УДК 517.977

Н. Н. Красовский, А. Н. Котельникова

ОБ ОДНОЙ ЗАДАЧЕ О СТАБИЛИЗАЦИИ*

Рассматривается задача о стабилизации движения в системе с последействием при неопределенных и стохастических помехах [1–10]. Процесс формируется по принципу обратной связи на базе вероятностных стабилизирующих воздействий [4, 11, 12].

1. Уравнения возмущенного движения

Полагаем, что возмущенное движение $y_\omega[t]$ объекта описывается дифференциальным уравнением Ито [13, 14] с запаздываниями времени [15–19]:

$$\begin{aligned} dy_\omega[t] = \Big(&G^{[0]}y_\omega[t] + G^{[h]}y_\omega[t-h] + r\big(t, y_\omega[t], y_\omega[t-h]\big) + B^{[s]}u_\omega^{[s]}[t] + \\ &+ f\big(u_\omega[t], v[t], y_\omega^{[u]}\big[t - h_\omega^{[u]}[t]\big], y_\omega^{[v]}\big[t - h^{[v]}[t]\big]\big)\Big)\, dt + \\ &+ B^{[W]}\big(t, y_\omega[t]\big)\, dW_\omega[t], \end{aligned} \tag{1.1}$$

$$|y| < H, \quad H > 0 - \text{const}, \qquad t_* \leqslant t, \qquad t_0 + h \leqslant t_*, \quad h > 0 - \text{const}.$$

Здесь и далее $y = \{y_i, i = \overline{1,n}\}$ – n-мерный вектор-столбец,

$$|y| = \big(y_1^2 + \cdots + y_n^2\big)^{\frac{1}{2}}, \ \overline{0} = \{y_i = 0, i = \overline{1,n}\}, \ \overline{\theta} = \{y(\vartheta) = \overline{0}, -h \leqslant \vartheta \leqslant 0\}. \tag{1.2}$$

Индекс ω обозначает элементарное случайное событие. Символ

$$y_\omega[t, \bullet] = \{y_\omega[t+\vartheta], -h \leqslant \vartheta \leqslant 0\} \tag{1.3}$$

обозначает историю движения (1.1), реализовавшуюся к моменту t. Потенциальная история, которая может реализоваться, а может и нет, будет обозначаться символом

$$y(\bullet) = \{y(\vartheta), -h \leqslant \vartheta \leqslant 0\},$$

так что может случиться равенство

$$y[t, \bullet] = y(\bullet) : \quad \{y[t+\vartheta] = y(\vartheta), -h \leqslant \vartheta \leqslant 0\}.$$

*Работа выполнена при поддержке Российского фонда фундаментальных исследований (проект № 06-01-00436) и гранта Президента РФ по поддержке ведущих научных школ НШ-8512.2006.1.

Допустимы непрерывные функции $y(\bullet)$. Будем использовать нормы

$$\|y(\bullet)\|_C = \max_{-h\leqslant\vartheta\leqslant 0} |y(\vartheta)|, \quad \|y(\bullet)\|_{L_{2\bullet}} = \Big(|y(0)|^2 + \int_{-h}^{0} |y(\vartheta)|^2 d\vartheta\Big)^{\frac{1}{2}}. \qquad (1.4)$$

Вообще, будем часто заменять точкой аргументы и индексы, когда это не должно вызывать недоразумения.

Непрерывная функция $r(\bullet)$ удовлетворяет условиям Липшица

$$\big|r\big(t,\ y_{(2)}[t], y_{(2)}[t-h]\big) - r\big(t,\ y_{(1)}[t],\ y_{(1)}[t-h]\big)\big| \leqslant$$
$$\leqslant L^{[r]} \cdot \big(|y_{(2)}[t] - y_{(1)}[t]| + |y_{(2)}[t-h] - y_{(1)}[t-h]|\big), \qquad (1.5)$$

$$L^{[r]} > 0 - \mathrm{const},$$

и неравенству

$$\big|r(t, y[t], y[t-h])\big| \leqslant \delta^{[r]} \cdot \max\big\{|y[t]|, |y[t-h]|\big\}, \quad \delta^{[r]} > 0 - \mathrm{const}. \qquad (1.6)$$

В выражении $B^{[s]} \cdot u^{[s]}[t]$ функция $u^{[s]}[t]$ формируется по принципу обратной связи по истории $y_\omega[t,\bullet]$ линейно относительно $y_\omega[t,\bullet]$ согласно [20–22]. Функция $f(\bullet)$ отражает влияние управляющих воздействий u, $h^{[u]}$ и помех v, $h^{[v]}$. Векторы u, v и скаляры $h^{[\bullet]}$ – элементы конечномерных компактов:

$$u \in M^{[u]}, \quad v \in M^{[v]}, \quad h^{[\bullet]} \in M^{[h]} = [-h, 0]. \qquad (1.7)$$

В каждой области

$$|y| < H^* < H, \quad H^* > 0 - \mathrm{const} \qquad (1.8)$$

функция $f(\bullet)$ непрерывна по совокупности аргументов относительно их метрики, которая определена нормой

$$\big\|\{u, v, y^{[u]}, y^{[v]}\}\big\|_* = \max\big\{|u|, |v|, |y^{[u]}|, |y^{[v]}|\big\}, \qquad (1.9)$$

и, стало быть, в каждой области (1.8) функция $f(\bullet)$ ограниченна. Выполняются условия Липшица

$$\Big|f\left(u, v, y^{[u]}_{(2)}, y^{[v]}_{(2)}\right) - f\left(u, v, y^{[u]}_{(1)}, y^{[v]}_{(1)}\right)\Big| \leqslant L^{[f]} \cdot \left(\Big|y^{[u]}_{(2)} - y^{[u]}_{(1)}\Big| + \Big|y^{[v]}_{(2)} - y^{[v]}_{(1)}\Big|\right),$$

$$L^{[f]} > 0 - \mathrm{const}. \qquad (1.10)$$

В (1.1) истории $y^{[u]}[t,\bullet]$ и $y^{[v]}[t,\bullet]$ отражают одну и ту же реализацию $y[t,\bullet]$, но по-разному, в соответствии с их разной ролью в процессе.

В броуновском члене $B^{[W]}(\bullet)W_\omega[t]$ величина $W_\omega[t]$ – стандартный r-мерный $(0 < r \leqslant n)$ винеровский процесс [13, 23, 24]. Матрица-функция $B^{[W]}(t,y) = \big\{b^{[W]}_{(1)}(t,y),\ldots,b^{[W]}_{(r)}(t,y)\big\}$ непрерывна, удовлетворяет условиям Липшица

$$\big\|B^{[W]}(t,y_{(2)}) - B^{[W]}(t,y_{(1)})\big\|_E \leqslant L^{[W]}\cdot\big|y_{(2)} - y_{(1)}\big|, \tag{1.11}$$

$$L^{[W]} > 0 - \text{const}$$

и неравенству

$$\big\|B^{[W]}(t,y)\big\|_E \leqslant \delta^{[W]}\cdot|y|, \quad \delta^{[W]} > 0 - \text{const}. \tag{1.12}$$

Здесь и ниже полагаем

$$\|B\|_E = \max_{|y|\leqslant 1}(By). \tag{1.13}$$

Задача состоит в формировании воздействий u, $h^{[u]}$, которые обеспечивают устойчивость по вероятности [15,25–28] невозмущенного движения $y[t] \equiv \overline{0}$ при постоянно действующих возмущениях $r[\bullet]$, $v[\bullet]$, $h^{[v]}[\bullet]$, $B^{[W]}(\bullet)$, $W_\omega[\bullet]$. Задача рассматривается в двух вариантах: для конечного отрезка времени $t_* \leqslant t \leqslant T$ и для бесконечного полуинтервала $t_* \leqslant t < \infty$.

2. Схема формирования процесса

Воздействия u, $h^{[u]}$ формируются в органе управления по принципу обратной связи в дискретной по времени t схеме с малым шагом $t_\ell \leqslant t \leqslant t_{\ell+1}$, $\ell = 1,2,\ldots;$ $t_1 = t_*$ по реализации истории:

$$y_\omega[t_\ell,\bullet] = \big\{y_\omega[t_\ell+\vartheta], -h \leqslant \vartheta \leqslant 0\big\}. \tag{2.1}$$

Эта реализация $y_\omega[t_\ell,\bullet]$ определяет случайную величину $\big\{u_\omega, h^{[u]}_\omega; \mu(du,dh;t_\ell)\big\}$, реализация которой

$$\Big(u_\omega[t_\ell,\bullet], h^{[u]}_\omega[t_\ell,\bullet]\Big) = \Big\{u_\omega[t] = u_\omega[t_\ell], h^{[u]}[t] = h^{[u]}[t_\ell], t_\ell < t < t_{\ell+1}\Big\} \tag{2.2}$$

определяет воздействия $u[t]$ и $h^{[u]}[t]$, трактуемые как результат испытания по выбору значения случайной величины $\big\{u_\omega, h^{[u]}_\omega\big\}$ с вероятностями, которые определяются мерой $\mu(du,dh;t_\ell) = \mu\big(du,dh;t_\ell \mid y_\omega[t_\ell,\bullet]\big)$.

Вместе с мерой $\mu(\bullet)$ может реализоваться любая пара кусочно-непрерывных справа помех

$$\Big(v[t_\ell,\bullet], h^{[v]}[t_\ell,\bullet]\Big) = \Big\{v[t], h^{[v]}[t],\ t_\ell \leqslant t < t_{\ell+1}\Big\}. \tag{2.3}$$

Случайная пара $\{u_\omega, h^{[u]}_\omega\}$ независима от помех (2.3), которые могут зависеть от меры $\mu(\bullet)$, но которые не зависят от случающихся реализаций $u_\omega[t_\ell], h^{[u]}_\omega[t_\ell]$. Вместе с воздействиями (2.2), (2.3) реализуется помеха $W_\omega[t]$, $t_\ell \leqslant t < t_{\ell+1}$. Случайная пара $\{u_\omega, h^{[u]}_\omega\}$ и помеха $W_\omega[t]$ независимы.

В случае задачи о стабилизации на отрезке $t_* \leqslant t \leqslant T$ полагаем, что выполняются неравенства

$$t_{\ell+1} - t_\ell \leqslant \delta^{[t]}, \quad \delta^{[t]} > 0 - \text{const}, \quad 0 < \delta^{[t]} < h, \quad \ell = 1, 2, \dots \,. \tag{2.4}$$

В случае задачи о стабилизации на полуинтервале $t_* \leqslant t < \infty$ полагаем, что выполняются неравенства

$$\delta^{[t]}\ell^{-q} \leqslant t_{\ell+1} - t_\ell \leqslant \delta^{[t]}\ell^{-\gamma_*}, \quad \delta^{[t]} > 0, \quad 0 < \delta^{[t]} < h, \quad q, \gamma_* - \text{const}; \tag{2.5}$$

$$\frac{2}{3} < q < 1, \quad \frac{2}{3} < \gamma_* < q\,.$$

Пусть назначены числа $\varepsilon > 0$ и $\beta < 1$. Задача состоит в выборе линейного стабилизатора [20–22]

$$B^{[s]}u^{[s]}_\omega[t] = B^{[s]}U_* y_\omega[t], \tag{2.6}$$

в выборе вероятностной меры $\mu\big(du, dh^{[u]}; t_\ell \mid y_\omega[t_l, \bullet]\big)$ и в назначении оценок (1.6), (1.12), (2.4) и (2.5) и числа $\delta^{[y]}_* > 0$ таких, чтобы выполнялось следующее условие сильной устойчивости по вероятности [15, 25–28]:
в случае $t_* \leqslant t \leqslant T$ – условие

$$P\Big(\sup_{t_* \leqslant t \leqslant T} |y_\omega[t]| < \varepsilon\Big) > \beta; \tag{2.7}$$

в случае $t_* \leqslant t < \infty$ – условие

$$P\Big(\sup_{t_* \leqslant t < \infty} |y_\omega[t]| < \varepsilon\Big) > \beta, \tag{2.8}$$

какова бы ни была исходная история $y_\omega[t_*, \bullet]$, удовлетворяющая неравенству

$$\big\|y_\omega[t_*, \bullet]\big\|_C \leqslant \delta^{[y]}_*, \quad \delta^{[y]}_* > 0 - \text{const}, \tag{2.9}$$

и какими бы ни оказались допустимые помехи $r\big(t, y_\omega[t], y_\omega[t-h]\big)$, $v[t]$, $h^{[v]}[t]$, $B^{[W]}\big(t, y_\omega[t]\big)dW_\omega[t]$, удовлетворяющие условиям (1.6), (1.12), (2.4) и (2.5).

В (2.7), (2.8) и ниже символ $P(\dots)$ обозначает вероятность соответствующего события.

3. Стабилизация

Обратимся к уравнению

$$\dot{y}[t] = G^{[0]}y[t] + G^{[h]}y[t-h] + B^{[s]}u^{[s]}[t]. \tag{3.1}$$

Предположим, что для укороченного уравнения

$$\dot{y}[t] = G^{[0]}y[t] + B^{[s]}u^{[s]}[t] \tag{3.2}$$

выполнено достаточное условие стабилизируемости [29]: ранг матрицы

$$K^{[s]} = \{B^{[s]}, G^{[0]}B^{[s]}, \ldots, G^{[0]}B^{[s](n-1)}\} \tag{3.3}$$

равен n. Тогда, следуя [29], построим определенно-положительную функцию Ляпунова [30]

$$v(y) = y'Ay \tag{3.4}$$

и функцию

$$u^{[s]}(y) = U^{[s]}y \tag{3.5}$$

такие, что производная $\dot{v}_{(3.6)}\big(y[t]\big)$ на движениях, порожденных уравнением

$$\dot{y}[t] = G^{[0]}y[t] + B^{[s]}U^{[s]}y[t], \tag{3.6}$$

будет удовлетворять условию

$$\dot{v}_{(3.6)}\big(y[t]\big) = y'[t]2A^{[0]} \cdot \big(G^{[0]} + B^{[s]}U^{[s]}\big)y[t] = -y'[t]Sy[t], \tag{3.7}$$

где $y'Sy$ есть определенно-положительная квадратичная форма.

Следуя [18], выберем квадратичный функционал Ляпунова

$$V\big(y(\bullet)\big) = V\big(\{y(\vartheta), -h \leqslant \vartheta \leqslant 0\}\big) = y'(0)Ay(0) + \int_{-h}^{0} y'(\vartheta)Ly(\vartheta)\,d\vartheta, \tag{3.8}$$

где $y'Ly$ – определенно-положительная квадратичная форма. Предположим, что правая производная $\dot{V}_{(3.9)}\big(y[t,\bullet]\big)$ этого функционала $V\big(y[t,\bullet]\big)$, в силу уравнения

$$\dot{y}[t] = G^{[0]}y[t] + G^{[h]}y[t-h] + B^{[s]}U^{[s]}y[t], \tag{3.9}$$

удовлетворяет условию

$$\dot{V}_{(3.9)}\big(y[t,\bullet]\big) = y'[t]2A \cdot \big(G^{[0]} + B^{[s]}U^{[s]}\big)y[t] + y'[t]AG^{[h]}y[t-h] +$$

$$+ y'[t-h]G^{[h]'}Ay[t] + y'[t]Ly[t] - y'[t-h]Ly[t-h] =$$

$$= -\big(y'[t], y'[t-h]\big) \cdot Q \cdot \begin{pmatrix} y[t] \\ y[t-h] \end{pmatrix} =$$

$$= \sum_{i=1,j=1}^{n} q_{ij}^{[0]} y_i[t] y_j[t] + \sum_{i=1,j=1}^{n} 2q_{ij}^{*}(y_i[t] y_j[t-h]) + \sum_{i=1,j=1}^{n} q_{ij}^{[h]} y_i[t-h] y_j[t-h], \tag{3.10}$$

где $\big(y'[t], y'[t-h]\big) \cdot Q \cdot \big(y'[t], y'[t-j]\big)'$ есть определенно-положительная квадратичная форма от переменных $y_i[t]$, $i = 1, \ldots, n$; $y_j[t-h]$, $j = 1, \ldots, n$. То есть выполняются условия Сильвестра [29]

$$q_{11}^{[0]} > 0, \quad \begin{vmatrix} q_{11}^{[0]} & q_{12}^{[0]} \\ q_{21}^{[0]} & q_{22}^{[0]} \end{vmatrix} > 0, \ \ldots, \quad \begin{vmatrix} q_{11}^{[0]} & \ldots & q_{1n}^{[0]}, & q_{11}^{*} & \ldots & q_{1n}^{*} \\ \ldots & \ldots & \ldots & \ldots & \ldots & \ldots \\ q_{n1}^{[0]} & \ldots & q_{nn}^{[0]} & q_{n1}^{*} & \ldots & q_{nn}^{*} \\ q_{11}^{*} & \ldots & q_{n1}^{*} & q_{11}^{[h]} & \ldots & q_{1n}^{[h]} \\ \ldots & \ldots & \ldots & \ldots & \ldots & \ldots \\ q_{1n}^{*} & \ldots & q_{nn}^{*} & q_{n1}^{[h]} & \ldots & q_{nn}^{[h]} \end{vmatrix} > 0. \tag{3.11}$$

Обозначим символом $s'[t]$ градиент функционала $V\big(y[t,\bullet]\big)$ по $y[t]$, полагая под этим термином вектор-строку

$$s'[t] = \mathrm{grad}_{y[t]} V\big(y[t,\bullet]\big) = y'[t] 2A. \tag{3.12}$$

Обратимся к процессу $y_\omega[t]$ (1.1). Пусть к моменту $t = t_\ell$, $\ell = 1, 2, \ldots$ реализовалась история $y_\omega[t_\ell, \bullet]$. Рассмотрим следующую задачу на минимакс [4]:

$$\min_{\mu(du, dh^{[u]})} \sup_{(v, h^{[v]})} s'_\omega[t_\ell] \int\limits_{M^{[u]}} \int\limits_{M^{[h]}} f\big(u, v, y_\omega[t_\ell - h^{[u]}], y_\omega[t_\ell - h^{[v]}]\big) \mu\big(du, dh^{[u]}\big) =$$

$$= \zeta_0\big(t_\ell; y_\omega[t_\ell, \bullet]\big). \tag{3.13}$$

Предположим, что неравенство

$$\zeta_0\big(t_\ell; y_\omega[t_\ell, \bullet]\big) \leqslant 0 \tag{3.14}$$

справедливо при всех тех значениях $y_\omega[t_\ell, \bullet]$, которые могут встретиться. Пусть $\mu_0\big(du, dh^{[u]}; t_\ell\big) = \mu_0\big(du, dh^{[u]}; t_\ell \big| y_\omega[t_\ell, \bullet]\big)$ – вероятностная мера, которая определяет решение задачи (3.13). Тогда в согласии с материалом из раздела 2 полагаем, что реализации $u_\omega^{(0)}[t_\ell]$, $h_\omega^{[u](0)}[t_\ell]$ управляющих воздействий u и $h^{[u]}$ определяются значениями случайной величины $\big\{u_\omega, h_\omega^{[u]}; \mu_0(du, dh^{[u]}; t_\ell)\big\}$, так что выполняются равенства

$$\big\{u_\omega^{(0)}[t_\ell, \bullet],\ h_\omega^{[u](0)}[t_\ell, \bullet]\big\} = \big\{u_\omega^{(0)}[t] = u_\omega^{(0)}[t_\ell],\ h_\omega^{[u](0)}[t] = h_\omega^{[u](0)}[t_\ell],\ t_\ell < t < t_{\ell+1}\big\}. \tag{3.15}$$

Стало быть, процесс $y_\omega[t]$ будет описываться уравнением

$$dy_\omega[t] = \Big(G^{[0]}y_\omega[t] + G^{[h]}y_\omega[t-h] + r\big(t, y_\omega[t], y_\omega[t-h]\big) + B^{[s]}U^{[s]}y_\omega[t] +$$

$$+ f\big(u_\omega^{(0)}[t_\ell], v[t], y_\omega\big[t_\ell - h_\omega^{[u](0)}[t_l]\big], y_\omega\big[t - h^{[v]}[t]\big]\big)\Big)dt +$$

$$+ B^{[W]}\big(t, y_\omega[t]\big)dW_\omega[t]. \tag{3.16}$$

Функционал $V\big(y(\bullet)\big)$ удовлетворяет условию определенной положительности [18] по величине $|y(0)|$

$$V\big(y(\bullet)\big) = V\big(\{y(\vartheta), -h \leqslant \vartheta \leqslant 0\}\big) \geqslant w_*\big(|y(0)|\big), \tag{3.17}$$

и функционал $V\big(y(\bullet)\big)$ допускает бесконечно малый высший предел [18] по норме $||y(\bullet)||_C$

$$V\big(y(\bullet)\big) \leqslant w^*\big(||y(\bullet)||_C\big), \tag{3.18}$$

где непрерывные неубывающие по r функции $w_*(r) > 0$, $w^*(r) > 0$ при $r > 0$, $w^*(0) = 0$.

4. Устойчивость процесса

Справедливо утверждение:

Теорема 1. *Пусть процесс формируется оговоренным в разделах* 1–3 *способом. Тогда для любых* $\varepsilon > 0$ *и* $\beta < 1$ *можно указать в ограничениях* (1.6), (1.12), (2.4), (2.5) *и* (2.9) *малые числа* $\delta^{[r]}$, $\delta^{[W]}$, $\delta^{[t]}$ *и* $\delta_*^{[y]}$ *так, что при этих ограничениях будет выполнено неравенство* (2.7) *или соответственно неравенство* (2.8).

Доказательство. Пусть задано число $\varepsilon > 0$, $\varepsilon < H$. Назначим число $\varepsilon_* = \frac{1}{2}\varepsilon$. Рассмотрим движение $y_\omega[t]$ (3.16), порожденное исходной историей $y_\omega[t_*, \bullet]$, при условии (2.9), где

$$\delta_*^{[y]} < \varepsilon_*\,. \tag{4.1}$$

Введем искусственно движение $y_\omega^*[t]$ следующим образом [15,25–28]. Если на некоторой реализации $y_\omega[\bullet]$ на отрезке $t_* \leqslant \tau \leqslant t$ выполняется неравенство

$$\big|y_\omega[\tau]\big| < \varepsilon, \quad t_* \leqslant \tau \leqslant t, \qquad \big|y_\omega[t_\ell]\big| < \varepsilon_*, \quad t_* \leqslant t_l < t, \tag{4.2}$$

то полагаем

$$y_\omega^*[\tau] = y_\omega[\tau], \quad t_* \leqslant \tau \leqslant t. \tag{4.3}$$

Если же для реализации $y_\omega[\bullet]$ условие (4.2) нарушается впервые так, что либо сначала выполняется равенство

$$\bigl|y_\omega[\tau(\omega)]\bigr| = \varepsilon, \quad \tau(\omega) = t \neq t_\ell, \tag{4.4}$$

либо сначала выполняется неравенство

$$\varepsilon_* \leqslant \bigl|y_\omega[\tau(\omega)]\bigr| \leqslant \varepsilon, \quad \tau(\omega) = t = t_\ell, \tag{4.5}$$

то полагаем, что (4.3) выполняется для $\tau \leqslant t = \tau(\omega)$. А при $\tau \geqslant t = \tau(\omega)$ для рассматриваемой реализации полагаем равенство

$$y^*_\omega[\tau] = y_\omega[\tau(\omega)], \quad \tau \geqslant \tau(\omega). \tag{4.6}$$

Пусть к моменту t_ℓ, $\ell \geqslant 1$ реализовалась история $y^*_\omega[t_\ell, \bullet]$, $t_\ell < \tau(\omega)$, $\bigl|y^*_\omega[t_\ell]\bigr| < \varepsilon_*$. Эта история определяет случайные воздействия $u^{(0)}_\omega[t_\ell]$, $h^{[u](0)}_\omega[t_\ell]$. Вместе с помехами $r\bigl(t, y^*_\omega[t], y^*_\omega[t-h]\bigr)$, $v[t]$, $h^{[v]}[t]$, $B^{[W]}\bigl(t, y^*_\omega[t]\bigr)\, dW_\omega[t]$ эти воздействия определяют реализации движений $y^*_\omega[t]$. Каждая из этих реализаций при фиксированных $\bigl\{v[t], h^{[v]}[t]; t_\ell \leqslant t < t_{\ell+1}\bigr\}$ порождается парой реализаций $\Bigl\{\bigl\{u^{(0)}_\omega[t] = u^{(0)}_\omega[t_\ell], h^{[u](0)}_\omega[t] = h^{[u](0)}_\omega[t_\ell]\bigr\}, W_\omega[t];\, t_\ell < t < t_{\ell+1}\Bigr\}$. При этом вероятностное распределение компоненты $\bigl\{u^{(0)}_\omega[\bullet], h^{[u](0)}_\omega[\bullet]\bigr\}$ определяется мерой $\mu_0\bigl(du, dh^{[u]}; t_\ell\bigr)$.

Рассмотрим значение функционала $V\bigl(y^*_\omega[t, \bullet]\bigr)$, $t_\ell \leqslant t \leqslant t_{\ell+1}$. Если на некоторой реализации случится $\bigl|y^*_\omega[\tau(\omega)]\bigr| = \varepsilon$ при $t_\ell < \tau(\omega) < t_{\ell+1}$, то при $t \geqslant \tau(\omega)$ будет выполняться равенство $y^*_\omega[t] = y^*_\omega[\tau(\omega)]$ и мы примем к тому же, что при этом будет выполняться равенство

$$V^*\bigl(y^*_\omega[t, \bullet]\bigr) = V\bigl(y^*_\omega[\tau(\omega), \bullet]\bigr), \quad t \geqslant \tau(\omega), \tag{4.7}$$

а стало быть, будет выполняться равенство

$$\dot V^*_+\bigl(y^*_\omega[t, \bullet]\bigr) = 0, \quad t \geqslant \tau(\omega). \tag{4.8}$$

Здесь верхний индекс $*$ при V как раз и означает, что величина функционала $V\bigl(y^*[t, \bullet]\bigr)$ замораживается с момента $\tau(\omega)$ согласно равенствам (4.7), (4.8), которые, как и равенство (4.6), назначаются искусственно [15, 25–28]. Иначе говоря, индекс $*$ при V подчеркивает, что с момента $\tau(\omega)$ условно замораживается весь аргумент функционала $V(\bullet)$ – вся история $y_\omega[t, \bullet]$.

В (4.8) $\dot V^*_+\bigl(y^*_\omega[t, \bullet]\bigr)$ – правая производная функционала $V^*\bigl(y^*_\omega[t, \bullet]\bigr)$ на движении $y_\omega[t]$ при оговоренном условии (4.7) замораживания значения $V\bigl(y^*_\omega[t, \bullet]\bigr)$ вместе с замораживанием согласно (4.6) значения $y^*_\omega[t]$ начиная с момента $t = \tau(\omega)$.

Если на рассматриваемой реализации $y^*_\omega[t,\bullet]$ нет момента $\tau(\omega)\in(t_\ell,t_{\ell+1})$, в который $\big|y^*_\omega[\tau(\omega)]\big|=\varepsilon$, то обратимся к любому значению $t\in(t_\ell,t_{\ell+1})$. А если на реализации $y^*_\omega[t,\bullet]$ есть момент $\tau(\omega)\in(t_\ell,t_{\ell+1})$, когда $\big|y^*_\omega[\tau(\omega)]\big|=\varepsilon$, то обратимся к моменту $t\in\big[t_\ell,\tau(\omega)\big)$; в каждом из этих случаев рассмотрим величину [15, 25–28]:

$$\dot{\tilde{V}}_+\big(y^*_\omega[t,\bullet]\big)=\lim_{\tau\to t+0}\frac{E\Big\{V\big(y^*_\omega[\tau,\bullet]\big)\mid y^*_\omega[t,\bullet]\Big\}-V\big(y^*_\omega[t,\bullet]\big)}{\tau-t},\tag{4.9}$$

которая является усредненной правой производной функционала $V\big(y^*_\omega[t,\bullet]\big)$ в силу уравнения (3.16). Величина (4.9) определяется бесконечно малым производящим оператором [24] рассматриваемого вероятностного процесса. Здесь и ниже $E\{\ldots|\ldots\}$ – условное математическое ожидание.

Пусть $W_\omega[t,\bullet]$ обозначает реализацию

$$W_\omega[t,\bullet]=\big\{W_\omega[\tau],\ t_l\leqslant\tau\leqslant t\big\}.\tag{4.10}$$

Обратимся к условному математическому ожиданию

$$E\Big\{V\big(y^*_\omega[t,\bullet]\big)\mid y^*_\omega[t_\ell,\bullet]\Big\}=E_{W_\omega[t,\bullet],\big(u^{(0)}_\omega[t_\ell],h^{[u](0)}_\omega[t_\ell]\big)}\Big\{V\big(y^*_\omega[t,\bullet]\big)\mid y^*_\omega[t_\ell,\bullet]\Big\}=$$

$$=\int\limits_{M^{[u]}}\int\limits_{M^{[h]}}E_{W_\omega[t,\bullet]}\Big\{V\big(y^*_\omega[t,\bullet]\big)\mid u_\omega[t_\ell],h^{[u]}_\omega[t_\ell]\Big\}\,\mu_0\big(du,dh^{[u]};t_\ell\mid y^*_\omega[t_\ell,\bullet]\big),$$

$$t_\ell\leqslant t\leqslant t_{\ell+1}.\tag{4.11}$$

В согласии с формулами Ито [13, 14, 24, 31] и Дынкина [15, 21, 24–28] получаем из (4.11) равенство

$$\frac{d}{dt_+}\bigg(E_{W_\omega[t,\bullet],\big(u^{(0)}_\omega[t_\ell],h^{[u](0)}_\omega[t_\ell]\big)}\Big\{V\big(y^*_\omega[t,\bullet]\big)\mid y^*_\omega[t_\ell,\bullet]\Big\}\bigg)=$$

$$=\int\limits_{M^{[u]}}\int\limits_{M^{[h]}}E_{W_\omega[t,\bullet]}\Big\{\dot{\tilde{V}}_+\big(y^*_\omega[t,\bullet]\big)\mid W_\omega[t,\bullet],u_\omega[t_\ell],h^{[u]}_\omega[t_\ell]\Big\}\,\mu_0\big(du,dh^{[u]};t_\ell\mid y^*_\omega[t_\ell,\bullet]\big).\tag{4.12}$$

Если для некоторой реализации $y^*_\omega[t]$ момент времени $t\geqslant\tau(\omega)$, где $\big|y^*_\omega[\tau(\omega)]\big|=\varepsilon$, $\tau(\omega)\in(t_\ell,t_{\ell+1})$, то согласно (4.8) для этой реализации в (4.12) будет $\dot{\tilde{V}}_+\big(y^*_\omega[t,\bullet]\big)=\dot V^*\big(y^*_\omega[t,\bullet]\big)=0$. Иначе, в согласии с формулой Ито [31], получаем равенство

$$\dot{\tilde{V}}_+\big(y^*_\omega[t,\bullet]\big) = \dot{V}_+\big(y[t,\bullet]\big)_{(3.9),\, y=y^*_\omega} + s'[t]\cdot\Big(r\big(t,y^*_\omega[t],y^*_\omega[t-h]\big) + \\ + f\big(u^{(0)}_\omega[t_\ell],v[t],y^*_\omega\big[t_\ell - h^{[u](0)}_\omega[t_\ell]\big],y^*_\omega\big[t-h^{[v]}[t]\big]\big)\Big) + \\ + \sum_{j=1}^{r} b^{[W]\prime}_{(j)}\big(t,y^*_\omega[t]\big)\,A\,b^{[W]}_{(j)}\big(t,y^*_\omega[t]\big). \tag{4.13}$$

В самом деле, согласно (3.8) имеем равенство

$$\dot{\tilde{V}}_+\big(y^*_\omega[t,\bullet]\big) = \frac{\widetilde{d}}{dt_+}\big(y^{*\prime}_\omega[t]Ay^*_\omega[t]\big) + \frac{\widetilde{d}}{dt_+}\bigg(\int_{-h}^{0} y^{*\prime}_\omega[t+\vartheta]Ly^*_\omega[t+\vartheta]\,d\vartheta\bigg), \tag{4.14}$$

где символ $\frac{\widetilde{d}}{dt_+}(\ldots)$ обозначает усредненную производную, в силу уравнения (3.16). Дифференциал Ито $dy^*_\omega[t]$ определен равенством (3.16), так как для данной реализации $y^*_\omega[\tau] = y_\omega[\tau]$ при $t \leqslant \tau < \tau(\omega)$. Поэтому по дифференциальной формуле Ито [31] для квадратичной формы $y'Ay$ справедливо равенство

$$\frac{\widetilde{d}}{dt_+}\big(y^{*\prime}_\omega[t]Ay^*_\omega[t]\big) = 2y^{*\prime}_\omega[t]\cdot A\cdot\Big(G^{[0]}y^*_\omega[t] + G^{[h]}y^*_\omega[t-h] + \\ + r\big(t,y^*_\omega[t],y^*_\omega[t-h]\big) + B^{(s)}U^{[s]}y^*_\omega[t] + \\ + f\big(u^{(0)}_\omega[t_\ell],v[t],y^*_\omega\big[t_\ell - h^{[u](0)}_\omega[t_\ell]\big],y^*_\omega\big[t-h^{[v]}_\omega[t]\big]\big)\Big) + \\ + \sum_{j=1}^{r} b^{[W]\prime}_{(j)}\big(t,y^*_\omega[t]\big)\,A\,b^{[W]}_{(j)}\big(t,y^*_\omega[t]\big). \tag{4.15}$$

Обратимся далее к величине

$$\frac{\widetilde{d}}{dt_+}\bigg(\int_{-h}^{0} y^{*\prime}_\omega[t+\vartheta]Ly^*_\omega[t+\vartheta]\,d\vartheta\bigg) = \frac{\widetilde{d}}{dt_+}\bigg(\int_{t-h}^{t} y^{*\prime}_\omega[\vartheta]Ly^*_\omega[\vartheta]\,d\vartheta\bigg) = \\ = \lim_{\tau\to t+0}\frac{E\Big\{\int_{\tau-h}^{\tau} y^{*\prime}_\omega[\xi]Ly^*_\omega[\xi]\,d\xi \mid y^*_\omega[t,\bullet]\Big\} - \int_{t-h}^{t} y^{*\prime}_\omega[\vartheta]Ly^*_\omega[\vartheta]\,d\vartheta}{\tau - t} = \\ = \lim_{\tau\to t+0}\frac{E\Big\{\int_{t}^{\tau} y^{*\prime}_\omega[\xi]Ly^*_\omega[\xi]\,d\xi \mid y^*_\omega[t,\bullet]\Big\} - \int_{t-h}^{\tau-h} y^{*\prime}_\omega[\vartheta]Ly^*_\omega[\vartheta]\,d\vartheta}{\tau - t} = \\ = \lim_{\tau\to t+0}\frac{E\Big\{\int_{t}^{\tau} y^{*\prime}_\omega[\xi]Ly^*_\omega[\xi]\,d\xi \mid y^*_\omega[t,\bullet]\Big\}}{\tau - t} - y^{*\prime}[t-h]Ly^*[t-h]. \tag{4.16}$$

В соответствии с дифференциально-интегральной формулой Дынкина [15,21, 24–28] воспользуемся равенством

$$E\Big\{ \int_t^\tau y_\omega^{*\prime}[\xi] L y_\omega^*[\xi]\, d\xi \mid y_\omega^*[t,\bullet]\Big\} = \\ = E\Big\{ \int_t^\tau y_\omega^{*\prime}[t] L y_\omega^*[t]\, d\xi + \int_t^\tau \int_t^\xi \Big(\frac{\widetilde{d}}{d\eta}_+ \big(y_\omega^{*\prime}[\eta] L y_\omega^*[\eta]\big)\Big)\, d\eta \mid y_\omega^*[t,\bullet]\Big\}. \tag{4.17}$$

В (4.17) усредненная правая производная $\frac{\widetilde{d}}{d\eta}_+(y_\omega^{*\prime}[\eta] L y_\omega^*[\eta])$ обращается в нуль для тех реализаций $y_\omega^*[\bullet]$, для которых соответствующий момент замораживания $\tau_{y_\omega^*[\bullet]}(\omega) \leqslant \eta$. А при условии $\eta < \tau_{y_\omega^*[\bullet]}(\omega)$ названная производная определяется снова дифференциальной формулой Ито [31] в соответствии с дифференциалом $dy_\omega^*[\eta]$ (3.16), где t заменяется на η и y_ω на y_ω^*. Но тогда получается оценка

$$\Big| \int_t^\tau \int_t^\xi \Big(\frac{\widetilde{d}}{d\eta}_+ \big(y_\omega^{*\prime}[\eta] L y_\omega^*[\eta]\big)\Big) d\eta \Big| \leqslant C \cdot (\tau - t)^2, \quad C - \mathrm{const}. \tag{4.18}$$

Из оценок (4.14)–(4.18) с учетом (3.12) и (3.10) вытекает справедливость равенства (4.13).

Обратимся теперь к оценке рассматриваемой производной, которая, стало быть, выражается равенством (4.13), полагая, что для фиксированной реализации $y_\omega^*[t]$ имеем $t < \tau(\omega) \leqslant t_{\ell+1}$.

Из (3.10) следует соотношение

$$\begin{aligned} \dot{\widetilde{V}}_+\big(y_\omega^*[t,\bullet]\big) = &-\big(y_\omega^{*\prime}[t], y_\omega^{*\prime}[t-h]\big)\, Q \cdot \big(y_\omega^{*\prime}[t], y_\omega^{*\prime}[t-h]\big)' + \\ &+ s'[t] \cdot \Big(r\big(t, y_\omega^*[t], y_\omega^*[t-h]\big)\Big) + \big(s'_\omega[t] - s'_\omega[t_\ell]\big) \cdot \big(\ \ldots\ \big) + \\ &+ s'_\omega[t_\ell]\Big(f\big(u_\omega^{(0)}[t_\ell], v[t], y_\omega^*\big[t_\ell - h_\omega^{[u](0)}[t_\ell]\big], y_\omega^*\big[t - h^{[v]}[t]\big]\big)\Big) + \\ &+ \frac{1}{2}\sum_{j=1}^r b_{(j)}^{[W]}\big(t, y_\omega^*[t]\big)\, A\, b_{(j)}^{[W]}\big(t, y_\omega^*[t]\big), \end{aligned} \tag{4.19}$$

и при выполнении условий (1.6), (1.13) и (3.11) получаем неравенство

$$\begin{aligned} \dot{\widetilde{V}}_+\big(y_\omega^*[t,\bullet]\big) \leqslant &\big(-\alpha + C^{[r]}\delta^{[r]} + C^{[W]}\delta^{[W]}\big) \cdot \big(|y_\omega^*[t]|^2 + |y_\omega^*[t-h]|^2\big) + \\ &+ \big(s'_\omega[t] - s'_\omega[t_\ell]\big) \cdot \big(\ \ldots\ \big) + s'_\omega[t_\ell] \cdot \big(\ \ldots\ \big), \quad \alpha > 0 - \mathrm{const}. \end{aligned} \tag{4.20}$$

Обратимся к величине $s'_\omega[t] - s'_\omega[t_l]$. Имея в виду (4.12), оценим математическое ожидание для величины

$$E\Big\{|s_\omega[t] - s_\omega[t_\ell]|^2 \mid y_\omega^*[t_\ell,\bullet]\Big\} = E\Big\{2\big(y_\omega^{*\prime}[t] - y_\omega^{*\prime}[t_\ell]\big)\, A\, \Big(\big(y_\omega^*[t] - y_\omega^*[t_\ell]\big) \mid y_\omega^*[t_\ell,\bullet]\Big)\Big\}. \tag{4.21}$$

Подобно предыдущему, учитывая дифференциал Ито (3.16), получаем для квадратичной формы $y'Ay$ в согласии с формулами Ито и Дынкина оценку

$$E\Big\{|s_\omega[t]-s_\omega[t_\ell]|^2 \;\big|\; y^*_\omega[t_\ell,\bullet]\Big\} \leqslant C^{[s]}\cdot(t-t_\ell), \quad C^{[s]} - \text{const.} \tag{4.22}$$

Отсюда, согласно неравенству Коши–Буняковского [23], следует оценка

$$E\Big\{|s_\omega[t]-s_\omega[t_\ell]| \;\big|\; y^*_\omega[t_\ell,\bullet]\Big\} \leqslant C^{[s]}_*\cdot(t-t_\ell)^{\frac{1}{2}}, \quad C^{[s]}_* - \text{const.} \tag{4.23}$$

Обратимся к величине $f(\ldots)$ в (4.19), которую представим в таком виде:

$$\begin{aligned} f(\ldots) = {} & f\big(u^{(0)}_\omega[t_\ell], v[t], y^*_\omega\big[t_\ell - h^{[u](0)}_\omega[t_\ell]\big], y^*_\omega\big[t-h^{[v]}_*[t]\big]\big) + \\ & + \Big(f\big(u^{(0)}_\omega[t_\ell], v[t], y^*_\omega\big[t_\ell - h^{[u](0)}_\omega[t_\ell]\big], y^*_\omega\big[t-h^{[v]}[t]\big]\big) - \\ & - f\big(u^{(0)}_\omega[t_\ell], v[t], y^*_\omega\big[t_\ell - h^{[u](0)}_\omega[t_\ell]\big], y^*_\omega\big[t-h^{[v]}_*[t]\big]\big)\Big). \end{aligned} \tag{4.24}$$

Здесь значение $h^{[v]}_*[t]$ для каждого момента $t\in[t_\ell,t_{\ell+1})$ выбирается из условий: если $t-h[t]\geqslant t-t_\ell$, то $h^{[v]}_*[t]=h^{[v]}[t]$, иначе $h^{[v]}_*[t]=t-t_\ell$. В обоих случаях получается $t-h^{[v]}_*[t]=t_\ell-h^{[v]*}[t]$, $h^{[v]*}[t]\geqslant 0$. Поэтому аргумент $h^{[v]*}[t]=t_\ell-t+h^{[v]}_*[t]$ попадает в то множество значений $h^{[v]}$, по которым вычисляется верхняя грань в (3.13).

В согласии с условием (1.10) имеем неравенство

$$\begin{aligned} & E\Big\{\big|f\big(\ldots, y^*_\omega\big[t-h^{[v]}[t]\big]\big) - f\big(\ldots, y^*_\omega\big[t-h^{[v]}_*[t]\big]\big)\big| \;\big|\; y^*_\omega[t_\ell,\bullet]\Big\} \leqslant \\ & \qquad \leqslant L^{[f]}\cdot E\Big\{\big|y^*_\omega\big[t-h^{[v]}[t]\big] - y^*_\omega\big[t-h^{[v]}_*[t]\big]\big| \;\big|\; y^*_\omega[t_\ell,\bullet]\Big\}. \end{aligned} \tag{4.25}$$

Подобно предыдущему, получаем оценки

$$\begin{aligned} & E\Big\{\big|y^*_\omega\big[t-h^{[v]}[t]\big] - y^*_\omega\big[t-h^{[v]}_*[t]\big]\big| \;\big|\; y^*_\omega[t_\ell,\bullet]\Big\} \leqslant \\ & \quad \leqslant \bigg(E\Big\{\big|y^*_\omega\big[t-h^{[v]}[t]\big] - y^*_\omega\big[t-h^{[v]}_*[t]\big]\big|^2 \;\big|\; y^*_\omega[t_\ell,\bullet]\Big\}\bigg)^{1/2} \leqslant \\ & \quad \leqslant \bigg(\int_{t-h^{[v]}_*[t]}^{t-h^{[v]}[t]} E\Big\{\frac{\dot{\tilde{d}}}{d\tau}\Big(\big|y^*_\omega[\tau] - y^*_\omega\big[t-h^{[v]}_*[t]\big]\big|^2\Big) \;\big|\; y^*_\omega[t_\ell,\bullet]\Big\}d\tau\bigg)^{1/2} \leqslant \\ & \quad \leqslant C^{[f]}_*\cdot\big|\big(t-h^{[v]}[t]\big)-\big(t-h^{[v]}_*[t]\big)\big|^{\frac{1}{2}} \leqslant C^{[f]}_*\cdot\big(t_{\ell+1}-t_\ell\big)^{\frac{1}{2}}, \quad C^{[f]}_* > 0 - \text{const.} \end{aligned} \tag{4.26}$$

Обратимся затем к оценке величины

$$E\Big\{s'[t_\ell]\cdot f\big(u_\omega[t_\ell],\ v[t],\ y^*_\omega\big[t_\ell-h^{[u]}_\omega[t_\ell]\big],\ y^*_\omega\big[t-h^{[v]}_*[t]\big]\big)\ \big|\ y^*_\omega[t_\ell,\bullet]\Big\}=$$

$$=E\Big\{s'[t_\ell]\cdot f\big(u_\omega[t_\ell],\ v[t],y^*_\omega\big[t_\ell-h^{[u]}_\omega[t_\ell]\big],y^*_\omega\big[t_\ell-h^{[v]*}[t]\big]\big)\ \big|\ y^*_\omega[t_\ell,\bullet]\Big\}=$$

$$=E_{W_\omega[t,\bullet],\left(u_\omega[t_\ell],h^{[u]}_\omega[t_\ell]\right)}\Big\{s'[t_\ell]\cdot f(\ldots)\Big\}=$$

$$=\Big\{s'[t_\ell]\cdot \int\limits_{M^{[u]}}\int\limits_{M^{[h]}} E_{W_\omega[t,\bullet]}\left\{\begin{matrix} f\big(u_\omega[t_\ell],\ v[t],\ y^*_\omega[t_\ell-h^{[u]}_\omega[t_\ell]], \\ y^*_\omega[t_\ell-h^{[v]*}[t]]\big)\ \big|\ u_\omega[t_\ell],\ h^{[u]}_\omega[t_\ell]\end{matrix}\right\}\times$$

$$\times\,\mu_0(du,dh^{[u]};t_\ell\ \big|\ y^*_\omega[t_\ell,\bullet])\Big\}=$$

$$=\Big\{s'[t_\ell]\cdot \int\limits_{M^{[u]}}\int\limits_{M^{[h]}} E_{\{W_\omega[t,\bullet],(1)\}}\left\{\begin{matrix} f\big(u_\omega[t_\ell],\ v[t],\ y^*_\omega[t_\ell-h^{[u]}_\omega[t_\ell]], \\ y^*_\omega[t_\ell-h^{[v]*}[t]]\big)\ \big|\ u_\omega[t_\ell],\ h^{[u]}_\omega[t_\ell]\end{matrix}\right\}\times$$

$$\times\,\mu_0\Big(du,dh^{[u]};t_\ell\ \Big|\ y^*_\omega[t_\ell,\bullet]\Big)\Big\}+$$

$$+\Big\{s'[t_\ell]\cdot \int\limits_{M^{[u]}}\int\limits_{M^{[h]}} E_{\{W_\omega[t,\bullet],(2)\}}\left\{\begin{matrix} f\big(u_\omega[t_\ell],\ v[t],\ y^*_\omega[t_\ell-h^{[u]}_\omega[t_\ell]], \\ y^*_\omega[t_\ell-h^{[v]*}[t]]\big)\ \big|\ u_\omega[t_\ell],\ h^{[u]}_\omega[t_\ell]\end{matrix}\right\}\times$$

$$\times\,\mu_0\Big(du,dh^{[u]};t_\ell\ \Big|\ y^*_\omega[t_\ell,\bullet]\Big)\Big\},\tag{4.27}$$

где, стало быть, $h^{[v]*}[t]\in\big[0,h-(t-t_\ell)\big]$. В (4.27) символом $\{W_\omega[t,\bullet],(1)\}$ обозначена совокупность тех реализаций $W_\omega[t,\bullet]$, которые вместе с фиксированной парой $\big(u^{(0)}_\omega[t_\ell],h^{[u](0)}_\omega[t_\ell]\big)$ порождают такие реализации $y^*_\omega[\tau]$, $t_\ell\leqslant\tau\leqslant t$, для которых момент замораживания $\tau(\omega)$, если он есть, удовлетворяет неравенству $\tau(\omega)>t$. А $\{W_\omega[t,\bullet],(2)\}$ есть совокупность реализации $W_\omega[t,\bullet]$, которые при фиксированной паре $\big(u^{(0)}_\omega[t_\ell],h^{[u](0)}_\omega[t_\ell]\big)$ порождают реализации $y^*_\omega[\tau]$, $t_\ell\leqslant\tau\leqslant t$, для которых $\tau(\omega)\in(t_\ell,t]$.

Оценим условную вероятность

$$P\Big(W_\omega[t,\bullet]\in\big\{\{W_\omega[t,\bullet],(1)\}\ \big|\ u^{(0)}_\omega[t_\ell],h^{[u](0)}_\omega[t_\ell];\ y^*_\omega[t_\ell,\bullet]\big\}\Big)\geqslant$$

$$\geqslant 1-P\Big(\sup_{t_\ell\leqslant\tau\leqslant t_{\ell+1}}\big|y^*_\omega[\tau]\big|=\varepsilon\ \big|\ u^{(0)}_\omega[t_\ell],h^{[u](0)}_\omega[t_\ell];\ y^*_\omega[t_\ell,\bullet]\Big).$$

Подобно предыдущему получается оценка

$$P\Big(\sup_{t_\ell\leqslant\tau\leqslant t_{\ell+1}}\big|y^*_\omega[\tau]\big|=\varepsilon\,\big|\,u^{(0)}_\omega[t_\ell],h^{[u](0)}_\omega[t_\ell];\,y^*_\omega[t_\ell,\bullet]\Big)\leqslant$$
$$\leqslant P\Big(\sup_{t_\ell\leqslant\tau\leqslant t_{\ell+1}}\big|y^*_\omega[\tau]-y^*_\omega[t_\ell]\big|\geqslant(\varepsilon-\varepsilon_*)\,\big|\,u^{(0)}_\omega[t_\ell],h^{[u](0)}_\omega[t_\ell];\,y^*_\omega[t_\ell,\bullet]\Big)\leqslant$$
$$\leqslant\left(\frac{E\big\{|y^*_\omega[t]-y^*_\omega[t_\ell]|^2\mid\ldots\big\}}{(\varepsilon-\varepsilon_*)^2}\right)^{\frac12}\leqslant$$
$$\leqslant C^{[f]}\cdot\left((\varepsilon-\varepsilon_*)^{-2}\int_{t_\ell}^{t_{\ell+1}}E\Big\{\frac{\dot{\tilde d}}{d\tau}\big(|y^*_\omega[\tau]-y^*_\omega[t_\ell]|^2\big)|\ldots\Big\}\,d\tau\right)^{\frac12}\leqslant$$
$$\leqslant C^{[\varepsilon]}\cdot(t-t_\ell)^{\frac12},\qquad C^{[\varepsilon]}-\text{const}.\tag{4.28}$$

Из этих оценок, учитывая, что число $C^{[\varepsilon]}$ в (4.28) можно полагать не зависящим от пары $\big(u^{(0)}_\omega[t_\ell],h^{[u](0)}_\omega[t_\ell]\big)$, принимая во внимание, что мера $\mu_0\big(\bullet;t_\ell\mid y^*_\omega[t_\ell,\bullet]\big)$ есть решение задачи на минимакс (3.13), а также учитывая, что аргумент $h^{[v]*}[t]$ в (4.27) содержится во множестве тех значений $h^{[v]}$, по которым в (3.13) вычисляется верхняя грань, придем, в согласии с неравенством (3.14), к следующему неравенству:

$$E\Big\{s'[t_\ell]\cdot f\big(u_\omega[t_\ell],v[t],y^*_\omega\big[t_\ell-h^{[u]}_\omega[t_\ell]\big],y^*_\omega\big[t_\ell-h^{[v]*}[t]\big]\big)\,\big|\,y^*_\omega[t_\ell,\bullet]\Big\}\leqslant C^{[\varepsilon]}\cdot(t_{\ell+1}-t_\ell)^{\frac12}.$$

Теперь, учитывая все приведенные оценки, получаем для величины (4.12) следующее неравенство:

$$\frac{d}{dt_+}\bigg(E\Big\{V^*\big(y^*_\omega[t,\bullet]\big)\mid y^*_\omega[t_\ell,\bullet]\Big\}\bigg)\leqslant C^{[E]}\cdot(t_{\ell+1}-t_\ell)^{\frac12},\qquad C^{[E]}-\text{const}.$$

Отсюда для величины (4.11) получаем оценку

$$E\Big\{V^*\big(y^*_\omega[t,\bullet]\big)\mid y^*_\omega[t_\ell,\bullet]\Big\}\leqslant V^*\big(y^*_\omega[t_\ell,\bullet]\big)+C^{[E]}_*\cdot(t_{\ell+1}-t_\ell)^{\frac32},\qquad C^{[E]}_*-\text{const},$$

откуда, в свою очередь, вытекает неравенство

$$E\Big\{V^*\big(y^*_\omega[t,\bullet]\big)\mid y^*_\omega[t_*,\bullet]\Big\}\leqslant V^*\big(y^*_\omega[t_*,\bullet]\big)+C^{[E]}_*\cdot\sum_{\ell=1}^{\ell[t]}(t_{\ell+1}-t_\ell)^{\frac32},$$

где $\ell[t]$ – наименьшее целое число ℓ, удовлетворяющее условию $t_\ell\geqslant t$.

Таким образом, учитывая свойства (3.17) и (3.18) функционала $V\big(y(\bullet)\big)$, оценки (2.4), (2.5) для шага $t_{\ell+1}-t_\ell$ и условия (2.9), (4.1) на исходную историю $y^*[t_*,\bullet]$, приходим к следующим неравенствам:

в случае $t_* \leqslant t \leqslant T$

$$E\Big\{V^*\big(y^*_\omega[t,\bullet]\big) \mid y^*_\omega[t_*,\bullet]\Big\} \leqslant$$
$$\leqslant w^*(\delta^{[y]}_*) + C^{[E]}_*\delta^{[t]} \cdot \sum_{\ell=1}^{\ell[t]} \left(\frac{T - t_*}{\delta^{[t]}} + 1\right) (\delta^{[t]})^{\frac{1}{2}} \leqslant w^*(\delta^{[y]}_*) + C^{[E]}_*\delta,$$

в случае $t_* \leqslant t < \infty$

$$E\Big\{V^*\big(y^*_\omega[t,\bullet]\big) \mid y^*_\omega[t_*,\bullet]\Big\} \leqslant$$
$$\leqslant w^*(\delta^{[y]}_*) + C^{[E]}_*(\delta^{[t]})^{\frac{3}{2}} \cdot \sum_{\ell=1}^{\infty} \ell^{-q} \leqslant w^*(\delta^{[y]}_*) + C^{[E]}_*C^{[R]}\delta,$$

где $q > 1$ – const и $\delta \to 0$ при $\delta^{[t]} \to 0$, $\delta^{[y]}_* \to 0$.

Отсюда по построению $y^*_\omega[t]$, $t_* \leqslant t$, следуют, согласно неравенству Чебышева [23], оценки:

$$P\Big(\sup_{t_*\leqslant t\leqslant T} \big|y_\omega[t]\big| < \varepsilon\Big) \geqslant P\Big(\sup_{t_*\leqslant t_\ell\leqslant t_{\ell[T]}} \big|y^*_\omega[t_\ell]\big| < \varepsilon_*\Big) \geqslant$$
$$\geqslant 1 - \frac{E\Big\{V^*\big(y^*_\omega[t_{\ell[T]},\bullet]\big) \mid y^*_\omega[t_*,\bullet]\Big\}}{w_*(\varepsilon_*)} \geqslant 1 - \frac{w^*(\delta^{[y]}_*) + C^{[\varepsilon_*]}\delta}{w_*(\varepsilon_*)},$$

$$P\Big(\sup_{t_*\leqslant t<\infty} \big|y_\omega[t]\big| < \varepsilon\Big) \geqslant P\Big(\sup_{t_*\leqslant t_\ell<\infty} \big|y^*_\omega[t_\ell]\big| < \varepsilon_*\Big) \geqslant$$
$$\geqslant 1 - \frac{\sup\limits_{t_*\leqslant t_\ell<\infty} E\Big\{V^*\big(y^*_\omega[t_\ell,\bullet]\big) \mid y^*_\omega[t_*,\bullet]\Big\}}{w_*(\varepsilon_*)} \geqslant 1 - \frac{w^*(\delta^{[y]}_*) + C^{[\varepsilon_*]}\delta}{w_*(\varepsilon_*)},$$

которые и доказывают теорему.

Литература

1. Айзекс Р. Дифференциальные игры. М.: Мир, 1967.
2. Альбрехт Э. Г. Построение приближенных решений некоторых квазилинейных дифференциальных игр // Тр. Ин-та математики и механики УрО РАН. 2000. Т. 6, № 1. С. 27–38.
3. Клейменов А. Ф. Неантагонистические позиционные дифференциальные игры. Екатеринбург: Наука, 1993.

4. Красовский Н. Н., Субботин А. И. Позиционные дифференциальные игры. М.: Наука, 1974.

5. Куржанский А. Б. Управление и наблюдение в условиях неопределенности. М.: Наука, 1977.

6. Осипов Ю. С. К теории дифференциальных игр систем с последействием // Прикладная математика и механика. 1971. Т. 35, вып. 5.

7. Osipov Yu. S., Kryazhimskii A. V. Inverse problem of ordinary differential equations. Dynamical solutions. Gordon and Beach, 1995.

8. Субботин А. И. Обобщенные решения уравнений в частных производных первого порядка. Перспективы динамической оптимизации. М.; Ижевск: Ин-т компьютер. исслед., 2003.

9. Субботин А. И., Ченцов А. Г. Оптимизация гарантии в задачах управления. М.: Наука, 1981.

10. Третьяков В. Е. К теории стохастических дифференциальных игр // Докл. АН СССР. 1983. Т. 269, № 3. С. 1049–1053.

11. Субботин А. И. Экстремальные стратегии в дифференциальных играх с полной памятью // Там же. 1972. Т. 206, № 3. С. 552–555.

12. Лукоянов Н. Ю. Об экстремальном прицеливании в задачах управления системами с последействием // Изв. УрГУ. Математика и механика. 2003. Вып. 5, № 26. С. 115–123.

13. Ито К., Маккин Г. Диффузионные процессы и их траектории: Пер. с англ. М.: Мир, 1968.

14. Ito K., Nisio M. On stationary solutions of stochastic differential equations // J. Math. Kyoto Univ. 1964. Vol. 4, № 1. P. 1–79.

15. Колмановский В. Б., Носов В. Р. Устойчивость и периодические режимы регулируемых систем с последействием. М.: Наука, 1981.

16. Yoshizawa T. Stability theory by Liapunov's Second Method. Mathem. Soc. Japan, 1966.

17. Хейл Дж. Теория функционально-дифференциальных уравнений: Пер. с англ. М.: Мир, 1984.

18. Красовский Н. Н. Некоторые задачи теории устойчивости движения. М.: Физматгиз, 1959.

19. Ким А. В. i-Гладкий анализ и функционально-дифференциальные уравнения. Екатеринбург: УрО РАН, 1996.

20. Осипов Ю. С. О стабилизации управляемых систем с запаздыванием // Дифференц. уравнения. 1965. Т. 1, № 5. С. 463–473.

21. Красовский Н. Н., Осипов Ю. С. О стабилизации движений управляемого объекта с запаздыванием в системе регулирования // Изв. АН СССР. Техн. кибернетика. 1963. № 6. С. 3–15.

22. Шиманов С. Н. К теории линейных дифференциальных уравнений с последействием // Дифференц. уравнения. 1965. Т. 1, № 1. С. 102–116.

23. Липцер Р. Ш., Ширяев А. Н. Статистика случайных процессов. М.: Наука, 1974.

24. Дынкин Е. Б. Марковские процессы. М.: Физматгиз, 1963.

25. Хасьминский Р. З. Устойчивость систем дифференциальных уравнений при случайных возмущениях их параметров. М.: Наука, 1969.

26. Кац И. Я., Красовский Н. Н. Об устойчивости систем со случайными параметрами // Прикладная математика и механика. 1960. Т. 24, вып. 5.

27. Kats I. Ya., Martynyuk A. A. Stability and Stabilization of Nonlinear Systems with Random Structure. Taylor and Francis Inc. L.; N. Y., 2002.

28. Kushner H. J. Stochastic Stability and Control. N. Y.; L.: Academic Press, 1967.

29. Малкин И. Г. Теория устойчивости движения. Изд-е второе, испр. М.: Наука, 1966.

30. Ляпунов А. М. Общая задача об устойчивости движения. М.; Л.: Гостехиздат, 1950.

31. Ито К. Об одной формуле, касающейся стохастических дифференциалов // Математика: Сб. перевод. иностр. ст. 1959. Т. 3, № 5. С. 131–141.