УДК 517.929

Е. В. Кукушкина

УСТОЙЧИВОСТЬ СТАЦИОНАРНЫХ СИСТЕМ ФУНКЦИОНАЛЬНО-РАЗНОСТНЫХ УРАВНЕНИЙ*

Введение

Понятие функционально-разностного уравнения (ФРУ) непосредственно обобщает понятие разностного уравнения с непрерывным временем [1–3]. Эволюционный подход в динамических системах с последействием, использующий понятие функционального пространства состояний [4], сближает теорию ФРУ с теорией функционально-дифференциальных уравнений (ФДУ). Поэтому терминология и методология исследования ФДУ [1, 4] может быть использована для ФРУ. В работе [4] установлена связь эволюционного подхода при изучении линейных дифференциальных уравнений с последействием с теорией сильно непрерывных полугрупп [5, 6]. Для линейных ФДУ этот подход развивался в [4, 7, 8] и других работах, а для линейных стационарных систем ФРУ – в [7, 9, 10]. В настоящей статье продолжается развитие данного подхода при изучении проблемы устойчивости стационарных систем ФРУ.

1. Сильно непрерывные полугруппы

Рассматривается линейная система ФРУ

$$x\,(t) = \int_{-r}^{0} d\eta\,(\vartheta)\,x\,(t+\vartheta)\,, \tag{1}$$

где $x\colon \mathbb{R} \to \mathbb{R}^n$; матричная функция η имеет ограниченную вариацию на $[-r, 0]$, $\eta\,(0) = \eta\,(-0) = 0$.

При сделанных предположениях задача Коши с начальным моментом $t_0 = 0$ и начальной функцией $\varphi \in \mathrm{C}\,([-r, 0]\,, \mathbb{R}^n)$, удовлетворяющей условию $\varphi\,(0) = \int_{-r}^{0} d\eta\,(\vartheta)\,\varphi\,(\vartheta)$, имеет единственное непрерывное решение $x\,(t, \varphi)$, $t \geqslant -r$ [11].

*Работа выполнена при поддержке гранта РФФИ № 06-01-00399.

При фиксированном $t \geqslant 0$ в качестве элемента решения будем рассматривать отрезок решения $x_t(\vartheta,\varphi) = x(t+\vartheta,\varphi)$, $-r \leqslant \vartheta \leqslant 0$. Имеем

$$x_t(\cdot,\varphi) \in \widetilde{\mathrm{C}} = \widetilde{\mathrm{C}}([-r,0],\mathbb{R}^n) = \\ = \Big\{ z : z \in \mathrm{C}([-r,0],\mathbb{R}^n),\ z(0) = \int_{-r}^{0} d\eta(\vartheta)\, z(\vartheta) \Big\}, \quad t \geqslant 0,$$

$$x_0(\vartheta,\varphi) = \varphi(\vartheta), \quad \vartheta \in [-r,0].$$

Элемент $x_t(\cdot,\varphi)$ можно рассматривать как образ элемента φ при некотором линейном отображении $\mathbb{T}(t) : \widetilde{\mathrm{C}}([-r,0],\mathbb{R}^n) \to \widetilde{\mathrm{C}}([-r,0],\mathbb{R}^n)$, $t \geqslant 0$. Отображение $\mathbb{T}$ можно представить в виде [11]:
при $t \in (0,r)$

$$(\mathbb{T}(t)\varphi)(\vartheta) = \begin{cases} \varphi(t+\vartheta), & \vartheta \in [-r,-t], \\ \displaystyle\int_{-r}^{0} dT(t+\vartheta,s)\,\varphi(s) + (I_n - T(t+\vartheta,0))\,\varphi(0), & \vartheta \in (-t,0]; \end{cases} \tag{2}$$

при $t \geqslant r$

$$(\mathbb{T}(t)\varphi)(\vartheta) = \int_{-r}^{0} dT(t+\vartheta,s)\,\varphi(s) + (I_n - T(t+\vartheta,0))\,\varphi(0), \quad \vartheta \in [-r,0],$$

где T – матричная функция; I_n – единичная матрица.

Теорема 1. *Семейство операторов $\{\mathbb{T}(t),\ t \geqslant 0\}$ является сильно непрерывной полугруппой.*

Теорема 2. *Инфинитезимальный оператор $\mathcal{A}$ сильно непрерывной полугруппы операторов $\{\mathbb{T}(t),\ t \geqslant 0\}$ на множестве*

$$D(\mathcal{A}) = \Big\{ \varphi :\ \varphi \in \mathrm{C}^1([-r,0],\mathbb{R}^n),\ \varphi(0) = \int_{-r}^{0} d\eta(\vartheta)\,\varphi(\vartheta), \\ \varphi'(0) = \int_{-r}^{0} d\eta(\vartheta)\,\varphi'(\vartheta) \Big\}$$

определяется формулой

$$(\mathcal{A}\varphi)(\vartheta) = \begin{cases} \varphi'(\vartheta), & \vartheta \in [-r,0), \\ \displaystyle\int_{-r}^{0} d\eta(s)\,\varphi'(s), & \vartheta = 0. \end{cases}$$

Теорема 3. *Спектр инфинитезимального оператора состоит из собственных чисел, которые являются нулями функции* $\det\left(I_n - \int_{-r}^{0} d\eta\,(\vartheta)\, e^{\lambda\vartheta}\right)$.

В работе ([7], гл. 12, разд. 3) сформулированные утверждения приведены без доказательства. Наложенное в этой работе требование на систему (1) $\underset{\vartheta\in[-\varepsilon,0]}{\operatorname{var}} \eta\,(\vartheta) \to 0$ при $\varepsilon \to 0$ в нашей постановке следует из условия $\eta(0) = \eta(-0) = 0$ [12]. Докажем последнюю теорему.

Доказательство. Значение $\psi \in D\,(\mathcal{A})$ резольвенты инфинитезимального оператора определяется уравнениями

$$\lambda\psi\,(\vartheta) - \frac{d\psi\,(\vartheta)}{d\vartheta} = \varphi\,(\vartheta)\,, \quad \vartheta \in [-r, 0)\,, \tag{3}$$

$$\lambda\psi\,(0) - \int_{-r}^{0} d\eta\,(s)\,\psi'\,(s) = \varphi\,(0)\,, \quad \varphi \in \widetilde{\mathrm{C}}\,([-r, 0]\,, \mathbb{R}^n)\,. \tag{4}$$

Решение уравнения (3) можно представить в виде

$$\psi(\vartheta) = e^{\lambda\vartheta}\psi(0) + \int_{\vartheta}^{0} e^{\lambda(\vartheta-s)}\varphi(s)\,ds, \quad \vartheta \in [-r, 0),$$

и продолжить по непрерывности на отрезок $[-r, 0]$. Для полученного решения условие $\psi \in D\,(\mathcal{A})$ будет выполнено, если

$$\psi(0) = \int_{-r}^{0} d\eta\,(s)\,\psi\,(s)\,,$$

так как $\psi \in \mathrm{C}^1\,([-r, 0]\,, \mathbb{R}^n)$ и

$$\int_{-r}^{0} d\eta(s)\psi'(s) = \lambda\int_{-r}^{0} d\eta(s)\psi(s) - \int_{-r}^{0} d\eta(s)\varphi(s) = \lambda\psi(0) - \varphi(0) = \psi'(0).$$

В результате для $\psi\,(0)$ имеем уравнение

$$\left(I_n - \int_{-r}^{0} d\eta\,(\vartheta)\,e^{\lambda\vartheta}\right)\psi\,(0) = \int_{-r}^{0} d\eta\,(\vartheta)\int_{\vartheta}^{0} e^{\lambda(\vartheta-s)}\varphi\,(s)\,ds. \tag{5}$$

Если $\det\left(I_n - \int_{-r}^{0} d\eta\,(\vartheta)\,e^{\lambda\vartheta}\right) \neq 0$, то уравнение (5) имеет единственное решение

$$\psi\,(0) = \left(I_n - \int_{-r}^{0} d\eta\,(\vartheta)\,e^{\lambda\vartheta}\right)^{-1}\int_{-r}^{0} d\eta\,(\vartheta)\int_{\vartheta}^{0} e^{\lambda(\vartheta-s)}\varphi\,(s)\,ds.$$

Таким образом, найдены резольвентное множество оператора $\mathcal{A}$

$$\rho(\mathcal{A}) = \left\{ \lambda : \ \det\left(I_n - \int_{-r}^{0} d\eta(\vartheta)\, e^{\lambda\vartheta} \right) \neq 0, \quad \lambda \in \mathbb{C} \right\},$$

где $\mathbb{C}$ – множество комплексных чисел, и определенная на этом множестве резольвента

$$(R(\lambda, \mathcal{A})\,\varphi)(\vartheta) = e^{\lambda\vartheta} \left(I_n - \int_{-r}^{0} d\eta(t) e^{\lambda t} \right)^{-1} \int_{-r}^{0} d\eta(t) \int_{t}^{0} e^{\lambda(t-s)} \varphi(s)\, ds +$$
$$+ \int_{\vartheta}^{0} e^{\lambda(\vartheta - s)} \varphi(s)\, ds, \quad \vartheta \in [-r, 0].$$

Если $\det\left(I_n - \int_{-r}^{0} d\eta(\vartheta) e^{\lambda\vartheta} \right) = 0$, то уравнение (5) имеет нетривиальное решение $\psi(0) \neq 0$ при $\varphi = 0$. Это решение определяет собственную функцию $\psi(\vartheta) = e^{\lambda\vartheta}\psi(0)$ оператора $\mathcal{A}$. Найдено спектральное множество

$$\sigma(\mathcal{A}) = \left\{ \lambda : \ \det\left(I_n - \int_{-r}^{0} d\eta(\vartheta)\, e^{\lambda\vartheta} \right) = 0, \ \lambda \in \mathbb{C} \right\}.$$

Спектр состоит из собственных чисел. Собственному числу λ_0 оператора $\mathcal{A}$ отвечает собственная функция $\varphi_0(\vartheta) = e^{\lambda_0\vartheta} K$, где K – нетривиальное решение уравнения

$$\left(\int_{-r}^{0} d\eta(\vartheta)\, e^{\lambda_0\vartheta} - I_n \right) K = 0. \tag{6}$$

Так как функция $g(\lambda) = \det\left(\int_{-r}^{0} d\eta(\vartheta)\, e^{\lambda\vartheta} - I_n \right)$ является целой, то в ограниченной области плоскости $\mathbb{C}$ лежит конечное число собственных чисел и каждое собственное число имеет конечную кратность. Кратному собственному числу λ_0 отвечают столько линейно независимых собственных функций оператора $\mathcal{A}$, сколько линейно независимых решений имеет уравнение (6). Теорема доказана.

Из полученного представления резольвенты следует, что $R(\lambda, \mathcal{A})$, $\lambda \in \rho(\mathcal{A})$, – компактный оператор [6].

Характеристическое уравнение имеет вид

$$\det\left(\int_{-r}^{0} d\eta(\vartheta)\, e^{\lambda\vartheta} - I_n \right) = 0. \tag{7}$$

Собственные числа λ оператора $\mathcal{A}$ лежат в области $S_-(\mathcal{A}) \leqslant \lambda \leqslant S_+(\mathcal{A})$, где $S_+(\mathcal{A}) = \sup\{\operatorname{Re}\lambda : \ \lambda \in \sigma(\mathcal{A})\}$, $S_-(\mathcal{A}) = \inf\{\operatorname{Re}\lambda : \ \lambda \in \sigma(\mathcal{A})\}$. Справедливо неравенство $S_+(\mathcal{A}) < +\infty$. Действительно, для любого $\varepsilon > 0$ имеем [12]

$$\left| \int_{-r}^{-\varepsilon} d\eta(\vartheta)\, e^{\lambda\vartheta} \right| \leqslant \operatorname*{var}_{\vartheta \in [-r, 0]} |\eta(\vartheta)|\, e^{-\varepsilon \operatorname{Re}\lambda}, \qquad \left| \int_{-\varepsilon}^{0} d\eta(\vartheta)\, e^{\lambda\vartheta} \right| \leqslant \operatorname*{var}_{\vartheta \in [-\varepsilon, 0]} |\eta(\vartheta)|,$$

$$\operatorname*{var}_{\vartheta\in[-\varepsilon,0]} |\eta(\vartheta)| \to 0 \quad \text{при} \quad \varepsilon \to 0.$$

Тогда $\int_{-r}^{0} d\eta(\vartheta)\, e^{\lambda\vartheta} \to 0$ при $\operatorname{Re}\lambda \to +\infty$.

Введем для уравнения (1) оператор монодромии $(U\varphi)(\vartheta) = x(\omega+\vartheta,\varphi)$, $\vartheta \in [-r,0]$, где ω – произвольное число, удовлетворяющее условию $\omega \geqslant r$. Собственной функции $\varphi_0(\vartheta) = e^{\lambda_0\vartheta}K$, $\vartheta \in [-r,0]$, оператора $\mathcal{A}$ отвечает решение $x(t,\varphi_0) = e^{\lambda_0 t}K$. Поэтому при $\rho_0 = e^{\lambda_0\omega}$ выполняется равенство $(U\varphi)(\vartheta) = e^{\lambda_0(\omega+\vartheta)}K = \rho_0 e^{\lambda_0\vartheta}K$. То есть каждому собственному числу λ_0 инфинитезимального оператора $\mathcal{A}$ отвечает собственное число ρ_0 оператора монодромии. Задача полного описания спектральных свойств оператора монодромии является сложной.

2. Устойчивость систем ФРУ

В настоящей работе ограничимся исследованием экспоненциальной устойчивости решений линейных стационарных систем ФРУ по отношению к возмущениям начальных функций.

Определение 1. Система (1) экспоненциально устойчива по отношению к возмущениям из множества $\widetilde{\mathrm{C}}$, если существуют постоянные $K, \alpha > 0$ такие, что справедлива оценка

$$\|x_t(\cdot,\varphi)\|_{\widetilde{\mathrm{C}}} \leqslant K\,\|\varphi\|_{\widetilde{\mathrm{C}}}\, e^{-\alpha t}, \quad t \geqslant 0.$$

Система (1) экспоненциально устойчива по отношению к возмущениям из множества

$$D\left(\mathcal{A}^2\right) = \widetilde{\mathrm{C}}^2 = \widetilde{\mathrm{C}}^2\left([-r,0],\mathbb{R}^n\right) = \Big\{\varphi:\ \varphi \in \mathrm{C}^2\left([-r,0],\mathbb{R}^n\right),$$
$$\varphi(0) = \int_{-r}^{0} d\eta(\vartheta)\varphi(\vartheta),\ \varphi'(0) = \int_{-r}^{0} d\eta(\vartheta)\varphi'(\vartheta),\ \varphi''(0) = \int_{-r}^{0} d\eta(\vartheta)\varphi''(\vartheta)\Big\},$$

если существуют постоянные K, $\alpha > 0$ такие, что справедлива оценка

$$\|x_t(\cdot,\varphi)\|_{\widetilde{\mathrm{C}}} \leqslant K\,\|\varphi\|_{\widetilde{\mathrm{C}}^2}\, e^{-\alpha t}, \quad t \geqslant 0.$$

Здесь

$$\|\varphi\|_{\widetilde{\mathrm{C}}} = \max_{\vartheta\in[-r,0]} |\varphi(\vartheta)|,$$
$$\|\varphi\|_{\widetilde{\mathrm{C}}^2} = \max\Big\{\max_{\vartheta\in[-r,0]} \big|\varphi(\vartheta)\big|,\ \max_{\vartheta\in[-r,0]} \big|\varphi'(\vartheta)\big|,\ \max_{\vartheta\in[-r,0]} \big|\varphi''(\vartheta)\big|\Big\}.$$

Функция η не имеет сингулярной части, если

$$\int_{-r}^{0} d\eta(\vartheta)\,\varphi(\vartheta) = -\sum_{k=1}^{\infty} A_k\varphi(-r_k) + \int_{-r}^{0} A(\vartheta)\,\varphi(\vartheta)\,d\vartheta,$$

где $0 < r_k \leqslant r$, $\sum\limits_{k=1}^{\infty} A_k < \infty$ и A – интегрируемая по Лебегу функция на $[-r, 0]$.

В [10] доказано следующее утверждение.

Теорема 4. *Если функция η не имеет сингулярной части, то для экспоненциальной устойчивости системы* (1) *по отношению к возмущениям из* $\widetilde{\mathrm{C}}$ *необходимо и достаточно, чтобы существовало* $\varepsilon > 0$, *для которого корни характеристического уравнения* (7) *лежат в области* $\{\lambda : \operatorname{Re}\lambda \leqslant -\varepsilon,\ \lambda \in \mathbb{C}\}$.

Следует отметить, что требование существования положительного ε в приведенной выше теореме является существенным, как показано в работе [13].

Можно снять дополнительные ограничения на функцию η , используемые в теореме 4, если экспоненциальную устойчивость системы (1) рассматривать по отношению к возмущениям из множества $D\left(\mathcal{A}^2\right)$.

Теорема 5. *Для экспоненциальной устойчивости системы* (1) *по отношению к возмущениям из* $D\left(\mathcal{A}^2\right)$ *достаточно, чтобы все корни характеристического уравнения* $\det\left(\int_{-r}^{0} d\eta(\vartheta)\, e^{\lambda\vartheta} - I_n\right) = 0$ *удовлетворяли условию* $\operatorname{Re}\lambda \leqslant -\varepsilon$ *при некотором* $\varepsilon > 0$.

Доказательство. Пусть $\varphi \in D\left(\mathcal{A}^2\right)$. На множестве $\{\lambda : \operatorname{Re}\lambda = \gamma_1, \lambda \in \mathbb{C}\}$, где $-\varepsilon < \gamma_1 < 0$, используя равенства

$$\int_{t}^{0} e^{\lambda(t-s)}\varphi(s)\,ds = -\frac{1}{\lambda}e^{\lambda t}\varphi(0) + \frac{1}{\lambda}\varphi(t) + \frac{1}{\lambda}\int_{t}^{0} e^{\lambda(t-s)}\varphi'(s)\,ds, \quad t \in [-r, 0],$$

$$\int_{t}^{0} e^{\lambda(t-s)}\varphi'(s)\,ds = -\frac{1}{\lambda}e^{\lambda t}\varphi'(0) + \frac{1}{\lambda}\varphi'(t) + \frac{1}{\lambda}\int_{t}^{0} e^{\lambda(t-s)}\varphi''(s)\,ds, \quad t \in [-r, 0],$$

преобразуем формулу, определяющую значения резольвенты

$$R(\lambda, \mathcal{A}) = \frac{1}{\lambda - \gamma} I + R_1(\lambda).$$

Здесь I – тождественный оператор в пространстве $\widetilde{\mathrm{C}}$, $-\varepsilon < \gamma < \gamma_1$,

$$(R_1(\lambda)\varphi)(\vartheta) = -\frac{\gamma}{\lambda(\lambda-\gamma)}\varphi(\vartheta) + \frac{1}{\lambda^2}\varphi'(\vartheta) + \frac{1}{\lambda^2}\int_{\vartheta}^{0} e^{\lambda(\vartheta-s)}\varphi''(s)ds -$$
$$-\frac{1}{\lambda^2}e^{\lambda\vartheta}\left(\int_{-r}^{0} d\eta\,(t)\,e^{\lambda t} - I_n\right)^{-1}\int_{-r}^{0} d\eta\,(t)\int_{t}^{0} e^{\lambda(t-s)}\varphi''\,(s)\,ds, \quad \vartheta\in[-r,0]\,.$$

Имеет место оценка

$$\|R_1\,(\lambda)\,\varphi\|_{\widetilde{\mathrm{C}}} \leqslant \frac{K_0\,\|\varphi\|_{\widetilde{\mathrm{C}}^2}}{|\lambda-\gamma|^2},$$

где

$$K_0 = M^2\frac{1-e^{-\gamma_1 r}}{\gamma_1}\left(1 + e^{-\gamma_1 r}\max_{\operatorname{Re}\lambda=\gamma_1}\left\|\left(\int_{-r}^{0} d\eta(t)e^{\lambda t} - I_n\right)^{-1}\right\|\operatorname*{var}_{t\in[-r,0]}\eta(t)\right) +$$
$$+ M|\gamma| + M^2, \qquad M = \sqrt{1-\frac{\gamma|\gamma-2\gamma_1|}{\gamma_1^2}}.$$

Справедлива формула [5]

$$(\mathbb{T}\,(t)\,\varphi)\,(\vartheta) = \frac{1}{2\pi i}\int_{\gamma_1-i\infty}^{\gamma_1+i\infty}(R\,(\lambda,\mathcal{A})\,\varphi)\,(\vartheta)\,e^{\lambda t}d\lambda,$$

$t>0$, $\vartheta\in[-r,0]$. Находим

$$(\mathbb{T}\,(t)\,\varphi)\,(\vartheta) = \varphi\,(\vartheta)\,e^{\gamma t} + \frac{1}{2\pi i}\int_{\gamma_1-i\infty}^{\gamma_1+i\infty}(R_1\,(\lambda)\,\varphi)\,(\vartheta)\,e^{\lambda t}d\lambda.$$

Оценим

$$\|\mathbb{T}\,(t)\,\varphi\|_{\widetilde{\mathrm{C}}} \leqslant e^{\gamma t}\,\|\varphi\|_{\widetilde{\mathrm{C}}} + \frac{K_0\,\|\varphi\|_{\widetilde{\mathrm{C}}^2}\,e^{\gamma_1 t}}{2\pi}\int_{-\infty}^{+\infty}\frac{ds}{(\gamma_1-\gamma)^2+s^2} \leqslant K_1\,\|\varphi\|_{\widetilde{\mathrm{C}}^2}\,e^{\gamma_1 t},$$

$t\geqslant 0$, $\varphi\in D\left(\mathcal{A}^2\right)$, $K_1 = 1+\frac{K_0}{2(\gamma_1-\gamma)}$. Теорема доказана.

3. Области устойчивости ФРУ

Для нахождения области устойчивости ФРУ в пространстве параметров необходимо решить проблему Рауса–Гурвица для характеристического уравнения (7). Методы ее решения описываются в примерах.

Пример 1. Найти условия экспоненциальной устойчивости для скалярного уравнения

$$x(t) = a\int_{-\pi}^{0} \cos(s)\, x(t+s)\, ds. \tag{8}$$

В рассматриваемом примере $\eta(\vartheta) = a\sin(\vartheta)$, $r = \pi$, имеем характеристическое уравнение

$$a\int_{-\pi}^{0} \cos(\vartheta)\, e^{\lambda\vartheta} d\vartheta - 1 = \frac{a\lambda\left(1+e^{-\lambda\pi}\right)}{\lambda^2+1} - 1 = 0.$$

Для нахождения области устойчивости в случае одного параметра применим метод Д-разбиений. В этом методе характеристическое уравнение определяет отображение комплексной плоскости переменной λ в комплексную плоскость параметра $a : \lambda \to \frac{\lambda^2+1}{\lambda\left(1+e^{-\lambda\pi}\right)}$. Параметр a временно считаем комплексным. Тогда кривая Д-разбиений определяется параметрическим уравнением

$$a = \frac{1-\omega^2}{i\omega\left(1+\cos\omega\pi\right) + \omega\sin\omega\pi}, \quad -\infty < \omega < +\infty,$$

или системой параметрических уравнений

$$\operatorname{Re} a = \frac{\left(1-\omega^2\right)\operatorname{tg}(\omega\pi/2)}{2\omega}, \qquad \operatorname{Im} a = \frac{\omega^2-1}{2\omega}, \quad -\infty < \omega < +\infty.$$

Областью устойчивости уравнения (8) будем называть область значений параметра a, входящего в это уравнение, для которых все корни характеристического уравнения лежат в левой полуплоскости. Для значений параметра из области устойчивости уравнение (8) будет экспоненциально устойчиво. Области Д-разбиения изображены на рис. 1. Точка $a = 0$ принадлежит области устойчивости. Затемненная область на рис. 1 является областью устойчивости уравнения (8). Возвращаясь к вещественному параметру a, находим, что при $a < 2/\pi$ уравнение (8) экспоненциально устойчиво.

Пример 2. Найти условия экспоненциальной устойчивости для скалярного уравнения

$$x(t) = -ax\left(t-\frac{\pi}{2}\right) + b\int_{-\pi}^{0} \cos\vartheta x(t+\vartheta)\, d\vartheta. \tag{9}$$

В рассматриваемом примере $\eta(\vartheta) = a1\left(-\vartheta-\frac{\pi}{2}\right) + b\sin\vartheta$, $r = \pi$. Характеристическое уравнение имеет вид

$$-ae^{\frac{\lambda\pi}{2}} + \frac{b\lambda\left(1+e^{-\lambda\pi}\right)}{\lambda^2+1} - 1 = 0, \qquad \lambda \neq \pm i.$$

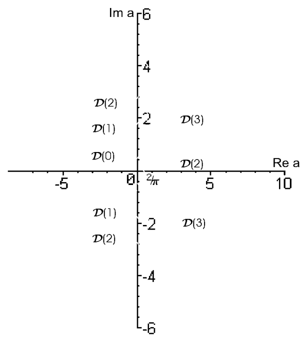

Рис. 1. Область устойчивости уравнения (8)

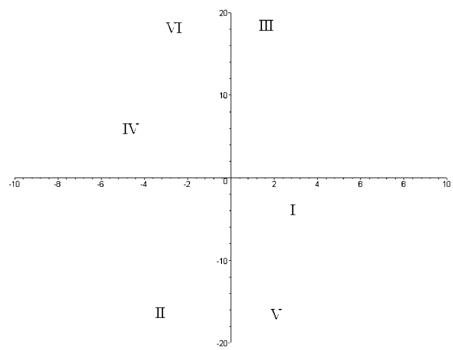

Рис. 2. Область устойчивости уравнения (9)

Для нахождения области устойчивости применим метод Д-разбиений в случае двух параметров [14]. В этом методе характеристическое уравнение определяет отображение комплексной плоскости переменной λ в плоскость параметров a и b. Кривая Д-разбиений определяется системой параметрических уравнений

$$\begin{cases} -a\cos\dfrac{\omega\pi}{2}+b\omega\dfrac{\sin\omega\pi}{-\omega^2+1}-1=0,\\ -a\sin\dfrac{\omega\pi}{2}+b\omega\dfrac{1+\cos\omega\pi}{-\omega^2+1}=0.\end{cases}$$

В этом случае имеется одна особая прямая $a=-1$ и неособая кривая, определяемая параметрическими формулами

$$a=-\frac{\cos\left(\frac{\omega\pi}{2}\right)}{\cos(\omega\pi)},\quad b=-\frac{1-\omega^2}{2\omega}\frac{\sin\left(\frac{\omega\pi}{2}\right)}{\cos\left(\frac{\omega\pi}{2}\right)\cos(\omega\pi)},\quad -\infty<\omega<+\infty.$$

Область устойчивости на рис. 2 показана серым цветом. Действительно, слева область устойчивости ограничивает неособая кривая $a=-1$, справа – прямая

$a = 1$. Докажем, что правая граница $a = 1$. Римскими цифрами обозначим семейства неособых кривых:

семейство I при $\frac{3}{2} + 4m < \omega < \frac{5}{2} + 4m$, где m – целое число;

семейство II при $\frac{5}{2} + 4m < \omega < 3 + 4m$;

семейство III при $3 + 4m < \omega < \frac{7}{2} + 4m$;

семейство IV при $\frac{7}{2} + 4m < \omega < \frac{1}{2} + 4(m+1)$;

семейство V при $\frac{1}{2} + 4(m+1) < \omega < 1 + 4(m+1)$;

семейство VI при $1 + 4(m+1) < \omega < \frac{3}{2} + 4(m+1)$.

Пусть для семейства I $\omega = 2 + 4m + \varepsilon_m$, $\varepsilon_m \to 0$ при $m \to \infty$. Тогда

$$a = 1 + \frac{3}{8}\pi^2\varepsilon_m^2 + O\left(\varepsilon_m^4\right), \quad b = \frac{(4m+2+\varepsilon_m)^2 - 1}{2(4m+2+\varepsilon_m)}\left(\frac{\pi}{2}\varepsilon_m + O\left(\varepsilon_m^3\right)\right).$$

Из второго равенства находим $\varepsilon_m = \frac{b}{\pi m} + O\left(m^{-2}\right)$. Таким образом, кривые семейства I будут стремиться к прямой $a = 1$ при $m \to \infty$.

Пример 3. Найти условия экспоненциальной устойчивости для системы уравнений

$$x(t) = \int_{-\pi}^{0} \begin{pmatrix} a & \cos\vartheta - \vartheta\sin\vartheta \\ 2\vartheta & 2\cos\vartheta \end{pmatrix} x(t+\vartheta)\,d\vartheta. \tag{10}$$

В рассматриваемом примере матричная функция $\eta(\vartheta) = \begin{pmatrix} a\vartheta & \vartheta\cos\vartheta \\ \vartheta^2 & \sin 2\vartheta \end{pmatrix}$, $r = \pi$. Имеем характеристическое уравнение

$$\left(a\frac{1 - e^{-\lambda\pi}}{\lambda} - 1\right)\left(\frac{2\lambda\left(1 - e^{-\lambda\pi}\right)}{\lambda^2 + 4} - 1\right) + \\ + \frac{\left(2 - 2e^{-\lambda\pi}\right)\left(-\lambda^3 + \lambda + \left(-\lambda^3 + \lambda + \pi + \pi\lambda^2\right)e^{-\lambda\pi}\right)}{\left(\lambda^2 + 1\right)^2} = 0.$$

Возвращаясь к вещественному параметру a, находим, что при $a < 1.72705$ система (10) экспоненциально устойчива (рис. 3).

Пример 4. Рассмотрим математическую модель полисинаптической нейронной сети с обратной связью, которая описывается системой вида [15]:

$$\begin{aligned} v_2(t) &= A\left[S_c v_3(t-\tau) + S_b v_4(t-\tau)\right], \\ v_3(t) &= A S_d v_2(t-\tau), \\ v_4(t) &= A\left[S_f v_2(t-\tau) + S_c v_3(t-\tau)\right]. \end{aligned} \tag{11}$$

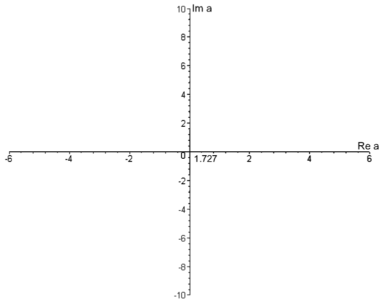

Рис. 3. Область устойчивости уравнения (10)

Предполагается, что $v_1 = 0$, A – положительный параметр, S_b, S_c, S_d, S_f равны либо -1 (тормозной синапс), либо $+1$ (возбуждающий синапс).

Здесь матричная функция

$$\eta(\vartheta) = \begin{cases} 0, & \vartheta > -\tau, \\ -B, & \vartheta = -\tau, \end{cases} \quad \text{где} \quad B = \begin{pmatrix} 0 & AS_c & AS_b \\ AS_d & 0 & 0 \\ AS_f & AS_c & 0 \end{pmatrix}.$$

Следовательно, характеристическое уравнение имеет вид

$$-1 + A^2 e^{-2\lambda\tau}(S_d S_c + S_b S_f) + A^3 e^{-3\lambda\tau} S_d S_b S_c = 0. \tag{12}$$

Введем следующие обозначения: $Ae^{-\lambda\tau} = z$, $S_d S_c + S_b S_f = a$, $S_d S_b S_c = b$, тогда уравнение (12) перепишется в виде $az^2 + bz^3 = 1$. Это уравнение допускает шесть реализаций:

$$-2z^2+z^3=1, \quad -2z^2-z^3=1, \quad z^3=1, \quad -z^3=1, \quad 2z^2+z^3=1, \quad 2z^2-z^3=1.$$

Пусть z_i, $i = 1, 2, 3$, – корни какой-либо реализации. Для экспоненциальной устойчивости соответствующей реализации системы (11) необходимо и достаточно, чтобы $A < \min\limits_{1 \leqslant i \leqslant 3} |z_i|$.

Пусть пары (S_d, S_c), (S_b, S_f) содержат различные синапсы. В этом случае $a = -2$ и система (11) экспоненциально устойчива тогда и только тогда, когда $A < 0.6733480913$. Пусть одна из пар (S_d, S_c), (S_b, S_f) содержит одинаковые синапсы, а другая – различные синапсы. При этом $a = 0$ и система (11) экспоненциально устойчива тогда и только тогда, когда $A < 1$. Пусть пары (S_d, S_c), (S_b, S_f) содержат одинаковые синапсы. В этом случае $a = 2$ и система (11) экспоненциально устойчива тогда и только тогда, когда $A < 0.6180339890$.

Литература

1. Веллман Р., Кук К. Л. Дифференциально-разностные уравнения. М.: Мир, 1967.

2. Миролюбов А. А., Солдатов М. А. Линейные неоднородные разностные уравнения. М.: Наука, 1986.

3. Шарковский А. Н., Майстренко Ю. А., Романенко Е. Ю. Разностные уравнения и их приложения. Киев, 1986.

4. Красовский Н. Н. Некоторые задачи теории устойчивости движения. М.: Гос. изд-во физ.-мат. лит., 1959.

5. Хилле Э., Филлипс Р. Функциональный анализ и полугруппы. М., 1962.

6. Данфорд Н., Шварц Дж. Линейные операторы. Общая теория. М.: Мир, 1962.

7. Хейл Дж. Теория функционально-дифференциальных уравнений. М.: Мир, 1984.

8. Шиманов С. Н. К теории линейных дифференциальных уравнений с последействием // Дифференц. уравнения. 1965. Т. 1, № 1. С. 102–116.

9. Cruz M. A., Hale J. K. Stability of functional differential equations of neutral type // J. Differential Equations 1970. № 7. P. 334–355.

10. Henry D. Linear autonomous neutral functional differential equations // Ibid. 1974. Vol. 15. № 1. P. 106–128.

11. Долгий Ю. Ф., Кукушкина Е. В. Представления решений стационарных функционально-разностных уравнений // Изв. Урал. гос. ун-та. 2002. № 22. (Сер. Математика и механика. Вып. 4). С. 62–80.

12. Натансон И. П. Теория функций вещественной переменной. М.: Наука, 1950.

13. Громова П. С., Зверкин А. М. О тригонометрических рядах, суммой которых является непрерывная и неограниченная на числовой оси функция – решение уравнения с отклоняющимся аргументом // Дифференц. уравнения. 1968. Т. 4, № 10. С. 1774–1784.

14. Долгий Ю. Ф. Автоматическое регулирование. Свердловск: УрГУ, 1987.

15. Дейч С. Модели нервной системы. М.: Мир, 1970.