УДК 519.14

**И. Н. Белоусов, А. А. Махнев**

# О ПОЧТИ ХОРОШИХ ПАРАХ ВЕРШИН В РЕБЕРНО РЕГУЛЯРНЫХ ГРАФАХ*

## Введение

Мы рассматриваем неориентированные графы без петель и кратных ребер. Если $a, b$ – вершины графа $\Gamma$, то через $d(a, b)$ обозначается расстояние между $a$ и $b$, а через $\Gamma_i(a)$ – подграф графа $\Gamma$, индуцированный множеством вершин, которые находятся в $\Gamma$ на расстоянии $i$ от вершины $a$. Подграф $\Gamma_1(a)$ называется *окрестностью вершины* $a$ и обозначается через $[a]$. Через $a^\perp$ обозначается подграф, являющийся шаром радиуса 1 с центром $a$.

Граф $\Gamma$ называется *регулярным графом степени* $k$, если $[a]$ содержит точно $k$ вершин для любой вершины $a$ из $\Gamma$. Граф $\Gamma$ называется *реберно регулярным графом с параметрами* $(v, k, \lambda)$, если $\Gamma$ содержит $v$ вершин, является регулярным степени $k$ и каждое ребро из $\Gamma$ лежит в $\lambda$ треугольниках. Граф $\Gamma$ называется *вполне регулярным графом с параметрами* $(v, k, \lambda, \mu)$, если $\Gamma$ реберно регулярен с соответствующими параметрами и подграф $[a] \cap [b]$ содержит $\mu$ вершин в случае $d(a, b) = 2$. Вполне регулярный граф диаметра 2 называется *сильно регулярным графом.* Число вершин в $[a]\cap[b]$ обозначим через $\lambda(a, b)$ (соответственно $\mu(a, b)$), если $d(a, b) = 1$ (соответственно $d(a, b) = 2$), а соответствующий подграф назовем $\lambda$-*подграфом* ($\mu$-*подграфом*).

Через $K_{m_1,\dots,m_n}$ обозначим полный $n$-дольный граф с долями порядков $m_1, \dots, m_n$. Если $m_1 = \dots = m_n = m$, то соответствующий граф обозначается через $K_{n\times m}$. Граф $K_{1,m}$ называется $m$-*лапой.*

*Треугольным графом* $T(m)$ называется граф с множеством неупорядоченных пар из $X$ в качестве вершин, $|X| = m$ и пары $\{a, b\}, \{c, d\}$ смежны тогда и только тогда, когда они имеют общий элемент. Граф на множестве вершин $X \times Y$ называется $m \times n$ *решеткой*, если $|X| = m$, $|Y| = n$ и вершины $(x_1, y_1)$, $(x_2, y_2)$ смежны тогда и только тогда, когда $x_1 = x_2$ или $y_1 = y_2$. Сильно регулярные графы с собственным значением $-2$ были классифицированы Зейделем [1, теорема 3.12.4]. Любой граф Зейделя – это либо полный

*Работа выполнена при поддержке РФФИ (грант № 05-01-00046).

многодольный граф $K_{r\times 2}$, либо решетчатый или треугольный граф, либо один из графов Шрикханде, Чанга, Петерсена, Клебша или Шлефли.

Если вершины $u, w$ находятся на расстоянии $i$ в $\Gamma$, то через $b_i(u,w)$ (соответственно $c_i(u,w)$) обозначим число вершин в пересечении $\Gamma_{i+1}(u)\cap[w]$ (соответственно в пересечении $\Gamma_{i-1}(u)\cap[w]$). Заметим, что в реберно регулярном графе с параметрами $(v,k,\lambda)$ значение $b_1(u,w)$ не зависит от выбора ребра $\{u,w\}$ и равно $k-\lambda-1$.

В лемме 1.4.2 из [1] доказано, что если $\Gamma$ – неполный связный реберно регулярный граф с параметрами $(v,k,\lambda)$, в котором $\lambda \geq 2k/3-1$ (что эквивалентно неравенству $k\geq 3b_1$), то $\Gamma$ имеет диаметр 2, $v\leq 2k-2$ и выполняется неравенство

$$kb_1 > (v-k-1)(k+1-2b_1). \qquad (*)$$

В [2] получен аналог этого результата для реберно регулярных графов при $k\geq 3b_1-2$.

Пусть $\Gamma$ – реберно регулярный граф с параметрами $(v,k,\lambda)$. Тогда (см. лемму 1.1) степень вершины в любом $\mu$-подграфе из $\Gamma$ не больше $k-2b_1$. Поэтому для $\mu_*=k-2b_1+1$ и любых вершин $u,w$, находящихся на расстоянии 2, выполняется неравенство $\mu(u,w)\geq\mu_*$. Пару вершин $(u,w)$, находящихся на расстоянии 2, назовем *хорошей* (соответственно *почти хорошей*), если $\mu(u,w)=\mu_*$ (соответственно если $\mu(u,w)=\mu_*+1$). Расположение хороших пар в реберно регулярных графах изучалось в [3, 4]. В данной работе изучается расположение почти хороших пар в реберно регулярных графах с $k\geq 3b_1-3$. Основным результатом работы является следующая

**Теорема.** *Пусть $\Gamma$ – связный реберно регулярный граф с параметрами $(v,k,\lambda)$ и $b_1=k-\lambda-1$. Если $u\in\Gamma$, $w,z$ – две несмежные вершины из $\Gamma_2(u)$ и $\mu(u,w)=\mu(u,z)=k-2b_1+2$, то для величины $\gamma=|[u]\cap[w]\cap[z]|$ выполняются следующие утверждения:*

(1) $k\leq b_1(3-(2\gamma-6)/(\gamma^2-3\gamma+2))+\gamma-6$*, причем здесь в случае равенства имеет место $\mu(w,z)=2b_1-2+\gamma$ и каждая вершина из $([u]-[w]\cup[z])\cup$ $\cup([w]\cap[z])-[u])$ смежна с одной или с двумя вершинами из $[u]\cap[w]\cap[z]$;*

(2) $k\leq 2b_1+\gamma-6+4b_1/(\gamma+1)$*, причем в случае равенства имеет место $\mu(w,z)=2b_1-2+\gamma$ и каждая вершина из $([u]-[w]\cup[z])\cup([w]\cap[z])-[u])$ смежна с $(\gamma-1)/2$ вершинами из $[u]\cap[w]\cap[z]$;*

(3) *если $\gamma>1$, то $k\leq 3b_1-4$, причем в случае $k=3b_1-4$ получим $\gamma=2$.*

Хорошо известно, что если любая пара вершин связного реберно регулярного графа, находящихся на расстоянии 2, является хорошей, то граф оказывается пятиугольником или графом икосаэдра. С помощью сформулированной выше теоремы получено описание связных реберно регулярных графов, в которых любая пара вершин, находящихся на расстоянии 2, является почти хорошей.

**Следствие.** *Пусть* $\Gamma$ *– вполне регулярный граф с параметрами* $(v, k, \lambda, \mu)$ *и* $\mu = k - 2b_1 + 2$. *Тогда* $\Gamma$ *– либо граф Зейделя, либо тривалентный граф без треугольников диаметра, большего* 2*, для которого* $\mu = 1$.

## 1. Вспомогательные результаты

**Лемма 1.1.** *Пусть* $\Gamma$ *– реберно регулярный граф с параметрами* $(v, k, \lambda)$ *и* $b_1 = k - \lambda - 1$. *Если вершины* $u, w$ *находятся на расстоянии* 2 *в* $\Gamma$*, то:*

(1) *степень любой вершины в* $\mu$*-подграфе из* $\Gamma$ *не меньше* $k - 2b_1$*;*

(2) *вершина* $d$ *имеет степень* $\alpha$ *в графе* $[u] \cap [w]$ *тогда и только тогда, когда* $[d]$ *содержит* $\alpha - (k - 2b_1)$ *вершин вне* $u^{\perp} \cup w^{\perp}$*;*

(3) *если* $\mu(u, w) = \mu_*$*, то подграф* $[u] \cap [w]$ *является кликой и* $[d] \subset u^{\perp} \cup w^{\perp}$ *для любой вершины* $d \in [u] \cap [w]$*;*

(4) *если* $\Gamma - (u^{\perp} \cup w^{\perp})$ *содержит единственную вершину* $z$*, то* $\mu(u, z) = \mu(w, z)$.

**Доказательство.** Пусть $d \in [u] \cap [w]$. Тогда $|[d] - [u]| = |[d] - [w]| = b_1$. Поэтому по крайней мере $k - 2b_1$ вершин из $[d]$ содержится в $[u] \cap [w]$. Утверждение (1) доказано.

Пусть $d \in [u] \cap [w]$ и степень вершины $d$ в этом $\mu$-подграфе равна $\alpha$. Тогда $k = \alpha + 2b_1 - |[d] - (u^{\perp} \cup w^{\perp})|$. Поэтому $[d]$ содержит $\alpha - (k - 2b_1)$ вершин вне $u^{\perp} \cup w^{\perp}$. Обратно, если $[d]$ содержит $\alpha - (k - 2b_1)$ вершин вне $u^{\perp} \cup w^{\perp}$, то $[d]$ содержит $2k - 2b_1 - 2 - \alpha$ вершин из $[u] \cup [w]$. Напомним, что $|[u] \cap [d]| = |[d] \cap [w]| = k - b_1 - 1$, поэтому $[d]$ содержит $\alpha$ вершин из $[u] \cap [w]$. Утверждение (2) доказано.

Утверждение (3) следует из (1), (2).

Пусть $\{z\} = \Gamma - (u^{\perp} \cup w^{\perp})$. Так как число ребер между $[u] - [w]$ и $[w] - [u]$ равно $b_1|[u] - [w]| - \mu(u, z)$, то $\mu(u, z) = \mu(w, z)$. Лемма доказана.

Из леммы 1.1 следует, что если любая пара вершин, находящихся на расстоянии 2 в связном реберно регулярном графе $\Gamma$, является хорошей, то $\Gamma$ оказывается графом Тервиллигера без 3-лап и по теореме 1.2.3 из [1] $\Gamma$ – многоугольник или граф икосаэдра.

**Лемма 1.2.** ([1, лемма 1.4.2]) *Пусть* $\Gamma$ *– реберно регулярный граф с параметрами* $(v, k, \lambda)$. *Если* $\Gamma$ *– не полный граф и* $\lambda \geq 2k/3 - 1$ *(что эквивалентно*

*$k \geq 3b_1$), то $\Gamma$ имеет диаметр 2, $v \leq 2k-2$ и выполняется неравенство $kb_1 > (v-k-1)(k+1-2b_1)$.*

**Лемма 1.3.** *Пусть $\Gamma$ – связный реберно регулярный граф с параметрами $(v,k,\lambda)$. Если $\lambda \geq k+1/2-\sqrt{2k+2}$, то $\Gamma$ – дополнительный граф для сильно регулярного графа $\Delta$ с $\mu(\Delta) \leq 2$.*

Это второе утверждение теоремы 1.4.3 из [1].

**Лемма 1.4.** *Пусть $\Gamma$ – реберно регулярный граф и $\mu(u,w) = \mu(u,z) = \mu_*$ для смежных вершин $w,z$ из $\Gamma_2(u)$. Тогда $|[u]\cap[w]\cap[z]| < 2$.*

**Доказательство.** Пусть $\gamma = |[u]\cap[w]\cap[z]|$ и $p,q$ – различные вершины из $[u]\cap[w]\cap[z]$. Тогда $[p]$ содержит $b_1-2$ вершин из $([z]\cap[w])-[u]$, причем $|([z]\cap[w])-[u]| = \lambda-\gamma$. Отсюда $[p]\cap[q]$ содержит $u,w,z$, $\gamma-2$ вершин из $[u]\cap[w]\cap[z]$, по $\mu_*-\gamma$ вершин из $([u]\cap[w])-[z]$ и из $([u]\cap[z])-[w]$ и не менее $2(b_1-2)-(\lambda-\gamma)$ вершин из $([z]\cap[w])-[u]$. Поэтому

$$|[p]\cap[q]| \geq 3+(\gamma-2)+2(\mu_*-\gamma)+(2b_1-4-\lambda+\gamma),$$

т. е. $2\mu_*-3+2b_1 \leq 2\lambda$. Противоречие с тем, что $\mu_* = \lambda+2-b_1$. Значит, $\gamma \leq 1$.

**Лемма 1.5.** *Пусть $\Gamma$ – реберно регулярный граф и $\mu(u,w) = \mu_*$, $\mu(u,z) = \mu_*+1$ для смежных вершин $w,z$ из $\Gamma_2(u)$, $\gamma = |[u]\cap[w]\cap[z]|$. Тогда:*

*(1) $\gamma < 2$;*

*(2) если $\gamma = 1$, $d \in [u]\cap[w]\cap[z]$, то $k \leq 3b_1-1$ и в случае равенства вершина $d$ не смежна с единственной вершиной в подграфе $([u]\cap[z])-[w]$ и $[d]-u^{\perp} \subset [w]\cap[z]$.*

**Доказательство.** Пусть $\gamma = |[u]\cap[w]\cap[z]|$ и $p,q$ – различные вершины из $[u]\cap[w]\cap[z]$. Если $[p]$ содержит $\alpha$ вершин из $[w]-([u]\cup[z])$, то по лемме 1.1 $[p]$ содержит $\mu_*-\gamma+\alpha$ вершин из $([z]\cap[u])-[w]$ и $b_1-2-\alpha$ вершин из $([z]\cap[w])-[u]$, причем $|([z]\cap[w])-[u]| = \lambda-\gamma$. Отсюда $[p]\cap[q]$ содержит $u,w,z$, $\mu_*-2$ вершин из $[u]\cap[w]\cap[z]$, $2(\mu_*-\gamma-2)-(\mu_*-2b_1-\gamma+1+\lambda-\gamma)$ вершин из $([u]\cap[z]-[w])\cup([w]\cap[z]-[u])$. Поэтому $|[p]\cap[q]| \geq 3+(\mu_*-2)+(\mu_*+2b_1-5-\lambda)$, т. е. $2\mu_*-4+2b_1 \leq 2\lambda$. Так как $\mu_* = \lambda+2-b_1$, то нестрогое неравенство здесь превращается в равенство, поэтому каждая вершина из $[w]-[u]$ смежна не более чем с одной вершиной из $[u]\cap[w]\cap[z]$ и $[w]\cap[z] \subset [x]\cup[y]$ для любых различных вершин $x,y$ из $[u]\cap[w]\cap[z]$.

Так как $p$ не смежна по крайней мере с $\lambda-\gamma-b_1+2$ вершинами из $[w]\cap[z]$, то $\gamma(\lambda-\gamma-b_1+2) \leq \lambda-\gamma$. Отсюда $\gamma^2-\gamma(\lambda+3-b_1)+\lambda \geq 0$. Заметим, что

$(\lambda-b_1+3)^2-2\lambda < (\lambda+4-b_1)^2$ при $b_1 \geq 4$, и в этом случае $\gamma \geq \lambda-b_1+3 = \mu_*+1$, противоречие.

Пусть $b_1 = 3$. Тогда $\gamma^2 - \gamma\lambda + \lambda \geq 0$ и $\lambda = \mu_* + 1 \leq 4$. Так как $\gamma \geq 2$, то $3 \leq k - 4 \leq 4$. Отсюда $k = 8$, $\lambda = 4$ и $v = 15$. Поэтому $\Gamma = u^\perp \cup w^\perp$, $[z]$ содержит 3 вершины из $[u] - [w]$ и $\mu(u,z) \geq 5$, противоречие.

Если $b_1 = 2$, то $\gamma^2-\gamma(\lambda+1)+\lambda \geq 0$ и $\lambda = 1$. Отсюда $k = 4$ и $\mu_* = 1$, противоречие. Наконец, если $b_1 = 1$, то $\Gamma$ – многоугольник или полный многодольный граф $K_{u\times 2}$ и условия леммы нарушаются. Утверждение (1) доказано.

Пусть $\gamma = 1$, $d \in [u]\cap[w]\cap[z]$. Тогда $[d]$ содержит $\mu_*-1$ вершин из $[u]\cap[w]$ и либо $\mu_* - 1$, либо $\mu_*$ вершин из $[u] \cap [z]$. В последнем случае $\lambda \geq 2\mu_* - 1$ и $k \leq 3b_1 - 2$. Если $k = 3b_1 - 1$, то $d$ не смежна с единственной вершиной из $([u] \cap [z]) - [w]$ и $[d] - u^\perp \subset [w] \cap [z]$.

**Лемма 1.6.** ([5, лемма 3.1]) *Пусть* $\Gamma$ *– сильно регулярный граф с параметрами* $(v,k,\lambda,\mu)$. *Тогда либо* $k = 2\mu$, $\lambda = \mu - 1$ *(так называемый половинный случай), либо неглавные собственные значения* $n - m$, $-m$ *графа* $\Gamma$ *– целые числа, где* $n^2 = (\lambda - \mu)^2 + 4(k - \mu)$, $n - \lambda + \mu = 2m$ *и кратность* $n - m$ *равна* $\dfrac{k(m-1)(k+m)}{\mu n}$. *Далее, если* $m$ *целое и* $m > 1$, *то* $m - 1$ *делит* $k - \lambda - 1$ *и*

$$\mu = \lambda + 2 + (m-1) - \frac{k-\lambda-1}{m-1},\ n = m - 1 + \frac{k-\lambda-1}{m-1}.$$

**Лемма 1.7.** ([3, лемма 7]) *Пусть* $\Gamma$ *– сильно регулярный граф, имеющий целочисленные собственные значения, и* $b_1 = k - \lambda - 1$. *Тогда:*

(1) *если* $b_1$ *– простое число, то* $\Gamma$ *является полным многодольным графом* $K_{r\times(b_1+1)}$ *или графом Зейделя;*

(2) *если* $b_1 = 2p$, $p$ *– простое число, то* $\Gamma$ *либо является полным многодольным графом, либо имеет собственное значение* $-2$ *или* $-3$, *либо является дополнительным к графу Зейделя;*

(3) *если* $b_1 = 4$, *то* $\Gamma$ *является полным многодольным графом* $K_{r\times 5}$, $5 \times 5$ *решеткой, треугольным графом* $T(7)$ *или дополнительным графом к* $4 \times 4$ *решетке, треугольному графу* $T(6)$ *или графу Клебша (заметим, что в половинном случае параметры* $\Gamma$ *равны* $(17,8,3,4)$ *и он является графом Пэли).*

**Лемма 1.8.** *Если* $\Gamma$ *– реберно регулярный граф, для которого* $b_1 \leq 3$ *и* $k \geq 3b_1 - 1$, *то* $\Gamma$ *– либо многоугольник, либо граф икосаэдра, либо полный многодольный граф* $K_{r\times(b_1+1)}$, *либо треугольный граф* $T(n)$, $n = 5,6$, *либо граф Клебша.*

**Доказательство.** Если $b_1 = 1$, то $\Gamma$ – многоугольник или полный многодольный граф $K_{r\times 2}$.

Если Γ – сильно регулярный граф, то утверждение следует из леммы 1.7. Допустим, что Γ – не сильно регулярный граф.

Пусть $b_1 = 2$. Ввиду леммы 1.3 имеем $\lambda < 1/2 + k - \sqrt{2k+2}$, т. е. $2k + 2 < (b_1 + 3/2)^2$ и $k \leq (b_1^2 + 3b_1)/2$. Отсюда $k = 5$, $\lambda = 2$ и Γ является графом икосаэдра.

Пусть $b_1 = 3$. Снова ввиду леммы 1.3 получаем $k \leq (b_1^2 + 3b_1)/2$. Отсюда $k = 8$, $\lambda = 4$ и по следствию из [2] диаметр Γ равен 2, а число вершин в Γ не больше 16. Так как $vk\lambda$ делится на 6, то $v = 15$. Для любой вершины $u$ число ребер между $[u]$ и $\Gamma_2(u)$ равно 24.

Так как Γ – не сильно регулярный граф, то $\mu(u,w) = 3$ для некоторых несмежных вершин $u, w \in \Gamma$. В этом случае число треугольников с основанием в $[u] \cap [w]$ и вершиной в $([u] - [w]) \cup ([w] - [u])$ равно 3. Заметим, что вершина из $[u] - [w]$ не может быть смежна с тремя вершинами из $[u] \cap [w]$, иначе каждая вершина из $[w]-[u]$ смежна с единственной вершиной из $[u]\cap[w]$ и $|[w] - [u]| \geq 6$, противоречие. Поэтому можно считать, что $[w] - [u]$ содержит не менее двух вершин $z_i$, смежных с ребрами из $[u] \cap [w]$. Тогда $[u] - [x]$ содержит единственную вершину, смежную с ребром из $[u] \cap [w]$, и четыре вершины, каждая из которых смежна с единственной вершиной из $[u] \cap [w]$. Ввиду леммы 1.5 $\mu(u, z_i) \geq 5$, поэтому $[w] - [u]$ содержит еще одну вершину $x$ с $\mu(u,x) = 3$. Отсюда $[u] - ([w] \cup [x]) = \{y_1, y_2\}$. Как и выше, $[u] - [x]$ содержит единственную вершину, смежную с ребром из $[u]\cap[w]$, поэтому вершины $y_1, y_2$ смежны. Далее, каждая вершина $d$ из $[u] \cap [w]$ смежна с единственной вершиной из $[u]\cap[x]$ и из $\{y_1, y_2\}$. Поэтому $[y]$ и $[z]$ содержат непересекающиеся тройки вершин из $[u] \cap ([w] \cup [x])$. Отсюда $[y] \cap [z]$ содержит три вершины из $[x] \cap [w]$, каждая из которых смежна с единственной вершиной из $[u] \cap [w]$. Противоречие с тем, что $[x] \cap [w]$ состоит из четырех вершин, две из которых смежны с ребрами из $[u] \cap [w]$.

**Лемма 1.9.** *Если* Γ *– реберно регулярный граф с* $k \geq 4b_1 - 2$ *и* Γ *содержит хорошую пару, то* $k = 4b_1 - 2$ *и* Γ *является пятиугольником.*

**Доказательство.** Пусть $\mu(u,w) = k - 2b_1 + 1$, $X_i$ – множество всех вершин из $([u] \cup [w]) - ([u] \cap [w])$, смежных точно с $i$ вершинами из $[u] \cap [w]$, $x_i = |X_i|$. Подсчитав число ребер между $[u] \cap [w]$ и $([u] \cup [w]) - ([u] \cap [w])$, а также число треугольников с основанием в $[u] \cap [w]$ и вершиной в $([u] \cup [w]) - ([u] \cap [w])$, получим равенства $\sum x_i = 4b_1 - 2$, $\sum ix_i = (k - 2b_1 + 1)(2b_1 - 2)$ и $\sum \binom{i}{2} x_i = \binom{k-2b_1+1}{2}(b_1 - 2)$. Отсюда $\sum i^2 x_i = (k - 2b_1 + 1)(kb_1 - 2k - 2b_1^2 + 6b_1 - 2)$. Положим $x = (k - 2b_1 + 1)(2b_1 - 2)/(4b_1 - 2)$. Тогда $0 \leq \sum x_i (i - x)^2 = \sum i^2 x_i - x \sum ix_i$ и $(k - 2b_1 + 1)(kb_1 - 2k - 2b_1^2 + 6b_1 - 2)(4b_1 - 2) \geq (k - 2b_1 + 1)^2 (2b_1 - 2)^2$.

Отсюда $((k-2b_1+1)(b_1-2)+b_1)(2b_1-1) \geq (k-2b_1+1)(2b_1^2-4b_1+2)$ и $k \leq 4b_1-2$.

Если $k = 4b_1-2$, то $x_i = 0$ для $i \neq x$ и каждая вершина из $([u] \cup [w]) - ([u] \cap [w])$ смежна точно с $b_1 - 1$ вершинами из $[u] \cap [w]$. Таким образом, каждая вершина $d$ из $[u] - [w])$ смежна точно с $b_1$ вершинами из $[w] - [u]$ и $\mu(u, d) = 2b_1 - 1$. Отсюда $\Gamma$ является сильно регулярным графом Тервиллигера без 3-лап, поэтому $\Gamma$ – пятиугольник.

**Лемма 1.10.** *Пусть $\Gamma$ является реберно регулярным графом с параметрами $(v, k, \lambda)$. Если $\Gamma$ содержит две несмежные вершины $u, w$ с $\mu(u, w) = k - 1$, $\{u^*\} = [w] - u^\perp$, $\{w^*\} = [u] - w^\perp$, то:*

(1) $[u^*] \cap [u] \cap [w] = [w^*] \cap [u] \cap [w]$;

(2) *если $k > 2b_1$, то вершины $u^*, w^*$ несмежны и $\mu(u^*, w^*) = k - 1$.*

**Доказательство.** Пусть вершина $d$ из $[u] \cap [w]$ имеет степень $\alpha$ в графе $[u] \cap [w]$. Если $d$ смежна с $w^*$, то $\lambda = \alpha + 1$ и вершина $d$ смежна с $u^*$. Если же $d$ несмежна с $w^*$, то $\lambda = \alpha$ и вершина $d$ несмежна с $u^*$. Утверждение (1) доказано.

Пусть $a \in [u^*] - (u^\perp \cup w^\perp)$. Если вершина $a$ несмежна с $w^*$, то $[a] \cap [w] = ([a] \cap [u]) \cup \{u^*\}$, причем для вершины $d \in [a] \cap [u]$ имеем $|[d] - (a^\perp \cup u^\perp)| = |[d] - (a^\perp \cup w^\perp)|$. Ввиду леммы 1.1 степень $d$ в графе $[a] \cap [u]$ равна степени $d$ в графе $[a] \cap [w]$. Если $k > 2b_1$, то $u^*$ смежна с некоторой вершиной $d$ из $[a] \cap [u]$, противоречие. Итак, каждая вершина из $[u^*] - (u^\perp \cup w^\perp)$ смежна с $w^*$. Отсюда $\mu(u^*, w^*) = k - 1$ и вершины $u^*, w^*$ несмежны. Лемма доказана.

## 2. Доказательство теоремы

Пусть граф $\Gamma$ удовлетворяет условиям теоремы. Пусть $u \in \Gamma$, $w, z$ – несмежные вершины из $\Gamma_2(u)$, $\mu(u, w) = \mu(u, z) = k - 2b_1 + 2$ (т. е. $(u, w)$ и $(u, z)$ – почти хорошие пары) и $\gamma = |[u] \cap [w] \cap [z]|$. Положим $\mu = \mu(w, z)$.

**Лемма 2.1.** (1) *Для любой вершины $d \in [u] \cap [w] \cap [z]$ подграф $d^\perp$ содержит $[u] \cap [w]$, $[u] \cap [z]$, $3b_1 + \gamma - 4 - k$ вершин из $[u] - ([w] \cup [z])$ и $b_1 - 2$ вершин из $[w] \cap [z] - [u]$.*

(2) *Для различных вершин $d, e \in [u] \cap [w] \cap [z]$ подграф $[d] \cap [e]$ содержит $u, w, z$, $\gamma - 2$ вершин из $[u] \cap [w] \cap [z]$ и по $k - 2b_1 + 2 - \gamma$ вершин из $[u] \cap [w] - [z]$ и из $[u] \cap [z] - [w]$.*

**Доказательство.** Пусть $d \in [u] \cap [w] \cap [z]$. Так как $[d]$ содержит вершину $z$ вне $u^\perp \cup w^\perp$, то по лемме 1.1 степень $d$ в графе $[u] \cap [w]$ не меньше $k - 2b_1 + 1 = b_1 - 2$.

Поэтому $d^\perp$ содержит $[u]\cap[w]$. Симметрично, $d^\perp$ содержит $[u]\cap[z]$. Так как $|[d]\cap[u]| = \lambda = k-b_1-1$, то $[d]$ содержит $3b_1+\gamma-4-k$ вершин из $[u]-[w]\cup[z]$. Снова ввиду леммы 1.1 подграф $[d]-u^\perp$ содержит $w, z$ и $b_1-2$ вершин из $[w]\cap[z]-[u]$. Утверждение (1) доказано.

Пусть $d, e$ – различные вершины из $\in [u]\cap[w]\cap[z]$. Ввиду утверждения (1) подграф $[d]\cap[e]$ содержит $u, w, z, \gamma-2$ вершин из $[u]\cap[w]\cap[z]$ и по $k-2b_1+2-\gamma$ вершин из $[u]\cap[w]-[z]$ и из $[u]\cap[z]-[w]$. Лемма доказана.

Через $X_i$ обозначим множество вершин из $([u]-[w]\cup[z])\cup([w]\cap[z]-[u])$, смежных точно с $i$ вершинами из $[u]\cap[w]\cap[z]$, и положим $x_i = |X_i|$.

**Лемма 2.2.** (1) $\sum x_i = 4b_1-4-k+\mu$, $\sum ix_i = \gamma(4b_1-6-k+\gamma)$, $\sum\binom{i}{2}x_i = \gamma(\gamma-1)(3b_1+\gamma-6-k)/2$.

(2) $\mu \le 2b_1-2+\gamma$ *и* $k \le 3b_1+\gamma-6$.

(3) *Если* $\gamma > 2$, *то* $k \le b_1(3-(2\gamma-6)/(\gamma^2-3\gamma+2))+\gamma-6$ *и в случае равенства* $k=\mu$ *и* $x_i = 0$ *для* $i \notin \{1,2\}$.

**Доказательство.** Заметим, что $|([u]-[w]\cup[z])| = 4b_1-4-k+\gamma$, $|([w]\cap[z]-[u])| = \mu-\gamma$, поэтому $\sum x_i = 4b_1-4-k+\mu$. По лемме 2.1 число ребер между $[u]\cap[w]\cap[z]$ и $([u]-[w]\cup[z])\cup([w]\cap[z]-[u])$ равно $\sum ix_i = \gamma(4b_1-6-k+\gamma)$. Число треугольников с основанием в $[u]\cap[w]\cap[z]$ и вершиной в $([u]-[w]\cup[z])\cup([w]\cap[z]-[u])$ равно $\sum\binom{i}{2}x_i = \gamma(\gamma-1)(3b_1+\gamma-6-k)/2$. Утверждение (1) доказано.

Так как $\mu+k-2b_1+2-\gamma \le k$, то $\mu \le 2b_1-2+\gamma$. Из третьего равенства в (1) следует, что $k \le 3b_1+\gamma-6$. Утверждение (2) доказано.

Пусть $\gamma > 2$. Вычитая из суммы первого и третьего равенств в (1) второе и заменяя $\mu$ на $2b_1-2+\gamma$, получаем

$$x_0 + \sum\binom{i-1}{2}x_i \le (4b_1-6-k+\gamma)((\gamma^2-\gamma)/2-\gamma+1) - b_1((\gamma^2-\gamma)/2-2).$$

Отсюда $k \le 4b_1-6+\gamma-b_1(\gamma^2-\gamma-4)/(\gamma^2-3\gamma+2)$ и мы имеем неравенство из (3). В случае равенства получим $\mu = 2b_1-2+\gamma$ и $x_i = 0$ для $i \notin \{1,2\}$.

**Лемма 2.3.** *Выполняются следующие неравенства:*

(1) $(3b_1\gamma+\gamma^2-6\gamma-\gamma k+b_1)(4b_1-4-k+\mu) \ge \gamma(4b_1-6-k+\gamma)^2$, *причем в случае равенства каждая вершина из* $([u]-[w]\cup[z])\cup([w]\cap[z]-[u])$ *смежна с* $\gamma(4b_1-6-k+\gamma)/(4b_1-4-k+\mu)$ *вершинами из* $[u]\cap[w]\cap[z]$;

(2) $k \le 2b_1+\gamma-6+4b_1/(\gamma+1)$, *причем в случае равенства получим* $\mu = 2b_1-2+\gamma$ *и каждая вершина из* $([u]-[w])\cup([w]-[u])$ *смежна с* $(\gamma-1)/2$ *вершинами из* $[u]\cap[w]\cap[z]$.

**Доказательство.** Положим $x = \gamma(4b_1-6-k+\gamma)/(4b_1-4-k+\mu)$. По лемме 2.2 $\sum i^2 x_i = \gamma(3b_1\gamma + \gamma^2 - 6\gamma - \gamma k + b_1)$. Верно неравенство $0 \le \sum(i-x)^2 x_i = = \sum i^2 x_i - 2x\sum i x_i + x^2 \sum x_i$. Отсюда $\gamma(3b_1\gamma+\gamma^2-6\gamma-\gamma k+b_1)(4b_1-4-k+\mu) \ge \ge \gamma^2(4b_1-6-k+\gamma)^2$.

Если $(3b_1\gamma + \gamma^2 - 6\gamma - \gamma k + b_1)(4b_1 - 4 - k + \mu) = \gamma(4b_1 - 6 - k + \gamma)^2$, то $\sum(i-x)^2 x_i = 0$ и каждая вершина из $([u]-[w]\cup[z])\cup([w]\cap[z]-[u])$ смежна с $\gamma(4b_1-6-k+\gamma)/(4b_1-4+k-\mu)$ вершинами из $[u]\cap[w]\cap[z]$. Утверждение (1) доказано.

Далее, заменяя $\mu$ на $2b_1 - 2 + \gamma$, получим $b_1(\gamma-1)(6b_1 - 6 - k + \gamma) \le \le 2b_1(3b_1\gamma+\gamma^2-6\gamma-\gamma k)$ и $k(\gamma+1) \le 2b_1\gamma+\gamma^2-5\gamma-6+6b_1$. Таким образом, $k \le 2b_1 + \gamma - 6 + 4b_1/(\gamma+1)$.

Если $k = 2b_1 + \gamma - 6 + 4b_1/(\gamma+1)$, то все использованные нестрогие неравенства превращаются в равенства, поэтому $\mu = 2b_1 - 2 + \gamma$ и $0 = \sum(i-x)^2 x_i$. Значит, $x_i = 0$ для $i \ne x$ и каждая вершина из $([u]-[w])\cup([w]-[u])$ смежна с $(\gamma-1)/2$ вершинами из $[u]\cap[w]\cap[z]$.

**Лемма 2.4.** *Если $\gamma \ge 2$, то $k \le 3b_1 - 4$.*

**Доказательство.** Если $\gamma = 2$, то по утверждению (2) леммы 2.2 $k \le 3b_1 - 4$. Если $\gamma = 3$, то по утверждению (3) леммы 2.2 $k \le 3b_1 - 3$. В случае $k = 3b_1 - 3$ достигается равенство в пункте (2) заключения леммы 2.3 и каждая вершина из $([u]-[w])\cup([w]-[u])$ смежна с единственной вершиной из $[u]\cap[w]\cap[z]$. Так как каждая вершина из $[u]\cap[w]\cap[z]$ смежна с двумя вершинами из $[u]-[w]\cup[z]$ и $|[u]-[w]\cup[z]| = b_1 - 2$, то $b_1 = 4$. Пусть $d \in [u]\cap[w]\cap[z]$, $x \in [u]-[w]\cup[z]$ и $\{p,q\} = [d]\cap([w]-[u])$. По лемме 1.1 степень вершины $d$ в графе $[x]\cap[w]$ не меньше 2, поэтому $[p]\cap[q]$ содержит $d, w, z$ и 2 вершины из $[u]-[w]$. Так как в нашем случае $\lambda = 4$, то вершины $p, q$ несмежны. Снова по лемме 1.1 степень вершины $p$ в графе $[x]\cap[w]$ не меньше 2, поэтому $\mu(x,w) \ge 4$.

Число ребер между $[w]$ и $\Gamma_2(w)$ равно 36, причем 9 из этих ребер инцидентны с $z$, а три – с $u$. Отсюда $\mu(y,w) = 4$ для любой вершины $y \in [u]-[w]$ и $\Gamma_2(w) = \{u,z\}\cup([u]-[w])$. Далее, число ребер между $[u]$ и $\Gamma_2(u)$ равно 36, причем 30 из этих ребер инцидентны с вершинами из $\{w,z\}\cup([w]-[u])$. Поэтому $\Gamma_2(u)$ содержит вершину $r$, не попадающую в $\{w,z\}\cup([w]-[u])$. Можно считать, что вершина $r$ смежна с $x$ и $rxdw$ – геодезический 3-путь. Противоречие с тем, что тогда $\mu(r,d) = 2$ и $[x] \subset r^\perp \cup d^\perp$.

Пусть $\gamma \ge 4$ и $k = 3b_1 - 3 + \alpha$, $\alpha \ge 0$. По лемме 2.3 $(b_1+\alpha+3-\gamma)(\gamma+1) \le 4b_1$. Отсюда $b_1(\gamma-3) \le (\gamma+1)(\gamma-3-\alpha)$ и $b_1 \le \gamma + 1 - \alpha - 4\alpha/(\gamma-3)$. С другой стороны, подграф $[u]\cap[w]-[z]$ содержит $b_1 - \gamma - 1 + \alpha$ вершин, поэтому $\alpha = 0$, $b_1 = \gamma + 1$ и достигается равенство в заключении леммы 2.3, в частности, $b_1$

четно. Ввиду леммы 2.2 $\sum \binom{i}{2} x_i = 0$ и для двух вершин $d, e$ из $[u] \cap [w] \cap [z]$ подграф $[d] \cap [e]$ содержит $u, w, z$ и $\gamma - 2$ вершин из $[u] \cap [w] \cap [z]$. Отсюда $b_1 = 4$, противоречие.

**Лемма 2.5.** *Если $k = 3b_1 - 4$ и $\gamma > 1$, то либо $\gamma = 2$, либо $\gamma = 5$, $b_1 = 8$, $x_1 = 1, x_2 = 14, x_3 = 2$ и $\mu = 19$.*

**Доказательство.** Пусть $k = 3b_1 - 4$. Тогда $\mu(u, w) = b_1 - 2$, $\lambda = 2b_1 - 5$ и $b_1$ четно. Если $\gamma = 3$, то $\sum x_i = b_1 + \mu$, $\sum i x_i = 3(b_1 + 1)$, $\sum \binom{i}{2} x_i = 3$ и $2b_1 + 4 \geq$ $\geq 3b_1 + 3$, противоречие. Пусть $\gamma \geq 4$. По лемме 2.3 получим неравенство

$$b_1 \leq \gamma + 2 + 4/(\gamma - 3). \qquad (**)$$

Допустим, что $b_1 = \gamma + 2$. Тогда $\sum x_i = \gamma + 2 + \mu$, $\sum i x_i = 2\gamma^2$, $\sum \binom{i}{2} x_i =$ $= \gamma(\gamma - 1)(\gamma - 2)/2$. В силу леммы 2.3 $(3\gamma + 2)(\gamma^2 - \gamma + 2) \geq 4\gamma^3$, поэтому $(\gamma + 1)(\gamma^2 - 4) \leq 0$ и $\gamma \leq 2$, противоречие.

Таким образом, $b_1 > \gamma + 2$. Тогда $\gamma \leq 7$, причем в случае $\gamma = 7$ получим $b_1 = 10$ и $\mu = 18$. В этом случае в $(**)$ достигается равенство и по лемме 2.3 каждая вершина из $[w] \cap [z] - [u]$ смежна с тремя вершинами из $[u] \cap [w] \cap [z]$. Поэтому число ребер между $[w] \cap [z] - [u]$ и $[u] \cap [w] \cap [z]$ равно 54. Противоречие с тем, что каждая вершина из $[u] \cap [w] \cap [z]$ смежна с 15 вершинами из $[w] \cap [z] - [u]$ и указанное число ребер равно 56.

Если $\gamma = 6$, то в силу $(**)$ $b_1 = 9$. Отсюда $k = 23, \lambda = 13$, противоречие. Если $\gamma = 4$, то в силу леммы 2.2 получим $b_1 \leq 6$.

Значит, $\gamma = 5$ и в силу $(**)$ $b_1 = 8$, $k = 20$ и $\lambda = 11$. Отсюда $\sum x_i = 8 + \mu$, $\sum i x_i = 55$, $\sum \binom{i}{2} x_i = 30$ и $x_0 + \sum \binom{i-1}{2} x_i = \mu - 17$. По утверждению (2) леммы 2.2 получим $\mu \leq 19$. Ввиду равенства (1) из леммы 2.3 имеем $23(8 + \mu) \geq 5 \cdot 11^2$ и $\mu > 17$. Если $\mu = 18$, то $x_1 + x_2 = 25$, $x_1 + 2x_2 = 52$ или 55, противоречие. Поэтому $\mu = 19$, $x_3 = 2$, $x_1 + x_2 = 25$ и $x_1 + 2x_2 = 49$. Таким образом, $x_1 = 1$, $x_2 = 24$ и $x_3 = 2$. Лемма доказана.

Завершим доказательство теоремы. Так как каждая вершина из $\Delta$ смежна с шестью вершинами из $[w] \cap [z] - [u]$, то $[w] \cap [z] - [u]$ содержит две вершины из $X_3$ и 12 из $X_2$. Поэтому вершина $e$ из $X_1$ попадает в $[u]$ и число треугольников с основанием в $\Delta$ и вершиной в $[w] \cap [z] - [u]$ равно 18.

Положим $\{z'\} = [u] \cap [w] - [z]$, $\{w'\} = [u] \cap [z] - [w]$. По лемме 1.10 имеем $\mu(w', z') = 19$ и $[w'] \cap [z']$ содержит $u$, шесть вершин из $[w] \cap [z] - [u]$, вершину $r$ вне $w^\perp \cup z^\perp$ и шесть вершин из $[u] - [w] \cup [z]$. Далее, $[r] \cap [w'] = [r] \cap [z']$ содержит 11 из 12 вершин в $[w'] \cap (([u] - [w] \cup [z]) \cup ([w] \cap [z] - [u]))$. Пусть $\Sigma = [u] - ([w] \cup (w')^\perp$. Тогда число ребер между $\Delta$ и $\Sigma \cap X_2$ не меньше 12 и некоторая вершина из $\Delta$ смежна по крайней мере с тремя вершинами из $\Sigma \cap X_2$.

Пусть $g \in \Sigma \cap X_2$ и пусть для определенности $g$ смежна с вершинами $a, b \in [u] \cap [w] \cap [z]$. Тогда $a$ смежна с вершинами $w', z$ вне $g^\perp \cup w^\perp$ и степень $a$ в графе $[g] \cap [w]$ не меньше 6. Так как $[a] \cap [b]$ содержит три вершины из $X_2 \cup X_3$, то $[g] - u^\perp$ содержит две вершины из $[a] \cap [b] \cap [w] \cap [z]$ и по три вершины из $([a]-[b]) \cap [w] \cap [z]$, $([b]-[a]) \cap [w] \cap [z]$, в частности, $[g] \subset u^\perp \cup [w]$. Далее, $[a] \cap [g]$ содержит $b, u$, пять вершин вне $u^\perp$ и четыре вершины из $[u] - ([w] \cup [z])$.

Допустим, что $a$ смежна с вершинами $g, g'$ из $\Sigma$. Тогда $[g] \cap [g']$ содержит $a, u$, не менее четырех вершин из $[a] \cap [w] \cap [z] - [u]$ и не менее пяти вершин из $[u] - ([w] \cup [z])$. Отсюда $[g] \cup [g']$ содержит $[a] \cap [w] \cap [z] - [u]$ и $[u] - ([w] \cup [z])$. Если $a$ смежна с третьей вершиной $g''$ из $\Sigma$, то $[u] \cap [g''] - \Delta$ содержит по три вершины из $[g] - [g']$ и из $[g'] - [g]$ и единственную вершину из $[g] \cap [g'] \cap [a] \cap [u]$. Противоречие с тем, что $[g] \cap [g'] \cap [g'']$ содержит две вершины из $[a] \cap [u] - \Delta$. Теорема доказана.

## 3. Вполне регулярные графы с $\mu = k - 2b_1 + 2$

В этом параграфе $\Gamma$ – вполне регулярный граф с параметрами $(v, k, \lambda, \mu)$ и $\mu = k - 2b_1 + 2$ (т. е. любые две вершины, находящиеся на расстоянии 2, образуют почти хорошую пару). Заметим, что если $(u, w)$ – почти хорошая пара и $[u] \cap [w]$ содержит несмежные вершины $x, y$, то $u^\perp \cup w^\perp = x^\perp \cup y^\perp$.

**Лемма 3.1.** *Если $\Gamma$ содержит 3-лапу $\{a; b, c, d\}$, то $k = 3b_1 - 3$ и каждая вершина из $[a] - \{b, c, d\}$ смежна точно с двумя вершинами из $\{b, c, d\}$.*

**Доказательство.** Положим $\gamma = |[b] \cap [c] \cap [d]|$. Тогда $[a] - b^\perp$ содержит точно $b_1 - 2 = k - 2b_1 + 2 - \gamma$ вершин из $[c] \cap [d] - [b]$. Поэтому $k = 3b_1 - 4 + \gamma$ и по теореме получим $\gamma = 1$.

Теперь $[a]$ содержит $b, c, d$ и по $b_1 - 2$ вершин из $[b] \cap [c]$, $[b] \cap [d]$ и из $[c] \cap [d]$.

**Лемма 3.2.** *Диаметр $\Gamma$ равен 2 тогда и только тогда, когда $\Gamma$ – граф Зейделя.*

**Доказательство.** Пусть диаметр $\Gamma$ равен 2. В половинном случае $k/2 = 2(k - 2b_1 + 2) = k - b_1$ и $b_1 = 2$. В этом случае $\Gamma$ является $3 \times 3$ решеткой. Если же $\Gamma$ – не граф в половинном случае, то $n^2 = (\lambda - \mu)^2 + 4(k - \mu) = (b_1 + 1)^2$ и $\Gamma$ имеет собственные значения $b_1 - 1$ и $-2$. Таким образом, $\Gamma$ – граф Зейделя. Легко проверить, что каждый граф Зейделя имеет $\mu = k - 2b_1 + 2$.

Пусть до конца раздела Γ имеет диаметр, больший 2. Зафиксируем геодезический 3-путь $abcd$.

**Лемма 3.3.** (1) *Подграфы* $[a]\cap[c]$ *и* $[b]\cap[d]$ *являются кликами.*

(2) $b_1 \leq 3$.

(3) *Если* $\mu = 1$, *то* Γ *– тривалентный граф без треугольников.*

**Доказательство.** Если подграф $[a]\cap[c]$ содержит несмежные вершины $x, y$, то $a^{\perp}\cup c^{\perp} = x^{\perp}\cup y^{\perp}$. Противоречие с тем, что $[c]$ содержит вершину $d$, не смежную ни с $x$, ни с $y$. Утверждение (1) доказано.

По лемме 1.1 подграф $[b]$ содержит единственную вершину $e$, не лежащую в $a^{\perp}\cup c^{\perp}$, причем по лемме 3.1 подграф $[b]\cap[d]-\{c\}$ содержится в $[e]$. Если $b_1 \geq 4$, $f, g$ – различные вершины из $[b]\cap[d]-\{c\}$, то $[f]\cap[g]$ содержит $b, d$, $b_1-3$ вершин из $[b]\cap[d]$ и $b_1-1$ вершин вне $a^{\perp}\cup c^{\perp}$, смежных с вершинами из $[a]\cap[c]$, противоречие. Утверждение (2) доказано.

Пусть $\mu = 1$. Тогда $k = 2b_1-1, \lambda = b_1-2$ и окрестность любой вершины состоит из изолированных $(b_1-1)$-клик. Так как $b_1-1$ делит $2b_1-1$, то $b_1 = 2, k = 3$ и Γ – тривалентный граф без треугольников. Лемма доказана.

Ввиду леммы 3.3 либо Γ – тривалентный граф без треугольников, либо $b_1 = 3$ и $k = 6$.

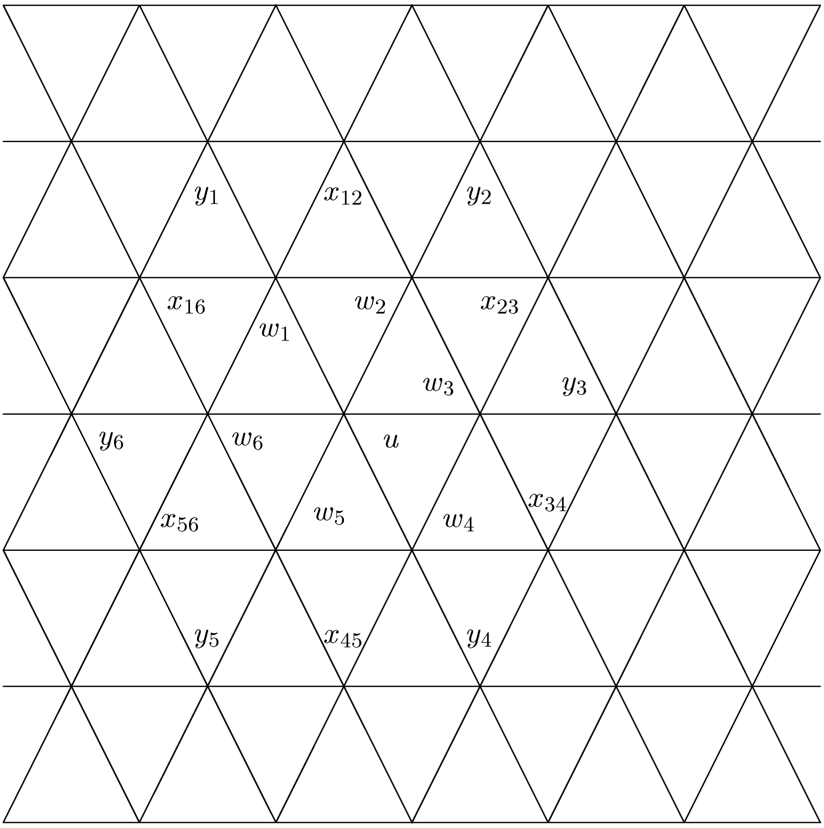
**Лемма 3.4.** *Если* $b_1 = 3$, *то* Γ *является локально шестиугольным графом с* $\mu = 2$.

**Доказательство.** Пусть $b_1 = 3$. Тогда $k = 6$ и окрестность каждой вершины в графе Γ является объединением двух изолированных треугольников или шестиугольником. Если окрестность некоторой вершины в графе Γ является объединением двух изолированных треугольников, то по связности графа окрестность каждой вершины в графе Γ является объединением двух изолированных треугольников. В этом случае каждый $\mu$-подграф является 2-кокликой и диаметр Γ равен 2, противоречие. Лемма доказана.

Для завершения доказательства следствия достаточно установить, что вполне регулярный локально шестиугольный граф с $\mu = 2$ имеет диаметр 2.

**Предложение.** *Если* Γ *является вполне регулярным локально шестиугольным графом с* $\mu = 2$, *то* Γ *имеет диаметр* 2.

**Доказательство.** Пусть Γ является локально шестиугольным графом. Зафиксируем вершину $u$. Пусть $w_1, \ldots, w_6$ – цикл из $[u]$. Тогда $\Gamma_2(u)$ содержит




Шар в $\Sigma$ радиуса 2 с центром в $u$

вершины $x_{12}, x_{23}, \ldots, x_{61}$, в окрестности которых попадают соответствующие ребра $\{w_i, w_{i+1}\}$, и вершины $y_i$ такие, что $w_i$ изолирована в графе $[u] \cap [y_i]$. Заметим, что $\Gamma$ естественно вкладывается в граф $\Sigma$, получаемый в результате замощения плоскости равными правильными треугольниками (см. рисунок).

Если $\Gamma$ является вполне регулярным графом с $\mu = 2$, то $y_1 = y_4$, $y_2 = y_5$ и $y_3 = y_6$. Тогда $\Gamma$ содержит 6-цикл $w_1 u w_3 x_{23} y_2 x_{12}$. Аналогично, $[w_6] = \{u, w_1, x_{16}, y_3, x_{56}, w_5\}$. Теперь $x_{12}$ смежна с вершинами $w_1, x_{56}$ из $[w_6]$. Симметрично, $x_{12}$ смежна с вершиной $x_{34}$ из $[w_3]$ и $[x_{12}]$ содержится в $[u] \cup \Gamma_2(u)$. Наконец, $[y_1] = \{w_1, x_{12}, x_{34}, w_4, x_{45}, x_{16}\}$.

Предложение и следствие доказаны.

**Литература**


1. Brouwer A. E., Cohen A. M., Neumaier A. Distance-regular graphs. B.: Springer-Verlag, 1989.

2. Махнев А. А., Минакова И. М. Об одном классе реберно регулярных графов // Изв. Гомел. гос. ун-та. Вопросы алгебры. 2000. Т. 3 (16). С. 145–154.

3. Махнев А. А., Веденев А. А., Кузнецов А. Н., Носов В. В. О хороших парах в реберно регулярных графах // Дискрет. матем. 2003. Т. 15. С. 77–97.

4. Махнев А. А., Минакова И. М. О хороших парах вершин в графах с $k \geq 3b_1 - 2$ // Алгебра и линейная оптимизация: Тр. Международ. конф. Екатеринбург: Изд-во УрО РАН, 2002. С. 172–174.

5. Махнев А. А. О расширениях частичных геометрий, содержащих малые $\mu$-подграфы // Дискрет. анализ и исследование операций. 1996. Т. 3. С. 71–83.

6. Numata M. On a characterization of a class of regular graphs // Osaka J. Math. 1974. Vol. 11. P. 389–400.


*Статья поступила 29.11.2004 г.*