УДК 517.983 : 519.21

И. В. Мельникова

СТОХАСТИЧЕСКАЯ ЗАДАЧА КОШИ В ПРОСТРАНСТВАХ АБСТРАКТНЫХ РАСПРЕДЕЛЕНИЙ*

1. Введение

Одним из направлений исследований В. К. Иванова в 80–90-е годы было построение распределений, допускающих действие более общих, чем дифференциальные, операторов, применяемых в случае обычных распределений. В [1, 2] были построены распределения, называемые теперь обобщенными функциями Иванова. Они нашли широкое применение при решении операторных и дифференциально-операторных уравнений. Неожиданно для нас обобщенные функции Иванова оказались востребованы при построении решений абстрактных стохастических задач в пространствах стохастических распределений.

Итак, по порядку. Рассматриваем стохастическую задачу Коши

$$X'(t) = AX(t) + B\mathbb{W}(t), \quad t \in [0, T], \qquad X(0) = \xi, \tag{1}$$

где A – генератор регуляризованной полугруппы $\{S(t), t \in [0, \tau)\}$, $T < \tau \leqslant \infty$, в гильбертовом пространстве H; $B \in L(H_1, H)$; $\{\mathbb{W}(t), t \geqslant 0\}$ – H_1-значный белый шум, неформально определяемый как процесс с независимыми распределениями при разных значениях t, с нулевым средним значением и бесконечной вариацией. Известно, что такой процесс в гильбертовых пространствах, и даже в $\mathbb{R}^n$, не определен – белый шум определяется лишь в специально построенных пространствах распределений (как производная от броуновского движения или винеровского процесса). Конструкцию таких пространств для случая $\mathbb{R}^n$ см., например, в [3, 4], для случая гильбертовых пространств – в [5, 6].

Мотивация для исследования поставленной задачи следующая. Большое число важных для приложений задач, как детерминированных, так и требующих учета случайных возмущений, не являются задачами с генераторами полугрупп класса C_0. Используя современную теорию полугрупп, мы рассматриваем задачи с генераторами регуляризованных полугрупп. При этом наряду с решением проблем белого шума возникает проблема построения

*Работа поддержана грантом РФФИ № 06-03-00148.

(неограниченного в H) оператора, обратного к «полугрупповому» оператору, осуществляющему регуляризацию решения. Для случая k-конволюционных полугрупп мы смогли построить такой оператор в пространствах абстрактных ультрараспределений [10], обобщающих пространства Коматсу [9]. При этом, используя технику работы [10], в указанных пространствах можно построить и белый шум как обобщенную производную от винеровского процесса. Однако в предложенной конструкции обобщенного решения открытым остается вопрос о стохастических характеристиках обобщенного решения. В настоящей работе для случая R-полугрупп решение построено в пространствах абстрактных стохастических распределений. Здесь, чтобы построить и соответствующий обратный оператор, и процесс белого шума, потребовалось соединение конструкций абстрактных пространств типа Хиды–Гельфанда–Кондратьева и пространств Иванова.

Наряду с решением задачи (1) в пространстве распределений, обобщая подход Ито на случай гильбертовых пространств, мы строим слабое (регуляризованное) решение соответствующей (1) интегральной задачи, коротко записываемой в форме

$$dX(t) = AX(t)dt + BdW(t),\ t \in [0, T], \quad X(0) = \xi. \tag{2}$$

Здесь $\{W(t), t \geqslant 0\}$ – Q-винеровский или цилиндрический винеровский процесс – обобщение броуновского движения на случай гильбертовых пространств [7, 8]. Исследование задачи (2) позволяет обойтись без конструкции белого шума – вместо него строится винеровский процесс – «первообразная» от белого шума. При этом исследование регуляризованного решения позволяет избежать и построения обратного к оператору, осуществляющему полугрупповую регуляризацию.

В соответствии со сказанным настоящая работа состоит из введения и трех разделов. В первом из них даны определения регуляризованных полугрупп, в частности k-конволюционных и R-полугрупп, а также некоторые свойства этих полугрупп, необходимые в дальнейшем; приведены примеры. Второй раздел посвящен исследованию и конструкции слабых решений задачи (2) с Q-винеровским и цилиндрическим процессами. Известно, что даже при априорном предположении A – генератор полугруппы класса C_0, для существования сильного решения требуется либо ограниченность оператора A, либо чтобы B был оператором Гильберта–Шмидта. Поэтому, предполагая A генератором регуляризованной полугруппы, мы изучаем существование и единственность слабых решений – построено слабое регуляризованное решение. Полученные результаты обобщают результаты [7] для случая полугрупп класса C_0. Заключительный раздел посвящен решению задачи (1) в пространствах стохастических распределений. Построено обобщенное решение при условиях менее ограничительных, чем для случая слабых решений. Основой для каждого из построенных решений является конструкция подходящей стохастической свертки.

2. Регуляризованные полугруппы, определения, свойства, примеры

Определение 2.1. *Пусть A есть замкнутый линейный оператор, а $R(t)$, $t \in [0,\tau)$, $\tau \leqslant \infty$, – ограниченные линейные операторы в банаховом пространстве H. Сильно непрерывное семейство ограниченных операторов $\{S(t),\ t \in [0,\tau)\}$ называется **регуляризованной (R-регуляризованной) полугруппой** с генератором A, если*

$$S(t)A\xi = AS(t)\xi,\ \xi \in dom\, A, \quad S(t)\xi = A\int_0^t S(s)\xi\, ds + R(t)\xi,\ \xi \in H. \qquad (3)$$

Полугруппа S называется экспоненциально ограниченной, если $\|S(t)\| \leqslant Me^{\omega t}$, $t \geqslant 0$, для некоторых $M > 0$, $\omega \in \mathbb{R}$, и локальной, если $\tau < \infty$.

*Если $R(t) = I\int_0^t k(s)ds$, где k – непрерывная функция, тогда S называется **k-конволюционной полугруппой**. Если оператор A является плотно определенным и $R(t) \equiv R$, где R – это обратимый линейный ограниченный оператор с плотной областью значений, тогда S называется **R-полугруппой**.*

Заметим, что если $k(t) = t^{n-1}/(n-1)!$, то k-конволюционная полугруппа является *n-раз интегрированной полугруппой*. Если $R = I$, то R-полугруппа является *полугруппой класса C_0*.

Определение k-конволюционных полугрупп дано в [11, 12]. Что касается R-полугрупп, в [13, 14] они введены как сильно непрерывное семейство ограниченных операторов, удовлетворяющих R-полугрупповому соотношению

(R1) $\quad S(t+s)R = S(t)S(s),\ s,\ t,\ s+t \in [0,\tau), \quad S(0) = R,$

с инфинитезимальным генератором:

$$Gf := \lim_{t\to 0}\frac{S(t)R^{-1} - I}{t}\, f, \quad \mathrm{dom}\, G = \left\{ f \in \mathrm{ran}\, R:\ \exists \lim_{t\to 0}\frac{S(t)R^{-1} - I}{t}\, f \right\},$$

и вместо R использовано обозначение C (C-полугруппа). Мы предпочитаем название «R-полугруппа» в силу ее регуляризующего свойства и в отличие от C_0-полугрупп (полугрупп класса C_0), где C означает «continuity».

Следующее предложение делает ясной связь между определением R-полугруппы через уравнения и через соотношение (R1); его можно доказать на основе взаимосвязи между R-полугрупповым соотношением для семейства ограниченных операторов и однородной задачей Коши с оператором A:

$$u'(t) = Au(t), \quad t \in [0, \tau), \qquad X(0) = \xi. \tag{4}$$

Предложение 2.1. *Пусть A – замкнутый, плотно определенный оператор в банаховом пространстве H. Тогда сильно непрерывное семейство операторов $\{S(t) \in L(H),\ t \in [0, \tau)\}$ является R-полугруппой с генератором A, если и только если семейство удовлетворяет соотношению $(R1)$. В этом случае $\overline{G}$ является генератором.*

Что касается k-конволюционных полугрупп, для них тоже существует «полугрупповое соотношение» [12]:

$$\text{(k1)} \quad S(t)S(s) = \int_s^{t+s} k(t+s-r)S(r)\,dr - \int_0^t k(t+s-r)S(r)\,dr,\ t,\ s,\ t+s \in [0; \tau),$$

но в качестве определения его обычно не используют.

Таким образом, мы видим, что определения полугрупп через соотношения (R1), (k1) подчеркивают структурные свойства полугрупп, а определение 1 показывает, как регуляризованная полугруппа с генератором A связана с задачей Коши: $u(\cdot) = S(\cdot)\xi$ является решением регуляризованной задачи $u(t) = A\int_0^t u(s)ds + R(t)\xi,\ t \in [0, \tau)$, или регуляризованным решением задачи (4).

На базе определения 1 в [15] доказаны свойства семейств операторов, сопряженных к регуляризованным полугруппам, необходимые для изучения стохастических задач.

Теорема 2.1. *Пусть A – генератор R-регуляризованной полугруппы $\{S(t), t \in [0, \tau)\}$ в гильбертовом пространстве H, семейство $\{R(t)\}$ является сильно непрерывно дифференцируемым и $\overline{\operatorname{dom} A} = H$. Тогда $\{S^*(t), t \in [0, \tau)\}$ является R^*-регуляризованной полугруппой с генератором A^*, плотно определенным. Если операторы $R(t)$ являются обратимыми, то $R^*(t)$ обладают тем же свойством.*

Наряду с общими свойствами k-конволюционных и R-полугрупп, как подслучаев регуляризованных полугрупп, они имеют разные спектральные свойства, важные для приложений. Генератор любой k-конволюционной полугруппы имеет резольвенту $\mathcal{R}(\lambda)$ в некоторой области Λ. В случае локальной полугруппы резольвента существует в области

$$\Lambda^M_{\alpha,\gamma,\beta} = \{\lambda \in \mathbb{C} \mid \Re\lambda > \alpha M(\gamma|\lambda|) + \beta\}$$

и удовлетворяет оценке

$$\|\mathcal{R}(\lambda)\| \leqslant Ce^{\beta M(\gamma|\lambda|)}, \qquad \lambda \in \Lambda^{M}_{\alpha,\gamma,\beta}, \tag{5}$$

где функция M и параметры α, γ, β зависят от k и τ. Обратный результат тоже имеет место: оценка (5) обеспечивает существование k-конволюционной полугруппы $\{S(t), t \in [0,\tau)\}$ с k, τ, зависящими от параметров оценки.

Теорема 2.2. [12, 16] *Пусть $M(s)$, $s \geqslant 0$, – положительная функция, возрастающая при $s \to \infty$ не быстрее, чем s^p, $p < 1$. Предположим, что резольвента оператора A удовлетворяет оценке* (5) *с некоторыми параметрами γ, α, β. Тогда A является генератором локальной k-конволюционной полугруппы $\left\{S(t),\ t \in \left[0, \frac{\delta-\beta}{\alpha}\right)\right\}$ с функцией k, преобразование Лапласа которой удовлетворяет условию $|\widetilde{k}(\lambda)| = O_{|\lambda|\to\infty}\left(e^{-\delta M(\gamma|\lambda|)}\right)$, $\delta > \beta$.*

В отличие от спектральных свойств k-конволюционной полугруппы генератор R-полугруппы в общем случае не обладает резольвентой, он имеет лишь R-резольвенту.

Приведем несколько характерных примеров k-конволюционных полугрупп, R-полугрупп и их генераторов, в частности, полугрупп, порожденных дифференциальными операторами. Больше примеров и с более подробными выкладками рассмотрено в [17, 15].

Пример матрично-дифференциального оператора, который в зависимости от параметра m порождает полугруппы разных классов: класса C_0, конволюционных (интегрированных) или R-полугрупп

Пусть $m \in \mathbb{N} \cup \{0\}$. Рассмотрим систему дифференциальных уравнений

$$\begin{cases} \dfrac{\partial u_1(x;t)}{\partial t} = \dfrac{\partial^2 u_1(x;t)}{\partial x^2}, \\ \dfrac{\partial u_2(x;t)}{\partial t} = i^m \dfrac{\partial^m u_1(x;t)}{\partial x^m} + \dfrac{\partial^2 u_2(x;t)}{\partial x^2}, \end{cases} \qquad x \in \mathbb{R},\ t \geqslant 0, \tag{6}$$

с начальными данными $u_1(x;0) = \xi_1(x)$, $u_2(x;0) = \xi_2(x)$, $x \in \mathbb{R}$. Эта задача может быть записана в абстрактной форме (4), где

$$u = \begin{bmatrix} u_1 \\ u_2 \end{bmatrix}, \qquad A = \begin{bmatrix} \dfrac{d^2}{dx^2} & 0 \\ i^m \dfrac{d^m}{dx^m} & \dfrac{d^2}{dx^2} \end{bmatrix}, \qquad \xi = \begin{bmatrix} \xi_1 \\ \xi_2 \end{bmatrix},$$

в пространстве $H = L_2(\mathbb{R}) \times L_2(\mathbb{R})$. Применяя преобразование Фурье, получаем следующую задачу Коши:

$$\begin{cases} \dfrac{d\widetilde{u}_1(s;t)}{dt} = -s^2\ \widetilde{u}_1(s;t), \\ \dfrac{d\widetilde{u}_2(s;t)}{dt} = s^m\ \widetilde{u}_1(s;t) - s^2\ \widetilde{u}_2(s;t), \end{cases} \quad s \in \mathbb{C},\ t \geqslant 0, \qquad \begin{cases} \widetilde{u}_1(s;0) = \widetilde{\xi}_1(s), \\ \widetilde{u}_2(s;0) = \widetilde{\xi}_2(s). \end{cases}$$

Ее операторы решения ищутся в форме матричной экспоненты:

$$\widetilde{u}(s;t) = e^{tA(s)}\ \widetilde{\xi}(s) = \begin{bmatrix} e^{-ts^2} & 0 \\ ts^m\ e^{-ts^2} & e^{-ts^2} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \widetilde{\xi}_1(s) \\ \widetilde{\xi}_2(s) \end{bmatrix} = e^{-ts^2} \begin{bmatrix} 1 & 0 & \widetilde{\xi}_1(s) \\ ts^m & 1 & \widetilde{\xi}_2(s) \end{bmatrix}.$$

Решение исходной задачи получается в виде свертки:

$$u(x;t) = G(x;t) * \xi(x) =: U(t)\xi, \quad x \in \mathbb{R},\ t \geqslant 0,$$

где $G(x;t)$ – обратное преобразование Фурье от $e^{A(s)t}$, $s \in \mathbb{R}$, и операторы решения $U(t)$ действуют из $dom\, U(t) \subset H$ в H.

Учитывая свойства операторов решения и резольвенты оператора задачи, преобразованной по Фурье, а также равенство норм $\|f\| = \|\widetilde{f}\|$ для любого f из $L_2(\mathbb{R})$, получаем следующие свойства операторов решения $U(t)$, $t > 0$. При $m \geqslant 0$ операторы $U(t)$ ограничены и сильно непрерывны по $t > 0$. При $0 \leqslant m \leqslant 2$ операторы ограничены при $t \geqslant 0$ и оценки на резольвенту гарантируют, что семейство $\{U(t), t \geqslant 0\}$ является полугруппой класса C_0:

$$\left\|(\lambda I - A)^{-k} f\right\| \leqslant \frac{2}{\lambda^k}\|f\|, \quad k \in \mathbb{N},\ f \in H.$$

При $m > 2$ операторы решения имеют в окрестности точки $t = 0$ оценки, определяющие полугруппу роста $\alpha = m/2 - 1 : \|U(t)\| \leqslant Ct^{1-m/2}$. Что касается резольвенты, при $2 < m \leqslant 4$ операторы $(\lambda I - A)^{-1}, \lambda > 0$, ограничены, следовательно, определяют резольвенту, а при $m > 4$ эти операторы неограничены, следовательно, резольвента не существует.

Таким образом, приходим к следующему заключению о порождении оператором системы (6) полугрупп в пространстве $L_2(\mathbb{R}) \times L_2(\mathbb{R})$: при $m = 0, 1, 2$ оператор A порождает полугруппу класса C_0; при $m = 3, 4, \ldots$ – полугруппу порядка $\alpha = m/2 - 1$ и, следовательно, R-полугруппу с оператором $R = (\lambda I - A)^{-n}$, $n = [\alpha] + 1$. Кроме того, поскольку при $m = 3$ особенность операторов $U(t)$ в точке $t = 0$ интегрируема, A порождает 1 раз интегрированную (экспоненциально ограниченную) полугруппу и, следовательно, k-конволюционную полугруппу с $k(t) = t$; при $m \geqslant 4$ операторы $U(t)$ могут иметь в точке $t = 0$ неинтегрируемую особенность, поэтому операторы

$(\lambda I - A)^{-n}$ в общем случае не являются степенями резольвенты, в этом случае оператор A не порождает конволюционную (интегрированную) полугруппу, только R-полугруппу.

Пример локальной R-полугруппы, связанной с задачей Коши для уравнения обратной теплопроводности

Пусть $H = L_2(\mathcal{O})$, $\mathcal{O} = \left\{x \in \mathbb{R}^N : \ 0 < x_k < a_k, \ k = 1, \ldots, N\right\}$. Определим

$$Au = \triangle u, \quad u \in \operatorname{dom} A := H^2(\mathcal{O}) \cap H_0^1(\mathcal{O}),$$

где оператор Лапласа $\triangle$ понимается в смысле распределений. Оператор A имеет спектр и собственные функции следующего вида:

$$Sp(A) = \left\{ -\sum_{i=1}^{N} \frac{k_i^2 \pi^2}{a_i^2}; \ k_i \in \mathbb{N} \right\}, \quad w_{k_1,k_2,\ldots,k_N} = \prod_{i=1}^{N} \left(\frac{2}{a_i}\right)^{1/2} \left(\sin \frac{k_i \pi x_i}{a_i}\right).$$

Обозначим для простоты через $\{-\mu_k\}_{k=1}^{\infty}$ и $\{e_k\}_{k=1}^{\infty}$ упорядоченный набор собственных значений и собственных функций A. Оператор A порождает в $L_2(\mathcal{O})$ полугруппу $\{U(t), t \geqslant 0\}$ класса C_0: $U(t)\xi = \sum_{k=1}^{\infty} \langle \xi, e_k \rangle_{L_2(\mathcal{O})} e^{-\mu_k t} e_k$. Следовательно, $U(t)\xi$, $\xi \in \operatorname{dom} A$, является решением равномерно корректной однородной задачи (4).

Оператор $-A$ некорректной задачи Коши для уравнения обратной теплопроводности является генератором следующих локальных R-полугрупп (используемых для регуляризации некорректных задач Коши [16, 17]):

$$S_1(t)f = \sum_{k=1}^{\infty} \langle f, e_k \rangle e^{\mu_k t - \alpha \mu_k^n T} e_k, \qquad S_2(t)f = \sum_{k=1}^{\infty} \langle f, e_k \rangle e^{\mu_k t} \left(\gamma + e^{\mu_k T}\right)^{-1} e_k,$$

$t \in [0, T]$, $f \in H$, с ограниченными и обратимыми операторами

$$R_1 f = \sum_{k=1}^{\infty} \langle f, e_k \rangle e^{-\alpha \mu_k^n T} e_k, \quad R_2 f = \sum_{k=1}^{\infty} \langle f, e_k \rangle \left(\gamma + e^{\mu_k T}\right)^{-1} e_k, \quad n \in \mathbb{N}, \ \alpha, \gamma > 0.$$

Пример экспоненциально ограниченной конволюционной полугруппы, связанной с корректной задачей Коши для уравнения второго порядка

Рассмотрим задачу Коши для уравнения второго порядка

$$w''(t) = Bw(t), \qquad t \geqslant 0, \quad w(0) = \xi_1, \ w'(0) = \xi_2, \tag{7}$$

в банаховом пространстве Y. Предположим, что оператор B порождает семейство косинус- и синус-функций $\{\mathtt{C}(t), \mathtt{S}(t), \ t \in \mathbb{R}\}$ в Y, что эквивалентно (равномерной) корректности задачи (7). Оператор Лапласа из предыдущего примера является генератором такого семейства и может быть взят в качестве B. В силу свойств функций $\mathtt{C}, \mathtt{S}$ (см., например, [16]), мы получаем решение задачи (7) в форме $w(t) = \mathtt{C}(t)\xi_1 + \mathtt{S}(t)\xi_2,\ \xi_1, \xi_2 \in \operatorname{dom} B,\ t \geqslant 0$. Заменой переменных

$$u(t) = \begin{bmatrix} w(t) \\ w'(t) \end{bmatrix}, \qquad A = \begin{bmatrix} 0 & I \\ B & 0 \end{bmatrix}, \qquad \xi = \begin{bmatrix} \xi_1 \\ \xi_2 \end{bmatrix}$$

рассматриваемая задача сводится к задаче Коши для уравнения первого порядка (4) в пространстве $X = Y \times Y$. Операторы решения этой задачи $U(t) = \begin{bmatrix} \mathtt{C}(t) & \mathtt{S}(t) \\ \mathtt{C}'(t) & \mathtt{C}(t) \end{bmatrix}$, $t \geqslant 0$, не определены на всем пространстве X, поскольку функции $\mathtt{C}(\cdot)$ не дифференцируемы на Y. Тем не менее операторы проинтегрированного семейства $S(t) = \begin{bmatrix} \mathtt{S}(t) & \int_0^t \mathtt{S}(\tau)d\tau \\ \mathtt{C}(t) - I & \mathtt{S}(t) \end{bmatrix}$ уже являются ограниченными на X. Используя свойства $\mathtt{C}, \mathtt{S}$-функций, нетрудно проверить, что семейство $\{S(t),\ t \geqslant 0\}$ образует 1 раз интегрированную полугруппу с генератором A и, следовательно, k-конволюционную полугруппу с тем же генератором и $k(t) = t$.

Пример конволюционной полугруппы, не являющейся интегрированной

Рассмотрим дифференциальное уравнение

$$\frac{\partial u(x;t)}{\partial t} = -\frac{\partial^2 u(x;t)}{\partial x^2} + i\frac{\partial^4 u(x;t)}{\partial x^4}, \qquad x \in \mathbb{R},\ t \geqslant 0,$$

с начальными данными $u(x;0) = \xi(x)$. Поставленная задача может быть записана в форме (4) с оператором $A = -\frac{\partial^2}{\partial x^2} + i\frac{\partial^4}{\partial x^4}$, $\operatorname{dom} A \in L_2(\mathbb{R})$. Применяя преобразование Фурье, получаем задачу Коши

$$\frac{d\widetilde{u}(s;t)}{dt} = s^2\widetilde{u}(s;t) + is^4\ \widetilde{u}(s;t), \qquad s \in \mathbb{C},\ t \geqslant 0, \qquad \widetilde{u}(s;0) = \widetilde{\xi}(s).$$

Ее решение $\widetilde{u}(s;t) = e^{t(s^2+is^4)}\widetilde{\xi}(s)$.

Для оператора исходной задачи имеем $Sp(A) = \{\lambda = s^2 + is^4, s \in \mathbb{R}\}$, его резольвента определена при $\lambda \notin Sp(A)$ и для нее в [12] получена следующая оценка: $\|\mathcal{R}(\lambda)\| = O_{\lambda\to\infty}(|\lambda|/\Re\lambda)$. Следовательно, по теореме 2.2 оператор A является генератором k-конволюционной полугруппы $S(t) = U(t) * k(t)$, где, как и в примере 1, $U(t)\xi = G(\cdot, t) * \xi(\cdot)$ с функцией G, равной преобразованию Фурье от $e^{t(s^2+is^4)}$, и функцией k, для которой $\widetilde{k}(\lambda)$ берется в соответствии с ростом $\mathcal{R}(\lambda)$ (теорема 2.2). Здесь свертка $G * f$ и преобразование Фурье берутся в подходящих пространствах обобщенных функций [18].

3. Стохастическая задача Коши в гильбертовых пространствах

3.1. Постановка задачи. Q-винеровский и цилиндрический процессы. Стохастическая свертка

Пусть $(\Omega, \mathcal{F}, P)$ – вероятностное пространство с заданной фильтрацией $\{\mathcal{F}_t \mid t \geqslant 0\}$ и H, H_1 – сепарабельные гильбертовы пространства. Рассмотрим стохастическую задачу Коши (2), где A – генератор регуляризованной полугруппы $\{S(t), t \in [0, \tau)\}$ в H; $\{W(t), t \geqslant 0\}$ – H_1-значный Q-винеровский процесс относительно заданной фильтрации; $B \in L(H_1, H)$ и ξ – $\mathcal{F}_0$-измеримая H-значная случайная величина.

По определению для любого $u \in L_1(\Omega, \mathcal{F}, P; H)$ *математическое ожидание* $\mathbb{E}[u] = \int_\Omega u(\omega)\, dP(\omega)$, для $u \in L_2(\Omega, \mathcal{F}, P; H)$, *оператор ковариации* $Cov[u]h := \mathbb{E}[(u - \mathbb{E}[u]) \otimes (u - \mathbb{E}[u])h], h \in H$, где $(h_1 \otimes h_2)h := h_1 \langle h_2, h\rangle$. Поскольку $Cov[u]$ является симметричным, неотрицательным и оператором следа [7], он не может быть пропорционален единичному. Следовательно, обобщение броуновского движения на бесконечномерный случай гильбертовых пространств не может иметь закон распределения $\mathcal{N}(0, tI)$. Поэтому вместо броуновского движения вводится Q-винеровский процесс.

Определение 3.1. *Пусть Q – линейный симметричный, неотрицательный оператор следа в пространстве H_1, тогда H_1-значный стохастический процесс $W = \{W(t), t \geqslant 0\}$ является* Q-***винеровским процессом****, если*

$(W1)$ $W(0) = 0$ *почти всюду;*

$(W2)$ W *имеет независимые приращения;*

$(W3)$ *закон распределения приращений является нормальным и* $\mathcal{L}_{[W(t)-W(s)]} = \mathcal{N}(0, (t-s)Q), \ \ 0 \leqslant s \leqslant t;$

$(W4)$ W *имеет непрерывные траектории почти всюду.*

Q-винеровский процесс W имеет следующее разложение в пространстве H_1: $W(t) = \sum_{j=1}^\infty \sqrt{\lambda_j}\beta_j(t)e_j$, $t \geqslant 0$, где $\beta_j = \frac{1}{\sqrt{\lambda_j}}\langle W, e_j\rangle$ – независимые броуновские движения и $\{e_j\}$ – ортонормированный базис в H_1, состоящий из собственных векторов оператора Q: $Qe_j = \lambda_j e_j$.

Цилиндрический (I-винеровский) *процесс* W определяется формальным разложением $\sum_{j=1}^\infty \beta_j(t)e_j =: W(t)$, которое сходится только слабо в H_1 (то есть ряд $\sum_{j=1}^\infty \langle \beta_j(t)e_j, h\rangle$, $h \in H_1$, сходится в $L_2(\Omega; \mathbb{R})$). Сильно этот ряд сходится в некотором более широком пространстве H_2 таком, что вложение H_1 в H_2 является оператором Гильберта–Шмидта. В частности, в пространстве $H_2 = Q_1^{1/2}\Pi_1$ с нормой $\|f\|_{H_2} = \left(\sum_{j=1}^\infty \langle f, e_j\rangle^2 \lambda_j^1\right)^{1/2}$ для любого оператора следа Q_1; при этом W является Q_1-винеровским процессом в H_2.

В следующем разделе, рассматривая обобщенные решения задачи (1) в пространствах стохастических распределений, мы определим цилиндрический процесс и процесс белого шума через ряды, сходящиеся в этих пространствах.

В настоящем разделе, рассматривая задачу Коши с генератором регуляризованной полугруппы, мы изучаем существование и единственность слабых решений – строим слабое решение, а также вводим понятие и строим слабое регуляризованное решение – существование сильного решения, даже при априорном предположении полугруппы класса C_0, требует, чтобы либо оператор A был ограниченным, либо B – оператором Гильберта–Шмидта [7].

Определение 3.2. *Пусть A – генератор регуляризованной полугруппы $\{S(t),\ t \in [0,\tau)\}$, $\tau > T$; W – Q-винеровский или цилиндрический процесс в H_1. Тогда H-значный предсказуемый процесс $X = \{X(t), t \in [0,T]\}$, является **слабым решением** задачи* (2), *если*

a) $\int_0^t \|X(s)\|_H \, ds < \infty$ *п. в.;*

b) для любых $y \in \operatorname{dom} A^*$ *п. в. выполняется равенство*

$$\langle X(t),\, y\rangle = \langle \xi,\, y\rangle + \int_0^t \langle X(s), A^*y\rangle \, ds + \langle BW(t),\, y\rangle, \quad t \in [0,T];$$

*процесс X является **слабым R-регуляризованным решением** задачи* (2), *если п. в. выполняется равенство*

$$\langle X(t), y\rangle = \langle R(t)\xi,\, y\rangle + \int_0^t \langle X(s),\, A^*y\rangle \, ds + \int_0^t \langle R(t-s)B \, dW(s),\, y\rangle.$$

Подобно случаю полугрупп класса C_0 в конструкции рассматриваемых решений важную роль играет стохастическая свертка, определяемая стохастическим интегралом. Стохастический интеграл $\int_0^t \Psi(s) \, dW(s)$, где оператор $\Psi(s) = \Psi(s,\omega) \in L(H_1, H)$, определяется при условии

$$\mathbb{E} \int_0^t \|\Psi(r)\|^2_{HS^0} dr < \infty, \quad \|\Psi\|^2_{HS^0} := \mathrm{tr} \Psi Q^{\frac{1}{2}} Q^{*\frac{1}{2}} \Psi^* = \sum_{j=1}^{\infty} \|\Psi Q^{\frac{1}{2}} e_j\|^2,$$

где $\|\Psi\|_{HS^0}$ – норма в пространстве операторов Гильберта–Шмидта, действующих из $Q^{1/2}H_1$ в H. В случае Q-винеровского процесса это условие выполняется для $\Psi(s) \in L(H_1, H)$, в случае цилиндрического процесса ($Q = I$) это условие означает, что операторы $\Psi(s) \colon H_1 \to H$ должны быть операторами Гильберта–Шмидта.

Определение 3.3. *Пусть* $\{S(t),\ t \in [0,\tau)\}$ *– регуляризованная полугруппа, удовлетворяющая условию*

$$\int_0^T \|S(r)B\|^2_{HS^0} dr < \infty, \tag{8}$$

тогда процесс $W_A = \left\{\int_0^t S(t-s)B\,dW(s),\ t \in [0,\tau)\right\}$ *называется (регуляризованной)* ***стохастической сверткой.***

3.2. Решение стохастической задачи Коши в гильбертовом пространстве

Теорема 3.1. *Пусть* A *– плотно определенный генератор регуляризованной полугруппы* $\{S(t), t \in [0,\tau)\}$ *в гильбертовом пространстве* H *с условием* (8), W *–* Q*-винеровский процесс. Тогда* $X(t) = S(t)\xi + W_A(t)$, $t \in [0,T]$, *является слабым регуляризованным решением задачи* (2) *для любой* H*-значной* $\mathcal{F}_0$*-измеримой случайной величины* ξ. *В случае* R*-полугрупп это решение единственно; в случае* k*-конволюционных полугрупп решение единственно с точностью до* H*-значной функции* $\eta : k * \eta = 0$.

Доказательство. Сначала покажем, что процесс $S\xi = \{S(t)\xi,\ t \in [0,T]\}$, является слабым R-регуляризованным решением для соответствующего однородного уравнения. Процесс $S\xi$ является $\mathcal{F}_t$-измеримым, как композиция детерминированной функции $S(t)h$ двух переменных $(t,h) \in [0,T] \times H$ и $\mathcal{F}_0$-измеримой случайной величины ξ; траектории процесса п. в. являются непрерывными по $t \in [0,T]$, интегрируемыми и предсказуемыми. Пусть $y \in \operatorname{dom} A^*$, тогда имеем

$$\int_0^t \langle S(s)\xi, A^*y\rangle\, ds = \left\langle \int_0^t S(s)\xi\, ds, A^*y \right\rangle =$$
$$= \left\langle A\int_0^t S(s)\xi\, ds, y \right\rangle = \langle S(t)\xi - R(t)\xi, y\rangle.$$

Теперь рассмотрим W_A. В силу определения стохастического интеграла через предел интегралов от ступенчатых функций нетрудно проверить, что процесс W_A является предсказуемым. В силу условия (8) функция

$$\int_0^t \|S(t-s)B\|^2_{GS^0}\, ds$$

непрерывна по $t \in [0,T]$, следовательно, интегрируема и

$$\int_0^r \int_0^t \|S(t-s)B\|^2_{GS^0}\ ds\, dt = \int_0^r \int_0^t \|S(s)B\|^2_{GS^0}\ ds\, dt.$$

Учитывая непрерывность скалярного произведения и свойства сопряженной полугруппы $\{S^*(t), t \in [0,\tau)\}$, указанные в теореме 2.1, имеем

$$\int_0^t \left\langle \int_0^s S(s-r)B\,dW(r),\, A^*y \right\rangle ds = \int_0^t \int_0^s \langle S(s-r)B\ dW(r),\, A^*y\rangle\, ds =$$
$$= \int_0^t \int_0^s \langle B\,dW(r),\, S^*(s-r)A^*y\rangle\, ds = \int_0^t \left\langle B\,dW(r), \int_r^t S^*(s-r)A^*y\,ds \right\rangle =$$
$$= \int_0^t \left\langle B\,dW(r), \int_0^{t-r} S^*(\sigma)A^*y\,d\sigma \right\rangle = \int_0^t \langle B\,dW(r),\, S^*(t-r)y - R^*(t-r)y\rangle =$$
$$= \int_0^t \langle S(t-r)B\,dW(r),\, y\rangle - \int_0^t \langle R(t-r)B\,dW(r), y\rangle, \quad t \in [0,T].$$

Это означает, что W_A – слабое R-регуляризованное решение задачи (2) с начальным условием $\xi = 0$. Следовательно, $X(t) = S(t)\xi + W_A(t)$, $t \in [0,T]$, является слабым R-регуляризованным решением задачи (2).

Теперь исследуем единственность решения. Подобно доказательству для случая полугрупп класса C_0 [7], используем вспомогательное равенство для $\langle X(t), y\rangle$, где X – слабое R-регуляризованное решение задачи (2) с $\xi = 0$ и $y(\cdot) \in C([0,T]; \operatorname{dom} A^*)$. В случае когда A является генератором регуляризованной полугруппы, имеем следующее равенство:

$$\langle X(t), y(t)\rangle = \int_0^t \langle X(s), y'(s) + A^*y(s)\rangle\, ds +$$
$$+ \int_0^t ds \left\langle \int_0^s R'(s-r)B\,dW(r), y(s) \right\rangle + R(0)\int_0^t \langle B\,dW(s), y(s)\rangle. \quad (9)$$

Применим равенство (9) к $y(s) = S^*(t-s)y_0$, $y_0 \in dom\,A^*$. В силу свойств сопряженных регуляризованных полугрупп (теорема 2.1) получаем

$$\langle X(t), S^*(0)y_0\rangle = \int_0^t \langle X(s), -(R^*)'(t-s)y_0\rangle\, ds +$$
$$+ \int_0^t ds \left\langle \int_0^s R'(s-r)B\,dW(r), S^*(t-s)y_0 \right\rangle + R(0)\left\langle \int_0^t S(t-s)B\,dW(s), y_0 \right\rangle.$$

Отсюда, учитывая, что $\overline{\operatorname{dom} A^*} = H$, в случае R-полугрупп ($R(t) = R$ и R – обратимый оператор) имеем $X(t) = \int_0^t \langle S(t-s)B\,dW(s)$. В случае k-конволюционных полугрупп ($S(0) = S^*(0) = R(0) = R^*(0) = 0$) получаем равенство

$$\int_0^t X(s)k(t-s)\,ds = \int_0^t S(t-s)\,ds \int_0^s k(s-r)B\,dW(r),$$

которое имеет место для любого решения с нулевым начальным условием, в частности для $X = W_A$. Отсюда

$$\int_0^t S(t-s)\,ds \int_0^s k(s-r)B\,dW(r) = \int_0^t k(t-s)\,ds \int_0^s S(s-r)B\,dW(r)$$

и, следовательно, $X(s) = \int_0^s S(s-r)B\,dW(r) + \eta(s)$, $s \in [0,T]$, где η – решение уравнения $k * \eta = 0$.

Замечание 3.1. *Учитывая определение математического ожидания и оператора ковариации, получаем следующие характеристики построенного регуляризованного решения:*

$$\mathbb{E}[X(t)] = R(t)\xi,\ Cov[X(t)] = S(t)Cov[\xi]S^*(t) + \int_0^t [S(t-s)B]Q[S(t-s)B]^* ds.$$

Замечание 3.2. *Если в рассматриваемой задаче* (2) W *– цилиндрический процесс (определяемый формальным разложением* $\sum_{j=1}^{\infty} \beta_j(t)e_j =: W(t)$, *которое слабо сходится в* H_1 *и сходится сильно в некотором более широком пространстве* H_2*), тогда условие* (8) *существования стохастической свертки, оставаясь формально тем же, что и в случае* Q*-винеровского процесса, по сути становится гораздо более жестким. Дело в том, что в определении нормы Гильберта–Шмидта* $\|S(s)B\|^2_{GS^0}$ *в случае цилиндрического процесса уже нет оператора следа (в этом случае* $Q = I$*), поэтому операторами Гильберта–Шмидта должны быть либо* $S(s)$*, либо* B*.*

Рассмотрим, например, важную для приложений R*-полугруппу* S_1 *из примера* 2 *при* $\alpha = n = 1$*. Предполагая для простоты* $B = I$*, имеем*

$$\int_0^T \mathrm{tr}(S_1(s)S_1^*(s))\,ds = \int_0^T \sum_{k=1}^{\infty} \|S_1(t)e_k\|^2_{L_2(\mathcal{O})} ds =$$

$$= \sum_{k=1}^{\infty} \int_0^T e^{2\mu_k(t-T)} dt = \sum_{k=1}^{\infty} \left[\frac{e^{2\mu_k(t-T)}}{2\mu_k}\right]_0^T = \sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{2\mu_k}\left(1 - e^{-2\mu_k T}\right).$$

Полученный ряд сходится только при $N = 1$*, следовательно, и условие* (8) *в этом случае выполняется лишь при* $N = 1$*.*

Замечание 3.3. *Если регуляризованная полугруппа в теореме* 2.1 *является* R*-полугруппой и если дополнительно предположить, что*

$$\int_0^t \|S(r)R^{-1}B\|^2_{HS_0} dr < \infty\,, \tag{10}$$

тогда процесс $S(t)R^{-1}\xi + \int_0^t S(t-s)R^{-1}B\,dW(s)$, $t \in [0,T]$, *будет слабым решением задачи* (2)*. Однако в этом случае условие* (10) *является, конечно, более ограничительным, чем* (8)*, поскольку операторы решения* $U(t) = S(t)R^{-1}$ *неограничены.*

В следующем разделе обобщенное решение задачи (1) в пространстве стохастических распределений будет построено без условия (10) на R-полугруппу.

4. Стохастическая задача Коши в пространстве стохастических распределений

4.1. Пространства стохастических распределений. Процесс белого шума. Преобразование Эрмита. Пространства Иванова

Рассмотрим вероятностное пространство $(S'(\mathbb{R}^d), \mathcal{B}(S'(\mathbb{R}^d)), \mu)$, где $S'(\mathbb{R}^d)$ – пространство распределений медленного роста на $\mathbb{R}^d$; μ – нормализованная гауссова мера, удовлетворяющая условию

$$\int_{S'(\mathbb{R}^d)} e^{i\langle\omega,\phi\rangle} d\mu(\omega) = e^{-\frac{1}{2}\|\phi\|^2_{L_2(\mathbb{R}^d)}}, \quad \phi \in S(\mathbb{R}^d). \tag{11}$$

Такая мера существует по теореме Минлоса [4]. Пусть H – сепарабельное гильбертово пространство с ортонормированным базисом $\{e_i\}_{i=1}^{\infty}$. Обозначим пространство H-значных функций на $S'(\mathbb{R}^d)$ с интегрируемым квадратом нормы через $L_2(S';H)$.

Конструкция пространств H-значных основных функций $\mathbb{S}(H)_\rho$, $\rho \in [0,1]$, и пространств H-значных стохастических распределений $\mathbb{S}(H)_{-\rho}$ таких, что

$$\mathbb{S}(H)_1 \subset \mathbb{S}(H)_\rho \subset \mathbb{S}(H)_0 \subset L_2(S';H) \subset \mathbb{S}(H)_{-0} \subset \mathbb{S}(H)_{-\rho} \subset \mathbb{S}(H)_{-1}, \tag{12}$$

является первым шагом в теории абстрактных стохастических распределений [5, 6]. Для того чтобы построить базис в $L_2(S';H)$, используем разложение Винера–Ито элементов $f \in L_2(S';\mathbb{R})$ по стохастическим полиномам Эрмита $\mathbf{h}_\alpha(\omega) := \prod_{i=1}^{\infty} h_{\alpha_i}(\langle\omega,\xi_i\rangle)$, $\alpha \in \mathcal{J}$:

$$f(\omega) = \sum_{\alpha\in\mathcal{J}} c_\alpha \mathbf{h}_\alpha(\omega),\ \omega \in S'(\mathbb{R}^d), \quad c_\alpha = (\alpha!)^{-1}\langle f, \mathbf{h}_\alpha\rangle_{L_2(S';\mathbb{R})},$$

где $h_n(x) = (-1)^n e^{x^2/2}\dfrac{d^n}{dx^n}\left(e^{-x^2/2}\right)$ – полиномы Эрмита, ортогональные с весом $e^{-x^2/2}$ в $L_2(\mathbb{R})$, $\xi_n(x) = \dfrac{e^{-x^2/2}h_{n-1}(x)}{\pi^{1/4}\sqrt{(n-1)!}}$ – функции Эрмита, образующие ортогональный базис в $L_2(\mathbb{R})$. В силу свойства меры μ стохастические полиномы Эрмита образуют ортогональный базис в постранстве $L_2(S';\mathbb{R})$: $\langle \mathbf{h}_\alpha, \mathbf{h}_\beta \rangle_{L_2(S';\mathbb{R})} := \mathbb{E}\,(\mathbf{h}_\alpha \mathbf{h}_\beta) = 0$, если $\alpha \neq \beta$, и $\|\mathbf{h}_\alpha\|^2_{L_2(S';\mathbb{R})} = \alpha! := \alpha_1!\alpha_2!\ldots$ (см. [4]).

Определение 4.1. *Пространство $\mathbb{S}(H)_\rho$ определяется как пространство функций f из $L_2(S';H)$:*

$$f(\omega) = \sum_{\alpha\in\mathcal{J}} \sum_{i=1}^{\infty} c_{i\alpha} \mathbf{h}_\alpha(\omega) e_i, \quad c_{i\alpha} \in \mathbb{R},\ \omega \in S',$$

таких, что для все натуральных k

$$\|f\|^2_{\rho,k} := \sum_{\alpha\in\mathcal{J}} \sum_{i=1}^{\infty} (\alpha!)^{1+\rho} c^2_{i\alpha} (2\mathbb{N})^{k\alpha};$$

$\mathbb{S}(H)_{-\rho}$ есть пространство всех формальных разложений

$$F = \sum_{\alpha\in\mathcal{J}} \sum_{i=1}^{\infty} c_{i\alpha} \mathbf{h}_\alpha e_i$$

таких, что для некоторого натурального q

$$\|F\|^2_{-\rho,-q} := \sum_{\alpha\in\mathcal{J}} \sum_{i=1}^{\infty} (\alpha!)^{1-\rho} c^2_{i\alpha} (2\mathbb{N})^{-q\alpha}.$$

Из этого определения следует цепочка вложений (12).

В силу свойств меры (11) элементы $\omega \in S'(\mathbb{R})$ могут рассматриваться как белый шум в пространствах $\mathbb{S}(\mathbb{R})_{-\rho}$, следовательно, броуновское движение $\{\beta(t), t \geqslant 0\}$ определяется как «первообразная» от ω:

$$\beta(t) = \beta(t,\omega) := \langle \omega, \chi_{[0,t]} \rangle := \lim_{k\to\infty} \langle \omega, \chi_k \rangle,$$

где $\chi_{[0,t]}$ – индикаторная функция отрезка $[0,t]$ и $\{\chi_k\}_{k=1}^{\infty}$ – последовательность функций из S, сходящаяся к $\chi_{[0;t]}$ в $L_2(S';\mathbb{R})$. Этот предел существует в $L_2(S';\mathbb{R})$ и не зависит от выбора последовательности χ_k. Нетрудно проверить, что введенный процесс $\beta(t) = \langle \omega, \chi_{[0,t]} \rangle$ обладает всеми свойствами броуновского движения ((W1)–(W4) в конечномерном случае) и допускает следующее разложение:

$$\beta(t) = \left\langle \omega, \sum_{j=1}^{\infty} \int_0^t \xi_j(s)\,ds \cdot \xi_j \right\rangle = \sum_{j=1}^{\infty} \int_0^t \xi_j(s)\,ds \langle \omega, \xi_j \rangle = \sum_{j=1}^{\infty} \int_0^t \xi_j(s)\,ds \mathbf{h}_{\varepsilon_j}(\omega),$$

где $t \geqslant 0$, $\varepsilon_j = (0,\ldots,0,1,0\ldots) \in \mathcal{J}$ – последовательность с единицей на j-м месте.

В работе [5] подобным образом построена последовательность независимых броуновских движений:

$$\beta_i(t) = \sum_{j=1}^{\infty} \int_0^t \xi_j(s)\, ds\, \mathbf{h}_{\varepsilon_{n(i,j)}}(\omega) = \sum_{k=1}^{\infty} \theta_{ik}(t) \mathbf{h}_{\varepsilon_k}(\omega),$$

$$\theta_{ik}(t) = \begin{cases} \displaystyle\int_0^t \xi_j(s) ds, & k = n(i,j), \\ 0, & k \neq n(i,j), \end{cases}$$

со специальным выбором номеров $n(i,j)$. Полученное выражение для $\beta_i(t)$ влечет следующее представление цилиндрического процесса $\{W(t), t \geqslant 0\}$:

$$W(t) := \sum_{i=1}^{\infty} \beta_i(t) e_i = \sum_{i=1}^{\infty} \sum_{k=1}^{\infty} \theta_{ik}(t) \mathbf{h}_{\varepsilon_k} e_i = \sum_{k=1}^{\infty} \left(\sum_{i=1}^{\infty} \theta_{ik}(t) e_i \right) \mathbf{h}_{\varepsilon_k} =$$

$$= \sum_{k=1}^{\infty} \delta_{n(i,j),k} \left(\int_0^t \xi_j(s) ds\ e_i \right) \mathbf{h}_{\varepsilon_k} =: \sum_{k=1}^{\infty} \theta_k(t) \mathbf{h}_{\varepsilon_k},$$

$$\theta_k(t) = \delta_{n(i,j),k} \int_0^t \xi_j(s)\, ds\, e_i.$$

Эти ряды не сходятся в $L_2(S', H)$, но $W(t) \in \mathbb{S}(H)_{-0}$ для любого $t \in [0, \infty)$, так как

$$\sum_{k=1}^{\infty} (\varepsilon_k!) \|\theta_k\|_H^2 (2k)^{-q} \quad \leqslant \quad \sum_{k=1}^{\infty} \delta_{n(i,j),k} \left(\int_0^T \xi_j(s)^2 ds \right) (2k)^{-q} \leqslant C \sum_{k=1}^{\infty} (2k)^{-q} < \infty.$$

H-значный процесс белого шума $\{\mathbb{W}(t), t \geqslant 0\}$ определяется как формальная производная от $\{W(t), t \geqslant 0\}$:

$$\mathbb{W}(t) := \sum_{k=1}^{\infty} \delta_{n(i,j),k} \left(\xi_j(t) e_i \right) \mathbf{h}_{\varepsilon_k} = \sum_{k=1}^{\infty} \mathbb{W}_k(t) \mathbf{h}_{\varepsilon_k} \in \mathbb{S}(H)_{-0}\,. \tag{13}$$

H-значный Q-винеровский процесс W_Q имеет соответственно разложение $W(t) = \sum_{i=1}^{\infty} \lambda_i \beta_i(t) e_i$ в пространстве $L_2(S'; H)$.

Определение 4.2. *Для стохастических распределений из* $\mathbb{S}(H)_{-1}$

$$F = \sum_{\alpha \in \mathcal{J}} \sum_{i=1}^{\infty} c_{i\alpha} \mathbf{h}_\alpha e_i =: \sum_{\alpha \in \mathcal{J}} c_\alpha \mathbf{h}_\alpha, \quad G = \sum_{\beta \in \mathcal{J}} \sum_{i=1}^{\infty} d_{i\beta} \mathbf{h}_\beta e_i =: \sum_{\beta \in \mathcal{J}} d_\beta \mathbf{h}_\beta,$$

произведение Вика *$F \diamond G \in \mathbb{S}(H)_{-1}$ определяется следующим образом:*

$$(F \diamond G)(\omega) := \sum_{i=1}^{\infty}(F_i \diamond G_i)(\omega)e_i = \sum_{\gamma\in\mathcal{J}}\sum_{i=1}^{\infty}\left(\sum_{\alpha+\beta=\gamma} c_{i\alpha}d_{i\beta}\right)\mathbf{h}_\gamma(\omega)e_i, \quad \omega \in S'.$$

Преобразование Эрмита *от $F \in \mathbb{S}(H)_{-1}$ определяется рядом*

$$\sum_{\alpha\in\mathcal{J}} c_\alpha z^\alpha =: \mathcal{H}F(z) = \mathcal{H}[F](z),$$

для $z \in \mathbb{C}^{\mathbb{N}}$ таких, что ряд абсолютно сходится.

Отметим некоторые свойства произведения Вика и преобразования Эрмита. По определению, пространство $\mathbb{S}(H)_{-1}$ инвариантно относительно произведения Вика, более того, если $F \in \mathbb{S}(H)_{-0}$, то $F \diamond \mathbb{W}(t) \in \mathbb{S}(H)_{-0}$. Произведение Вика обладает свойствами коммутативности, ассоциативности и дистрибутивности. Для детерминированных F, G произведение Вика совпадает с обычным произведением. Кроме того, для любого $F \in \mathbb{S}(H)_{-1}$ существует $q > 1$ такое, что ряд $\mathcal{H}F(z)$ сходится абсолютно для каждого $z \in \overline{K}_q$, где $K_q := \left\{z \in \mathbb{C}^{\mathbb{N}} \;:\; |z_i| < (2i)^{-q},\ i \in \mathbb{N}\right\}$. Обратно, если функция $f(z) = \sum_{\alpha\in\mathcal{J}} c_\alpha z^\alpha : K_q \to H$ ограничена при некотором $q > 1$, то формальная сумма $F(\cdot) := \sum_{\alpha\in\mathcal{J}} c_\alpha \mathbf{h}_\alpha(\cdot)$ принадлежит $\mathbb{S}(H)_{-1}$. При этом если $F,\ G \in \mathbb{S}(H)_{-1}$, то для всех z таких, что сходятся ряды, определяющие $\mathcal{H}F(z)$ и $\mathcal{H}G(z)$, имеем $\mathcal{H}[F \diamond G](z) = \mathcal{H}F(z)\ \mathcal{H}G(z)$.

Теперь введем пространства $\mathbb{S}(H_k^*)_{-\rho}$ абстрактных стохастических распределений на пространствах Иванова, в которых и будет построено обобщенное решение задачи (1) с белым шумом $\mathbb{W}$ и оператором A, генератором R-полугруппы.

Определение 4.3. *Пусть P – самосопряженный (неограниченный) оператор в гильбертовом пространстве H с ортонормированным базисом $\{e_k\}$, состоящим из собственных векторов P, отвечающих собственным значениям $|\mu_1| \leqslant |\mu_2| \leqslant \ldots$. Нормированные пространства H_k определяются следующим образом:*

$$H_k := \{\varphi \in \ dom\, P^k, \quad \|\varphi\|_k = \sum_{i=0}^{k}\|P^i u\|_H\}, \quad k = 1, 2, \ldots,$$

и счетно-нормированное $H_\infty := \bigcap H_k$. ***Пространства обобщенных функций Иванова*** *H_k^* и H_∞^* определяются как сопряженные к этим пространствам.*

Пусть $\rho \in [0,1]$ и R – самосопряженный обратимый оператор с плотной областью значений в H, $\{e_i\}_{i=0}^{\infty}$ – ортонормированный базис его собственных векторов и $R^{-1}e_i = \mu_i e_i$. Определим пространство ***абстрактных стохастических распределений на пространствах Иванова*** *как $\mathbb{S}(H_k^*)_{-\rho}$, где пространства H_k^* определяются оператором $P = R^{-1}$.*

4.2. Задача Коши с генератором R-полугруппы и процессом белого шума в пространствах абстрактных стохастических распределений

Рассмотрим в пространствах абстрактных стохастических распределений задачу (1) с A – генератором R-полугруппы $\{S(t), t \in [0,\tau)\}$ в H, с процессом белого шума $\{\mathbb{W}(t)\}$, определенным равенством (13), и оператором $B = I$. (Здесь $B = I$ можно взять без потери общности, поскольку от B не требуется условий более сильных, чем ограниченность.)

Чтобы построить решение задачи, сначала определим действие операторов, ограниченных и неограниченных, на пространствах абстрактных стохастических распределений, а затем – стохастическую свертку в этих пространствах.

Положим $AF(\omega) := \sum_{\alpha\in\mathcal{J}}(Ac_\alpha)\mathbf{h}_\alpha(\omega)$ для $F \in \operatorname{dom} A_{-\rho} := \{F \in \mathbb{S}(H)_{-\rho}| \sum_{\alpha\in\mathcal{J}}(\alpha!)^{1-\rho}\|Ac_\alpha\|^2(2\mathbb{N})^{-q\alpha} < \infty\}$ для некоторого $q \in \mathbb{N}$.

Чтобы ввести стохастическую свертку, напомним определение интегралов Петтиса и Хитсуды–Скорохода. Процесс $F(t) : \mathbb{R} \to \mathbb{S}(H)_{-0}$ интегрируем по Петтису, если $\langle F(t), \phi\rangle \in L_1(\mathbb{R}, dt)$ для любого $\phi \in \mathbb{S}(H)_0$. В этом случае $\Phi \in \mathbb{S}(H)_{-0}$, определяемый равенством $\langle \Phi, \phi\rangle = \int_{\mathbb{R}}\langle F(t), \phi\rangle\, dt,\ \phi \in \mathbb{S}(H)_0$, называется интегралом Петтиса от F: $\Phi{=}\int_{\mathbb{R}} F(t)\, dt$. Для $F(t) : \mathbb{R} \to \mathbb{S}(H)_{-0}$ такого, что произведение Вика $F(t)\diamond\mathbb{W}(t)$ является интегрируемым по Петтису, интеграл Хитсуды–Скорохода есть $\int_{\mathbb{R}} F(t)\delta W(t) := \int_{\mathbb{R}} F(t)\diamond\mathbb{W}(t)dt \in \mathbb{S}(H)_{-0}$. Теперь пусть $\Psi(t)$ – семейство ограниченных операторов, тогда свертка $\Psi * \mathbb{W}$ определяется следующим образом:

$$\int_0^t \Psi(t-s)\delta W(s) := \int_0^t \Psi(t-s)\diamond\mathbb{W}(s)ds = \int_0^t \Psi(t-s)\mathbb{W}(s)ds =$$
$$= \sum_{k=1}^{\infty}\left(\int_0^t \Psi(t-s)\mathbb{W}_k(s)ds\right)\mathbf{h}_{\varepsilon_k} = \sum_{i=1}^{\infty}\int_0^t \Psi(t-s)e_i d\,\beta_i(s).$$

Стохастическая свертка в рассматриваемом случае – это свертка $S(\cdot)R^{-1}$ с $\mathbb{W}(\cdot)$. При условии $\int_0^T \|S(t)R^{-1}\|^2 dt < \infty$ она определена и принадлежит пространству $\mathbb{S}(H)_{-0}$.

Итак, рассматриваем задачу Коши (1) в пространствах $\mathbb{S}(H)_{-1},\ \mathbb{S}(H_1^*)_{-1}$. Имеет место следующий результат.

Теорема 4.1. *Пусть A – генератор R-полугруппы $\{S(t), t \in [0,\tau)\}$, $\tau > T$, где R – самосопряженный оператор в пространстве H, $\mathbb{W}(t) \in \mathbb{S}(H)_{-1}$, $\xi \in \operatorname{dom} A_{-1} \subset \mathbb{S}(H)_{-1}$ и пространство H_1^* определяется оператором $P = R^{-1}$. Тогда задача* (1) *имеет единственное (предсказуемое, непрерывно-дифференцируемое по t) решение в пространстве $\mathbb{S}(H_1^*)_{-1}$:*

$$X(t) = S(t)R^{-1}\xi + \int_0^t S(t-s)R^{-1}\delta W(s), \quad t \in [0,T]. \tag{14}$$

Доказательство. В условиях теоремы оператор R^{-1} действует из H в H_1^* и из $\mathbb{S}(H)_{-1}$ в $\mathbb{S}(H_1^*)_{-1}$, следовательно, процесс $X(t)$, определяемый равенством (14), принадлежит пространству $\mathbb{S}(H_1^*)_{-1}$. Покажем, что X является решением задачи (1). Применим к ней преобразование Эрмита и будем искать непрерывно дифференцируемый процесс – решение задачи

$$\mathcal{H}\left[\frac{dX(t)}{dt}\right](z) = \mathcal{H}\Big[AX(t) + \mathbb{W}(t)\Big](z), \quad t \in [0,T], \quad \mathcal{H}[X(0)](z) = \mathcal{H}\xi(z). \tag{15}$$

С учетом замкнутости оператора A и связи между дифференцируемостью процесса и дифференцируемостью его преобразования Эрмита [5, 6] задача (15) принимает вид

$$\frac{d\mathcal{H}[X(t)]}{dt}(z) = A\mathcal{H}[X(t)](z) + \mathcal{H}[\mathbb{W}(t)](z), \ t \in [0,T], \quad \mathcal{H}[X(0)](z) = \mathcal{H}\xi(z).$$

Теперь покажем, что существует q такое, что при $z \in K_q$

$$S(t)R^{-1}\mathcal{H}\xi(z) + \int_0^t S(t-s)R^{-1}\mathcal{H}[\mathbb{W}(s)](z)ds =$$
$$= \mathcal{H}[S(t)R^{-1}\xi](z) + \int_0^t \mathcal{H}[S(t-s)R^{-1}\mathbb{W}(s)](z)ds =: u(t,z) = u(t)$$

является решением задачи

$$u'(t) = Au(t) + \mathcal{H}[\mathbb{W}(t)], \ t \in [0,T], \quad u(0) = \mathcal{H}\xi. \tag{16}$$

В силу определения пространства H_1^*, для $z \in K_q$, $q > 2$, имеем

$$\sum_{k=1}^{\infty} \|R^{-1}\mathbb{W}_k(t)z^{q\varepsilon_k}\|_{H_1^*} \leqslant C\sum_{k=1}^{\infty}(2k)^{-q} < \infty,$$

$$\sum_{k=1}^{\infty} \|R^{-1}\mathbb{W}'_k(t)z^{q\varepsilon_k}\|_{H_1^*} \leqslant C\sum_{k=1}^{\infty}k(2k)^{-q} < \infty.$$

Следовательно, преобразования Эрмита $\mathcal{H}[R^{-1}\mathbb{W}(t)](z)$ и $\mathcal{H}[R^{-1}\mathbb{W}'(t)](z)$ определены для $z \in K_q$, $q > 2$. Теперь воспользуемся свойством, что если функция $F(t,z)\colon [0,T]\times K_q \to H$, $q>1$, является ограниченной и ее коэффициенты $c_\alpha(t)$ в разложении $F(t,z) = \sum_{\alpha\in\mathcal{J}} c_\alpha(t) z^\alpha$ непрерывны по $t \in [0,T]$ для любого $\alpha \in \mathcal{J}$, то $F(t,z)$ является непрерывной $t \in [0,T]\times \overline{K}_{2q}$. Применив его к сумме ряда $\sum\limits_{k=1}^{\infty} R^{-1}\mathbb{W}'_k(t) z^{\varepsilon_k}$, заключаем, что она непрерывна на $[0,T]$ при $q>4$. Учитывая уже отмеченную связь между дифференцируемостью процесса и дифференцируемостью его преобразования Эрмита, получаем, что процесс $\{\mathbb{W}(t)\}$ имеет непрерывную производную на $[0,T]$. В силу непрерывной дифференцируемости $\{\mathbb{W}(t)\}$ имеем

$$\int_0^{t-s} S(r)\mathcal{H}[R^{-1}\mathbb{W}(s)]\,dr = \int_0^t \int_0^{t-s} S(r)\mathcal{H}[R^{-1}\mathbb{W}'(s)]\,dr\,ds, \quad t\in[0,T].$$

Отсюда, используя для генератора R-полугруппы равенства (3), находим

$$\int_0^t Au(s)\,ds = S(t)\mathcal{H}[R^{-1}\xi] - \mathcal{H}\xi + \int_0^t\int_0^\tau S(\tau - s)\mathcal{H}[R^{-1}\mathbb{W}'(s)]\,ds\,d\tau - \mathcal{H}[W(t)]$$

при $z\in K_q$, $q>4$. Следовательно, $u = u(t,z) = \mathcal{H}[X(t)](z)$, $z \in K_q$, $q>4$, является решением задачи (16). (Единственное) решение исходной задачи (1) получается из него обратным преобразованием Эрмита:

$$X(t) = \mathcal{H}^{-1}\Big[S(t)\mathcal{H}[R^{-1}\xi](z) + \int_0^t S(t-s)\mathcal{H}[R^{-1}\mathbb{W}(s)](z)\,ds\Big] \in \mathbb{S}(H_1^*)_{-1},$$

т. е. определяется равенством (14).

Замечание 4.1. *Для* $F = \sum\limits_{\alpha\in\mathcal{J}} c_\alpha \mathbf{h}_\alpha \in \mathbb{S}(H_1^*)_{-1}$ *обобщенное математическое ожидание определяется равенством* $\mathbb{E}[F] := c_{(0,\dots)} = \mathcal{H}F(0)$. *Отсюда* $\mathbb{E}[X(t)] = S(t)\mathbb{E}[R^{-1}\xi]$.

Литература

1. Иванов В. К. Об условиях корректности Адамара в пространствах обобщенных функций // Сиб. матем. журн. 1987. № 6. С. 53–59.

2. Иванов В. К., Мельникова И. В. Новые обобщенные функции и слабая корректность операторных задач // Докл. АН СССР. 1991. Т. 317, № 1. С. 22–26.

3. Kuo H. H. Lectures on white noise analysis // Soochow J. Mathematics. 1992. Vol. 18, № 3. P. 229–300.

4. Holden H., Øksendal B., Ubøe J. et. al. Stochastic partial differential equations. A modelling, white noise functional approach. Boston; Basel; B.: Birkhäuser, 1996.

5. Filinkov A., Sorensen J. Differential equations in spaces of abstract stochastic distributions // Stochastics and Stochastics Reports. 2002. Vol. 72, № 3–4. P. 129–173.

6. Melnikova I. V., Filinkov A. I., Alshansky M. A. Abstract stochastic equations II. Solutions in Spaces of Abstract Stochastic Distributions // J. Math. Sci. 2003. Vol. 116, № 5. P. 3620–3656.

7. Da Prato G., Zabczyk J., Stochastic equations in infinite dimensions. Cambridge: Cambridge Univ. Press, 1992

8. Melnikova I. V., Filinkov A.I., Anufrieva U. A. Abstract stochastic equations I. Classical and Generalized Solutions // J. Math. Sci. 2002. Vol. 111, № 2. P. 3430–3475.

9. Komatsu H. Ultradistributions, I. Structure theorems and characterization // J. Fac. Sci. Univ. Tokyo. 1973. Vol. 20, № 1. P. 25–106.

10. Melnikova I. V. Regularized solutions to Cauchy problems well posed in the extended sense // J. Int. Transforms and Spec. Functions. 2006. № 5. P. 1–7.

11. Cioranescu I., Lumer G. Regularization of evolution equations via kernels $k(t)$, k-evolution operators and convoluted semigroups, generation theorems // Seminar Notes in Func. Anal. and PDEs, 1993–1994. Louisiana State Univ., Baton Rouge. 1994. P. 45–52.

12. Cioranescu I. Local convoluted semigroups // Evolution Equations. Lecture Notes in Pure and Appl. Math. N. Y.: Marcel Dekker, 1995. Vol. 168.

13. Davies E. B., Pang M. M. The Cauchy problem and a generalization of the Hille-Yosida theorem // Proc. London Math. Soc. 1987. Vol. 55, № 1. P. 181–208.

14. Tanaka N., Okazawa N. Local C-semigroups and local integrated semigroups // Ibid. 1990. Vol. 61, № 3. P. 63–90.

15. Melnikova I. V., Filinkov A. Abstract stochastic problems with generators of regularized semigroups // J. Dynamic Systems and Application. 2008.

16. Melnikova I. V., Filinkov A. The Cauchy problem: Three approaches Monographs and Surveys in Pure and Applied Mathematics. Vol. 120. L.; Washington; N. Y.: CRC Press, 2001.

17. Melnikova I. V., Anufrieva U. A. Pecularities and regularization of ill-posed Cauchy problems with differential operators // J. Math. Sci. 2008. Vol. 148, № 4. P. 481–632.

18. Гельфанд И. М., Шилов Г. Е. Обобщенные функции. Вып. 3. Некоторые вопросы теории дифференциальных уравнений. М.: Физматгиз, 1968.

Статья поступила 17.12.2007 г.
Окончательный вариант 21.04.2008 г.