} \not\supseteq \mathcal{SL}$. Тогда наименьшая полурешеточная конгруэнция на всякой полугруппе из $\mathcal{V}$ совпадает с универсальным отношением. Следовательно, $\mathcal{V}$ fi-1.5-перестановочно. В работе [8] доказано, что всякое fi-1.5-перестановочное вполне регулярное многообразие полугрупп, не содержащее $\mathcal{SL}$, либо является цепным многообразием групп, либо совпадает с одним из многообразий $\mathcal{LZ}$ и $\mathcal{RZ}$. Следовательно, в рассматриваемом случае $\mathcal{V}$ удовлетворяет одному из условий 1 или 2 теоремы 1. Поэтому далее можно считать, что $\mathcal{V} \supseteq \mathcal{SL}$.

Обозначим через F абсолютно свободную полугруппу счетного ранга. Нам понадобится следующая лемма, легко проверяемая непосредственно.

Лемма 1. *Пусть* $\mathcal{V}$ *– многообразие полугрупп такое, что* $\mathcal{V} \supseteq \mathcal{SL}$*, а* ν *и* σ *– вполне инвариантные конгруэнции на полугруппе* F*, отвечающие многообразиям* $\mathcal{V}$ *и* $\mathcal{SL}$ *соответственно. Многообразие* $\mathcal{V}$ *почти* fi-1.5*-перестановочно тогда и только тогда, когда любые две вполне инвариантные конгруэнции на* F*, содержащие* ν *и содержащиеся в* σ*,* 1.5*-перестановочны.*

Дальнейшие рассмотрения удобно разбить на два подслучая.

Подслучай 1.1: *$\mathcal{V}$ – многообразие связок.* Нам понадобится следующая

Лемма 2. *Если $\mathcal{V}$ – почти fi-1.5-перестановочное многообразие полугрупп и $\mathcal{V} \supseteq \mathcal{SL}$, то либо $\mathcal{LZ}$, либо $\mathcal{RZ}$ не содержится в $\mathcal{V}$.*

Доказательство. Пусть, напротив, $\mathcal{LZ}, \mathcal{RZ} \subseteq \mathcal{V}$. Обозначим через λ и ρ вполне инвариантные конгруэнции на полугруппе F, отвечающие многообразиям $\mathcal{LZ} \vee \mathcal{SL}$ и $\mathcal{RZ} \vee \mathcal{SL}$ соответственно. Тогда $(xyz, zxy) \in \lambda\rho$, так как $xyz \,\lambda\, xzy \,\rho\, zxy$, но $(xyz, zxy) \notin \lambda \cup \rho$, поскольку ни одно из многообразий $\mathcal{LZ} \vee \mathcal{SL}$ и $\mathcal{RZ} \vee \mathcal{SL}$ не удовлетворяет тождеству $xyz = zxy$. Таким образом, конгруэнции λ и ρ не являются 1.5-перестановочными. В силу леммы 1 это противоречит тому, что многообразие $\mathcal{V}$ почти fi-1.5-перестановочно. Лемма доказана.

Итак, $\mathcal{V}$ – многообразие связок, не содержащее по крайней мере одного из многообразий $\mathcal{LZ}$ и $\mathcal{RZ}$. Это означает, что $\mathcal{V}$ содержится в одном из многообразий $\mathcal{LRB}$ и $\mathcal{RRB}$ (см., например, [9]). Поскольку, кроме того, $\mathcal{V} \supseteq \mathcal{SL}$, мы получаем, что выполнено условие 3 теоремы 1.

Подслучай 1.2: *$\mathcal{V}$ не является многообразием связок.* Поскольку $\mathcal{V}$ вполне регулярно и не является многообразием связок, $\mathcal{V} \supseteq \mathcal{A}_p$ для некоторого простого p. Покажем, что $\mathcal{V}$ не содержит ни одного из многообразий $\mathcal{LZ}$ и $\mathcal{RZ}$. По соображениям симметрии достаточно убедиться в том, что $\mathcal{V} \not\supseteq \mathcal{LZ}$. Предположим противное. Обозначим через α и λ вполне инвариантные конгруэнции на полугруппе F, отвечающие многообразиям $\mathcal{A}_p \vee \mathcal{SL}$ и $\mathcal{LZ} \vee \mathcal{SL}$ соответственно. Тогда $(x^{p+1}y, y^2x) \in \alpha\lambda$, так как $x^{p+1}y \,\alpha\, yx \,\lambda\, y^2x$, но $(x^{p+1}y, y^2x) \notin \alpha \cup \lambda$, поскольку ни одно из многообразий $\mathcal{A}_p \vee \mathcal{SL}$ и $\mathcal{LZ} \vee \mathcal{SL}$ не удовлетворяет тождеству $x^{p+1}y = y^2x$. Таким образом, конгруэнции α и λ не являются 1.5-перестановочными. В силу леммы 1 это противоречит тому, что многообразие $\mathcal{V}$ почти fi-1.5-перестановочно.

Итак, $\mathcal{V}$ – вполне регулярное многообразие, не содержащее многообразий $\mathcal{LZ}$ и $\mathcal{RZ}$. Как хорошо известно, это означает, что $\mathcal{V} = \mathcal{G} \vee \mathcal{F}$, где $\mathcal{G}$ – некоторое многообразие периодических групп, а $\mathcal{F}$ – одно из многообразий $\mathcal{SL}$ и $\mathcal{T}$ (см., например, [12,13]). Осталось проверить, что $\mathcal{G}$ – цепное многообразие (так как в этом случае $\mathcal{V}$ удовлетворяет условию 1 доказываемой теоремы).

Нам понадобится следующий хорошо известный факт (легко вытекающий, например, из результатов работы [14]).

Лемма 3. *Если $\mathcal{K}$ – многообразие полугрупп и $\mathcal{K} \not\supseteq \mathcal{SL}$, то $L(\mathcal{K} \vee \mathcal{SL}) \cong$ $\cong L(\mathcal{K}) \times L(\mathcal{SL})$.*

Предположим, что $\mathcal{G}$ содержит многообразия $\mathcal{X}$ и $\mathcal{Y}$, несравнимые в решетке $L(\mathcal{G})$. Обозначим через χ и η вполне инвариантные конгруэнции на полугруппе F, отвечающие многообразиям $\mathcal{X} \vee \mathcal{SL}$ и $\mathcal{Y} \vee \mathcal{SL}$ соответственно. Из леммы 3 вытекает, что эти многообразия несравнимы в решетке $L(\mathcal{V})$. Учитывая этот факт и повторяя дословно доказательство леммы 3 работы [8], можно убедиться в том, что конгруэнции χ и η не являются 1.5-перестановочными. Но это противоречит лемме 1.

Случай 2: *$\mathcal{V}$ содержит $\mathcal{SL}$ и удовлетворяет тождеству* (7). Проверим, что в этом случае $\mathcal{V}$ удовлетворяет условию 3 доказываемой теоремы. Выполнение в $\mathcal{V}$ тождества (7) означает, что квадрат всякой полугруппы из $\mathcal{V}$ является связкой. В силу леммы 2 $\mathcal{V}$ не может содержать одновременно многообразий $\mathcal{LZ}$ и $\mathcal{RZ}$. Это означает, что всякая связка из $\mathcal{V}$, а значит и квадрат всякой полугруппы из $\mathcal{V}$, содержится в одном из многообразий $\mathcal{LRB}$ и $\mathcal{RRB}$ (см., например, [9]). В силу симметрии достаточно предположить, что квадрат всякой полугруппы из $\mathcal{V}$ лежит в $\mathcal{LRB}$, и доказать, что в этом случае $\mathcal{V}$ содержится в одном из многообразий $\mathcal{LRB} \vee \mathcal{ZM}$ и $\mathcal{LZM} \vee \mathcal{SL}$. Обозначим многообразие всех полугрупп, квадрат которых принадлежит $\mathcal{LRB}$, через $\mathcal{SLRB}$. Из результатов работы [15] легко извлекается, что диаграмма решетки $L(\mathcal{SLRB})$ имеет следующий вид:

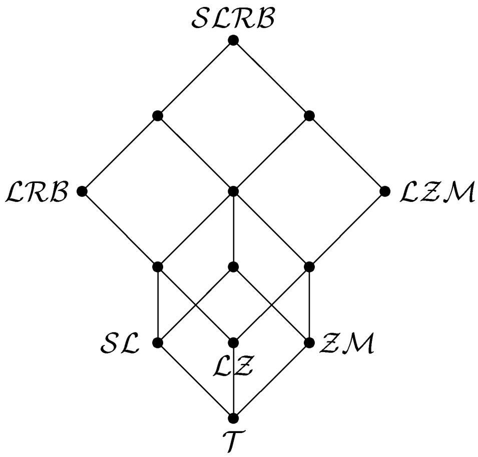

Рис. 1. Решетка $L(\mathcal{SLRB})$

Из рис. 1 видно, что для наших целей достаточно доказать, что $\mathcal{V}$ не может содержать одновременно многообразий $\mathcal{LRB}$ и $\mathcal{LZM}$. Предположим противное. Обозначим через λ и ζ вполне инвариантные конгруэнции на полугруппе F, отвечающие многообразиям $\mathcal{LRB}$ и $\mathcal{LZM} \vee \mathcal{SL}$ соответственно.

В силу леммы 1 конгруэнции λ и ζ 1.5-перестановочны. Из рис. 1 видно, что $\mathcal{LRB} \wedge (\mathcal{LZM} \vee \mathcal{SL}) = \mathcal{LZ} \vee \mathcal{SL}$. Поскольку в $\mathcal{LZ} \vee \mathcal{SL}$ выполнено тождество $xyz = xzy$, мы получаем, что $(xyz, xzy) \in \lambda \vee \zeta = \lambda \cup \zeta$. Но это неверно, поскольку ни в одном из многообразий $\mathcal{LRB}$ и $\mathcal{LZM} \vee \mathcal{SL}$ тождество $xyz = xzy$ не выполнено. Полученное противоречие завершает доказательство необходимости.

Достаточность. Здесь и при доказательстве достаточности в теореме 2 нам понадобится следующая

Лемма 4. *Пусть $\mathcal{V}$ – многообразие полугрупп такое, что выполнено одно из следующих условий:*

а) *$\mathcal{V}$ – цепное многообразие;*

б) *$\mathcal{V} \supseteq \mathcal{SL}$, интервал $[\mathcal{SL}, \mathcal{V}]$ решетки $L(\mathcal{V})$ является цепью и всякое подмногообразие многообразия $\mathcal{V}$, не содержащее $\mathcal{SL}$, является цепным.*

Тогда $\mathcal{V}$ наследственно почти fi-1.5-перестановочно.

Доказательство. Пусть S – полугруппа, свободная в некотором подмногообразии многообразия $\mathcal{V}$. Из условия вытекает, что вполне инвариантные конгруэнции на S, содержащиеся в наименьшей полурешеточной конгруэнции, образуют цепь по включению и потому 1.5-перестановочны. Лемма доказана.

Следующее утверждение влечет требуемый нам факт в случае, когда $\mathcal{V}$ удовлетворяет условию 1 теоремы 1.

Следствие 1. *Если $\mathcal{V} = \mathcal{G} \vee \mathcal{F}$, где $\mathcal{G}$ – цепное многообразие групп, а $\mathcal{F}$ – одно из многообразий $\mathcal{SL}$ и $\mathcal{T}$, то $\mathcal{V}$ наследственно почти fi-1.5-перестановочно.*

Доказательство. Если по крайней мере одно из многообразий $\mathcal{G}$ и $\mathcal{F}$ тривиально, то $\mathcal{V}$ является цепным многообразием. Если же $\mathcal{G}, \mathcal{F} \neq \mathcal{T}$, то, учитывая лемму 3 и тот факт, что решетка $L(\mathcal{SL})$ является 2-элементной цепью, получаем, что $\mathcal{V}$ удовлетворяет условию «б» леммы 4. В любом случае из этой леммы вытекает, что $\mathcal{V}$ наследственно почти fi-1.5-перестановочно. Следствие доказано.

Поскольку многообразия $\mathcal{LZ}$ и $\mathcal{RZ}$ являются цепными, из леммы 4 непосредственно вытекает, что если $\mathcal{V}$ удовлетворяет условию 2 теоремы 1, то оно почти fi-1.5-перестановочно.

Предположим теперь, что $\mathcal{V}$ удовлетворяет условию 3 теоремы 1. По соображениям симметрии можно считать, что $\mathcal{V}$ содержит $\mathcal{SL}$ и содержится в одном из многообразий $\mathcal{LRB} \vee \mathcal{ZM}$ и $\mathcal{LZM} \vee \mathcal{SL}$. Обозначим через ν и σ вполне инвариантные конгруэнции на полугруппе F, отвечающие многообразиям $\mathcal{V}$ и $\mathcal{SL}$ соответственно. В силу леммы 1 достаточно показать, что любые две вполне инвариантные конгруэнции на F, содержащие ν и содержащиеся в σ, 1.5-перестановочны. Пусть α и β – две такие конгруэнции. Ясно, что можно считать, что α и β несравнимы в решетке вполне инвариантных конгруэнций на F. Рисунок 1 показывает, что достаточно рассмотреть следующие два случая:

а) α отвечает одному из многообразий $\mathcal{LRB}$ и $\mathcal{LZ} \vee \mathcal{SL}$, а β – многообразию $\mathcal{ZM} \vee \mathcal{SL}$;

б) α отвечает многообразию $\mathcal{LRB}$, а β – многообразию $\mathcal{ZM} \vee \mathcal{LZ} \vee \mathcal{SL}$.
Через $\equiv$ будем обозначать отношение равенства на полугруппе F. Для всякого слова $u \in F$ обозначим через $c(u)$ множество всех букв, входящих в запись u, через $\ell(u)$ – длину слова u, а через $h(u)$ – первую букву в записи слова u. Хорошо известно и легко проверяется, что тождество $u = v$ выполнено:

в многообразии $\mathcal{SL}$ тогда и только тогда, когда $c(u) = c(v)$;

в многообразии $\mathcal{LZ}$ тогда и только тогда, когда $h(u) \equiv h(v)$;

в многообразии $\mathcal{ZM}$ тогда и только тогда, когда либо u и v – одна и та же буква, либо $\ell(u), \ell(v) \geqslant 2$.

Пусть $u, v \in F$ и $(u, v) \in \alpha\beta$, т. е. $u \, \alpha \, w \, \beta \, v$ для некоторого слова $w \in F$. Достаточно убедиться в том, что $(u, v) \in \alpha \cup \beta$. Ясно, что тождество $w = v$ выполнено в многообразии $\mathcal{ZM}$. Если w и v – одна и та же буква, то $u \, \alpha \, v$. Поэтому ниже можно считать, что $\ell(v) \geqslant 2$. Далее, $u = w = v$ в многообразии $\mathcal{SL}$ и потому $c(u) = c(w) = c(v)$. Если $\ell(u) = 1$, т. е. $u \equiv x$ для некоторой буквы x, то $v \equiv x^k$ для некоторого натурального k. Но тогда $u \, \alpha \, v$. Поэтому можно считать, что и $\ell(u) \geqslant 2$. Если β отвечает многообразию $\mathcal{ZM} \vee \mathcal{SL}$, то $u \, \beta \, v$. Поэтому можно считать, что α отвечает многообразию $\mathcal{LRB}$, а β – многообразию $\mathcal{ZM} \vee \mathcal{LZ} \vee \mathcal{SL}$. В частности, это означает, что $u = w = v$ в многообразии $\mathcal{LZ}$, и потому $h(u) \equiv h(w) \equiv h(v)$. Мы видим, что $\ell(u), \ell(v) \geqslant 2$, $h(u) \equiv h(v)$ и $c(u) = c(v)$. Это означает, что $u \, \beta \, v$.

Наконец, почти fi-1.5-перестановочность многообразий, удовлетворяющих условиям 4–7 теоремы 1, доказана в [7].

Теорема 1 доказана.

Доказательство теоремы 2. Необходимость. Пусть $\mathcal{V}$ – наследственно почти fi-1.5-перестановочное многообразие полугрупп. Ясно, что $\mathcal{V}$ наследственно почти fi-перестановочно. В силу теоремы 2 работы [6] всякое наследственно почти fi-перестановочное многообразие либо вполне регулярно, либо удовлетворяет одному из условий 3–5 теоремы 2. Поэтому далее можно считать, что $\mathcal{V}$ вполне регулярно. Ясно, что $\mathcal{V}$ почти fi-1.5-перестановочно и потому удовлетворяет одному из условий 1–7 теоремы 1. Условие 1 этой теоремы совпадает с условием 1 теоремы 2. Если выполнено условие 2 теоремы 1, то очевидно, что $\mathcal{V}$ удовлетворяет и условию 2 теоремы 2. Если $\mathcal{V}$ удовлетворяет условию 3 теоремы 1, то, будучи вполне регулярным, оно содержится в одном из многообразий $\mathcal{LRB}$ и $\mathcal{RRB}$ (см. рис. 1) и потому вновь удовлетворяет условию 2 теоремы 2. Случай, когда $\mathcal{V}$ удовлетворяет одному из условий 4 или 7 теоремы 1, невозможен, так как многообразия $\mathcal{P}$, $\overleftarrow{\mathcal{P}}$ и $\mathcal{C}$ не являются вполне регулярными. Если $\mathcal{V}$ удовлетворяет условию 5 теоремы 1, то оно является нильмногообразием. Поскольку, кроме того, $\mathcal{V}$ вполне регулярно, мы получаем, что $\mathcal{V} = \mathcal{T}$ и выполнено, например, условие 2 теоремы 2. Наконец, если $\mathcal{V}$ удовлетворяет условию 6 теоремы 1, то оно является объединением многообразия $\mathcal{SL}$ и некоторого нильмногообразия $\mathcal{M}$. Поскольку $\mathcal{V}$ вполне регулярно, это означает, что $\mathcal{M} = \mathcal{T}$ и $\mathcal{V} = \mathcal{SL}$. Таким образом, вновь выполнено условие 2 теоремы 2. Необходимость доказана.

Достаточность. Если $\mathcal{V}$ удовлетворяет условию 1 теоремы 2, то достаточно сослаться на следствие 1. Если выполнено условие 2 доказываемой теоремы, то, как видно из рис. 1, $\mathcal{V}$ удовлетворяет условию «б» леммы 4 и потому наследственно почти fi-1.5-перестановочно. Если же выполнено одно из условий 3–5 теоремы 2, то наследственная почти fi-1.5-перестановочность многообразия $\mathcal{V}$ доказана в [6]. (Отметим, что для условия 3 ссылку на [6] можно заменить ссылкой на лемму 4, поскольку, как легко понять, многообразия $\mathcal{P}$ и $\overleftarrow{\mathcal{P}}$ удовлетворяют условию «б» этой леммы.)

Теорема 2 доказана.

Из доказательства необходимости в теореме 2 видно, что если вполне регулярное многообразие полугрупп почти fi-1.5-перестановочно, то оно удовлетворяет одному из условий 1 и 2 теоремы 2. Поэтому справедливо

Следствие 2. *Вполне регулярное многообразие полугрупп почти fi-1.5-перестановочно тогда и только тогда, когда оно наследственно почти fi-1.5-перестановочно.*

Если $\mathcal{X}$ и $\mathcal{Y}$ – два многообразия полугрупп такие, что $\mathcal{X} \subseteq \mathcal{Y}$, то, как обычно, будем обозначать через $[\mathcal{X}, \mathcal{Y}]$ интервал решетки всех многообразий полугрупп с наименьшим элементом $\mathcal{X}$ и наибольшим элементом $\mathcal{Y}$. Положим $\mathcal{SB} = \mathrm{var}\,\{xy = (xy)^2\}$. Первое из следующих двух утверждений вытекает из теоремы 1 данной работы и основного результата работы [7], а второе – из теоремы 2 данной работы и теоремы 2 работы [6].

Следствие 3. *Многообразие полугрупп, не являющееся вполне регулярным и не принадлежащее интервалу $[\mathcal{SL}, \mathcal{SB}]$, почти fi-перестановочно тогда и только тогда, когда оно почти fi-1.5-перестановочно.*

Следствие 4. *Многообразие полугрупп, не являющееся вполне регулярным, наследственно почти fi-перестановочно тогда и только тогда, когда оно наследственно почти fi-1.5-перестановочно.*

Отметим, что в действительности следствия 3 и 4 вытекают из доказательств основного результата работы [7] и теоремы 2 работы [6] соответственно, но в явном виде они в этих работах не отмечались.

В работе [8] показано, в частности, что вполне регулярное многообразие полугрупп fi-1.5-перестановочно тогда и только тогда, когда оно является цепным многообразием. Теорема 1 показывает, что для почти fi-1.5-перестановочных многообразий это неверно. Но некоторый ослабленный вариант этого утверждения имеет место. Чтобы сформулировать его, напомним одно определение. Говорят, что решетка имеет *d-ширину n*, если она содержит n попарно несравнимых элементов, причем n – наибольшее число с таким свойством. Ясно, что цепные многообразия – это в точности многообразия, решетка подмногообразий которых имеет d-ширину 1.

Следствие 5. *Если $\mathcal{V}$ – вполне регулярное почти fi-1.5-перестановочное многообразие полугрупп, то решетка $L(\mathcal{V})$ имеет d-ширину $\leqslant 2$.*

Доказательство. Из доказательства необходимости в теореме 2 видно, что $\mathcal{V}$ либо совпадает с многообразием вида $\mathcal{G} \vee \mathcal{F}$, где $\mathcal{G}$ – цепное многообразие групп, а $\mathcal{F}$ – одно из многообразий $\mathcal{SL}$ и $\mathcal{T}$, либо содержится в одном из многообразий $\mathcal{LRB}$ и $\mathcal{RRB}$. В первом случае остается сослаться на лемму 3, а во втором – на рис. 1 и тот факт, что решетки $L(\mathcal{LRB})$ и $L(\mathcal{RRB})$ изоморфны. Следствие доказано.

Напомним, что многообразие полугрупп называется *многообразием индекса n*, если все его нильполугруппы нильпотентны ступени $\leqslant n$, причем n – наименьшее число с таким свойством. Очевидно, что вполне регулярные многообразия – это в точности многообразия индекса 1. Отметим, что для многообразий индекса 2 аналоги следствий 2 и 5 места не имеют. В самом деле, легко понять, что многообразие $\mathcal{LRB} \vee \mathcal{ZM}$ имеет индекс 2. В то же время оно почти fi-1.5-перестановочно (в силу теоремы 1), но не является наследственно почти fi-1.5-перестановочным (в силу теоремы 2), а решетка его подмногообразий имеет d-ширину 3 (см. рис. 1).

Литература

1. Tully E. J. The equivalence, for semigroup varieties, of two properties concerning congruence relations // Bull. Amer. Math. Soc. 1964. Vol. 70, № 3. P. 399–400.

2. Jones P. R. Congruence semimodular varieties of semigroups // Lect. Notes Math. 1988. Vol. 1320. P. 162–171.
3. Lipparini P. n-permutable varieties satisfy non trivial congruence identities // Algebra Universalis. 1995. Vol. 33, № 2. P. 159–168.
4. Pastijn F. J. Commuting fully invariant congruences on free completely regular semigroups // Trans. Amer. Math. Soc. 1991. Vol. 323, № 1. P. 79–92.
5. Petrich M., Reilly N. R. The modularity of the lattice of varieties of completely regular semigroups and related representations // Glasgow Math. J. 1990. Vol. 32, № 2. P. 137–152.
6. Vernikov B. M., Volkov M. V. Permutability of fully invariant congruences on relatively free semigroups // Acta Sci. Math. (Szeged). 1997. Vol. 63, № 3–4. P. 437–461.
7. Vernikov B. M., Volkov M. V. Commuting fully invariant congruences on free semigroups // Contrib. General Algebra. 2000. Vol. 12. P. 391–417.
8. Vernikov B. M. Semigroup varieties with 1.5-permutable fully invariant congruences on their free objects // Acta Appl. Math. 2005. Vol. 85, № 1–3. P. 313–318.
9. Evans T. The lattice of semigroup varieties // Semigroup Forum. 1971. Vol. 2, № 1. P. 1–43.
10. Артамонов В. А. Цепные многообразия групп // Тр. семинара им. И. Г. Петровского. 1978. Вып. 3. С. 3–8.
11. Иванов С. В. О нескольких вопросах теории многообразий групп // Междунар. конф. по алгебре, посвящен. памяти А. И. Мальцева: Тез. докл. по теории групп. Новосибирск: Изд-во Ин-та математики СО АН СССР, 1989. С. 49.
12. Hall T. E., Jones P. R. On the lattice of varieties of bands of groups // Pacif. J. Math. 1980. Vol. 91, № 2. P. 327–337.
13. Polák L. On varieties of completely regular semigroups. I // Semigroup Forum. 1985. Vol. 32, № 1. P. 97–123.
14. Мельник И. И. О многообразиях и решетках многообразий полугрупп // Исследования по алгебре. Саратов: Саратов. гос. ун-т, 1970. Вып. 2. С. 47–57.
15. Gerhard J. A. Semigroups with an idempotent power. II. The lattice of equational subclasses of $[(xy)^2 = xy]$ // Semigroup Forum. 1977. Vol. 14, № 4. P. 375–388.

Статья поступила 02.10.2003 г.