УДК 512:519.4

В. Ю. Попов

О НЕЗАВИСИМО РАЗБИВАЕМЫХ СИСТЕМАХ КВАЗИТОЖДЕСТВ*

Множество Σ предложений языка первого порядка называется *независимым*, если никакое предложение $\varphi \in \Sigma$ невыводимо из множества предложений $\Sigma \setminus \{\varphi\}$. Для системы квазитождеств Σ будем обозначать через $\operatorname{qvar} \Sigma$ квазимногообразие, заданное системой Σ. Система квазитождеств Σ называется *независимо разбиваемой относительно квазимногообразия* $\mathbf{K}$, если ее можно представить в виде $\Sigma = \cup_n \Sigma_n$ так, что для любого $n \in \mathbb{N}$ выполняется условие

$$\mathbf{K} \cap \operatorname{qvar}(\Sigma \setminus \Sigma_n) \neq \mathbf{K} \cap \operatorname{qvar} \Sigma. \tag{1}$$

Система квазитождеств Σ называется *конечно независимо разбиваемой относительно квазимногообразия* $\mathbf{K}$, если ее можно представить в виде $\Sigma = \cup_n \Sigma_n$ так, что для любого $n \in \mathbb{N}$ множество Σ_n конечно и выполняется условие (1).

Говорят, что множества Σ_1 и Σ_2 предложений языка первого порядка *эквивалентны*, если для любого $\varphi \in \Sigma_1$ предложение φ выводимо из множества предложений Σ_2 и для любого $\psi \in \Sigma_2$ предложение ψ выводимо из множества предложений Σ_1. Согласно [1] произвольное множество предложений языка первого порядка эквивалентно некоторому независимому множеству предложений. Однако если мы будем рассматривать лишь предложения специального вида, аналогичное утверждение, вообще говоря, неверно. Первый пример многообразия универсальных алгебр, не имеющего независимого базиса тождеств, был указан в [2]. В [3] построен первый пример квазимногообразия универсальных алгебр, не имеющего независимого базиса квазитождеств. Существует антимногообразие, не имеющее независимого базиса антитождеств (см., например, [4, теорема 6.3.12]). В [3] доказано, что существует многообразие универсальных алгебр $\mathbf{A}$, содержащее 2^ω подквазимногообразий, не имеющих независимого базиса квазитождеств, но имеющих независимо разбиваемый базис квазитождеств относительно $\mathbf{A}$. В [4] отмечено, что каждое из этих 2^ω квазимногообразий имеет независимый базис универсальных предложений относительно $\mathbf{A}$. Там же сформулирован следующий вопрос:

*Работа выполнена при поддержке РФФИ (грант № 05-01-00540), межвузовской научной программы «Университеты России» (проект № 04.01.437) и президентской программы поддержки ведущих научных школ Российской Федерации (проект НШ-2227.2003.1).

верно ли, что если квазимногообразие $\mathbf{K}'$ имеет относительно квазимногообразия $\mathbf{K}$ конечно независимо разбиваемый базис квазитождеств, то $\mathbf{K}'$ имеет относительно $\mathbf{K}$ независимый базис квазитождеств? Интерес к этому вопросу тесно связан с доказательством теоремы 2.1 из статьи [5] и комментариями Б. Уэллса к английскому переводу этой статьи в [6] (см. [3]). Отрицательный ответ на этот вопрос дает следующая теорема, в доказательстве которой существенно используется конструкция из пункта 2 работы [5].

Теорема. *Существует квазимногообразие* $\mathbf{K}$*, содержащее* 2^ω *подквазимногообразий, имеющих относительно квазимногообразия* $\mathbf{K}$ *конечно независимо разбиваемый базис квазитождеств и не имеющих относительно* $\mathbf{K}$ *независимого базиса квазитождеств.*

Доказательство. Пусть $\mathbf{K}$ – квазимногообразие алгебр сигнатуры с двумя унарными функциональными символами F и G и константой 0, определенное квазитождествами:

$$F(0) = G(0) = 0,\ F(G(x)) = G(F(x)) = x,$$
$$F(x) = x \to x = 0,\ F(x) = F(y) \to x = y.$$

Введем следующие обозначения:

$$x^0 = x,\ x^1 = F(x),\ x^{n+1} = F(x^n),\ x^{-1} = G(x),\ x^{-(n+1)} = G(x^{-n}),\ n \in \mathbb{N}.$$

Обозначим через $\mathcal{C}_n$ алгебру, определенную тождествами $F(0) = G(0) = 0$, $F(G(x)) = G(F(x)) = x$, соотношением $a^n = a$ и квазитождеством

$$x^1 = x \wedge x^{-1} = x \to x = 0.$$

Очевидно, что $\mathcal{C}_1 = \{0\}$, $\mathcal{C}_0$ – объединение бесконечного цикла и $\mathcal{C}_1$, а $\mathcal{C}_n$ при $n \neq 0, 1$ является объединением $\mathcal{C}_1$ и цикла длины n.

Для произвольного множества натуральных чисел I обозначим через $[I]$ множество чисел, представимых в виде произведения чисел из I (произведение пустого множества чисел считается равным единице). Пусть P – множество всех нечетных простых чисел. Зафиксируем бесконечное подмножество $I \subset P$ такое, что $J = P \setminus I$ бесконечно. Обозначим через $\mathfrak{J}$ множество

$$[J] \cup \{r \mid r = 2^n p,\ n \in \mathbb{N},\ p \in [J] \setminus \{1\}\}.$$

Рассмотрим класс $\mathbf{K}_I$ всех алгебр из $\mathbf{K}$, не содержащих циклов, длина которых делится на числа из I, и не содержащих циклов, длина которых равна 2^n, $n \in \mathbb{N}$. Упорядочим множество I по возрастанию $p_1, p_2, \ldots$ и положим

$$\varphi(m, n) \rightleftharpoons\ x^{mp_n} = x \to x^m = x,$$
$$\psi(k) \rightleftharpoons\ x^{2^k} = x \to x^{2^{k-1}} = x,$$

где $m, n, k \in \mathbb{N}$. Пусть $\Sigma = \{\varphi(m, n), \psi(k) \mid m, n, k \in \mathbb{N}\}$. Очевидно, что алгебра $\mathcal{C}_r$ удовлетворяет квазитождеству $\varphi(m, n)$ тогда и только тогда, когда r либо делит m, либо не делит mp_n. Кроме того, алгебра $\mathcal{C}_r$ удовлетворяет квазитождеству $\psi(k)$ тогда и только тогда, когда r либо делит 2^{k-1}, либо не делит 2^k. Следовательно, $\mathcal{C}_r$ удовлетворяет системе квазитождеств Σ тогда и только тогда, когда $r \in \mathfrak{J}$. Поэтому Σ – базис квазитождеств квазимногообразия $\mathbf{K}_I$ относительно $\mathbf{K}$.

Пусть $\mathbf{K}_I^n = \mathbf{K} \cap \mathrm{qvar}(\Sigma \setminus \{\psi(n)\})$, $n \in \mathbb{N}$. Очевидно, что $\mathcal{C}_{2^n} \in \mathbf{K}_I^n$ и $\mathcal{C}_{2^n} \notin \mathbf{K}_I$. Следовательно, система квазитождеств Σ не эквивалентна никакой своей конечной подсистеме. Отсюда непосредственно вытекает, что квазимногообразие $\mathbf{K}_I$ не имеет конечного базиса квазитождеств относительно $\mathbf{K}$. Кроме того, поскольку для любого n имеет место соотношение $\mathbf{K}_I^n \neq \mathbf{K}_I$, система квазитождеств конечно независимо разбиваема.

Произвольное квазитождество сигнатуры $\{F, G, 0\}$ можно записать в виде

$$u_1^{m_1} = v_1^{n_1} \wedge \cdots \wedge u_s^{m_s} = v_s^{n_s} \to u^m = v^n,$$

где $u_1, v_1, \ldots, u_s, v_s, u, v$ – какие-то элементы множества $\{0, x_1, x_2, \ldots, x_p\}$, а $m_1, n_1, \ldots,$ m_s, n_s, m, n – целые числа. Из квазитождества

$$F(x) = F(y) \to x = y$$

следует, что в квазимногообразии $\mathbf{K}$ имеет место соотношение

$$x^p = y^q \leftrightarrow x = y^{q-p}.$$

Поэтому в квазимногообразии $\mathbf{K}$ произвольное квазитождество можно привести к виду

$$u_1^{m_1} = v_1 \wedge \cdots \wedge u_s^{m_s} = v_s \to u^m = v, \tag{2}$$

где $u_1, v_1, \ldots, u_s, v_s, u, v$ – какие-то элементы множества $\{0, x_1, x_2, \ldots, x_p\}$, а $m_1, \ldots, m_s$, m – целые числа.

Если $u^m = v$ имеет вид $0^m = 0$, то квазитождество (2) следует из тождества $F(0) = 0$. Допустим, что $u^m = v$ имеет вид $x_1^m = x_2$. Тогда квазитождество (2) можно представить в виде

$$u_1^{m_1} = v_1 \wedge \cdots \wedge u_s^{m_s} = v_s \to x_1^m = x_2,$$

где $u_1, v_1, \ldots, u_s, v_s, u^m, v^n$ – некоторые элементы из множества $\{0, x_1, x_2\}$, а $m_1, \ldots, m_s, m$ – целые числа. Подставляя 0 вместо x_1 и x_2 в последнее квазитождество, получим, что оно эквивалентно конъюнкции двух квазитождеств, каждое из которых имеет вид

$$x^{m_1} = x \wedge x^{m_2} = x \wedge \cdots \wedge x^{m_s} = x \to x = 0. \tag{3}$$

Таким образом, в квазимногообразии $\mathbf{K}$ произвольное квазитождество эквивалентно либо квазитождеству вида (3), либо паре квазитождеств вида (3), либо квазитождеству вида

$$x^{m_1} = x \wedge x^{m_2} = x \wedge \cdots \wedge x^{m_s} = x \to x^m = x. \tag{4}$$

В квазимногообразии $\mathbf{K}$ имеет место следующее соотношение:

$$x^{m_1} = x \wedge \cdots \wedge x^{m_s} = x \Leftrightarrow x^d = x,$$

где d – наибольший общий делитель чисел $m_1, \ldots, m_s$. Следовательно, квазитождество (3) в квазимногообразии $\mathbf{K}$ равносильно квазитождеству

$$x^d = x \to x = 0, \tag{5}$$

а квазитождество (4) в квазимногообразии $\mathbf{K}$ равносильно квазитождеству

$$x^d = x \to x^m = x. \tag{6}$$

Так как

$$x^{p+q} = x \wedge x^p = x \Leftrightarrow x^d = x,$$

где $d = (p+q, p)$, квазитождество (6) равносильно квазитождеству

$$x^{cd} = x \to x^d = x. \tag{7}$$

Предположим, что $\mathbf{K}_I$ имеет бесконечный независимый базис квазитождеств Σ' относительно $\mathbf{K}$. Допустим, что для некоторых натуральных чисел c и d система квазитождеств Σ' содержит квазитождество (7). Это квазитождество можно представить в виде

$$x^{p_1^{n_1} p_2^{n_2} \ldots p_s^{n_s} q_1^{m_1} q_2^{m_2} \ldots q_t^{m_t}} = x \to x^{p_{i_1}^{n'_{i_1}} p_{i_2}^{n'_{i_2}} \ldots p_{i_u}^{n'_{i_u}} q_{j_1}^{m'_{j_1}} q_{j_2}^{m'_{j_2}} \ldots q_{j_v}^{m'_{j_v}}} = x, \tag{8}$$

где

$$p_1, p_2, \ldots, p_s \in I \cup \{2\}, q_1, q_2, \ldots, q_t \in J, s, t \in \mathbb{N},$$

$$n_1, n_2, \ldots, n_s, m_1, m_2, \ldots, m_t \in \mathbb{N},$$

$$u \le s, 1 \le i_1 < i_2 < \cdots < i_u \le s, v \le t, 1 \le j_1 < j_2 < \cdots < j_v \le t,$$

$$n'_{i_l} \le n_{i_l}, 1 \le l \le u, m'_{j_r} \le m_{j_r}, 1 \le r \le v.$$

Если в квазитождестве (8) для некоторого r, $1 \le r \le v$, имеет место неравенство $m'_{j_r} < m_{j_r}$, то это квазитождество ложно на алгебре $\mathcal{C}_{q_{j_r}^{m_{j_r}}}$, которая по определению принадлежит классу $\mathbf{K}_I$. Это противоречит предположению о том, что Σ' – базис квазитождеств для квазимногообразия $\mathbf{K}_I$. Следовательно, квазитождество (8) должно иметь вид

$$x^{p_1^{n_1}p_2^{n_2}\ldots p_s^{n_s}q_1^{m_1}q_2^{m_2}\ldots q_t^{m_t}} = x \to x^{p_{i_1}^{n'_{i_1}}p_{i_2}^{n'_{i_2}}\ldots p_{i_u}^{n'_{i_u}}q_1^{m_1}q_2^{m_2}\ldots q_t^{m_t}} = x. \tag{9}$$

Пусть $q \in J \setminus \{q_1, q_2, \ldots, q_t\}$. В силу бесконечности множества J, такое число q существует. Очевидно, что квазитождество (9) истинно на алгебре

$$\mathcal{C}_{qp_1^{n_1}p_2^{n_2}\ldots p_s^{n_s}q_1^{m_1}q_2^{m_2}\ldots q_t^{m_t}}. \tag{10}$$

По определению класса $\mathbf{K}_I$ алгебра (10) этому классу не принадлежит. Следовательно, в системе квазитождеств Σ' найдется квазитождество, отличное от (9), ложное на алгебре (10). Легко понять, что если это квазитождество является квазитождеством вида (5) или конъюнкцией двух квазитождеств вида (5), то из него следует квазитождество (9), что противоречит предположению о независимости системы Σ'. Следовательно, на алгебре (10) ложно квазитождество вида (7). Очевидно, что в квазитождестве (7) в этом случае cd должно делиться на число $qp_1^{n_1}p_2^{n_2}\cdots p_s^{n_s}q_1^{m_1}q_2^{m_2}\cdots q_t^{m_t}$, а d не делится на это число. Заметим, что если d не делится на q, то квазитождество (7) будет ложно не только на алгебре (10), но и на $\mathcal{C}_q$, что противоречит определению Σ' и $\mathbf{K}_I$. Следовательно, d делится на q. Отсюда вытекает, что d не делится на $p_1^{n_1}p_2^{n_2}\ldots p_s^{n_s}$. Для любого $1 \le i \le s$ обозначим через n''_i максимальную степень p_i, на которую делится число d. Тогда квазитождество (7) ложно не только на алгебре (10), но и на алгебрах $\mathcal{C}_p$ таких, что $p_1^{n_1}p_2^{n_2}\cdots p_s^{n_s}q_1^{m_1}q_2^{m_2}\cdots q_t^{m_t}$ делится на p, а $p_1^{n''_1}p_2^{n''_2}\cdots p_s^{n''_s}q_1^{m_1}q_2^{m_2}\cdots q_t^{m_t}$ не делится на p. Очевидно, что

$$p_1^{n_1}p_2^{n_2}\cdots p_s^{n_s}q_1^{m_1}q_2^{m_2}\cdots q_t^{m_t} > p_1^{n''_1}p_2^{n''_2}\ldots p_s^{n''_s}q_1^{m_1}q_2^{m_2}\cdots q_t^{m_t}$$

и найденное квазитождество (7) истинно на алгебре $\mathcal{C}_{qp_1^{n''_1}p_2^{n''_2}\ldots p_s^{n''_s}q_1^{m_1}q_2^{m_2}\ldots q_t^{m_t}}$. Отсюда непосредственно вытекает, что система квазитождеств Σ' содержит конечную подсистему, из которой выводимо квазитождество (9). Таким образом, мы убедились в том, что система Σ' может состоять только из квазитождеств вида (5) и конъюнкций пар квазитождеств вида (5).

Пусть $p \in I$. Тогда система Σ' содержит квазитождество, ложное на алгебре $\mathcal{C}_p$. С учетом сказанного выше, без ограничения общности можно полагать, что это квазитождество эквивалентно паре квазитождеств

$$x^{cp} = x \to x = 0 \wedge x^d = x \to x = 0. \tag{11}$$

Очевидно, что это квазитождество истинно на алгебре $\mathcal{C}_{cdpq}$, где $q \in J$. Следовательно, система Σ' содержит квазитождество, отличное от (11), ложное на алгебре $\mathcal{C}_{cdpq}$. Без ограничения общности можно полагать, что это квазитождество имеет вид

$$x^{c'cdpq} = x \to x = 0 \wedge x^{d'} = x \to x = 0. \tag{12}$$

Очевидно, что из (12) вытекает (11), что противоречит независимости системы Σ'. Следовательно, $\mathbf{K}_I$ не имеет независимого базиса квазитождеств относительно $\mathbf{K}$. Теорема доказана.

Литература

1. Reznikoff I. Tout ensemble de formules de la logique classique est equivalent a un ensemble independant // C. R. Acad. Sci. Paris. 1965. Vol. 260. P. 2385–2388.

2. Tarski A. Equational logic and equational theories of algebras // Contrib. Math. Logic. Proc. Logic Colloq. Hannover, 1966. North-Holland, Amsterdam, 1968. P. 275–288.

3. Горбунов В. А. Покрытия в решетках квазимногообразий и независимая аксиоматизируемость // Алгебра и логика. 1977. Т. 16, № 5. С. 507–548.

4. Горбунов В. А. Алгебраическая теория квазимногообразий. Новосибирск: Науч. кн. 1999.

5. Мальцев А. И. Универсально аксиоматизируемые подклассы локально конечных классов моделей // Сиб. матем. журн. 1967. Т. 8, № 5. С. 1005–1014.

6. Malcev A. I. The metamathematics of algebraic systems (collected papers: 1936–1967). Amsterdam; L.: North-Holland Publishing Company, 1971.

Статья поступила 04.11.2004 г.