УДК 517.518.453

Н. А. Ильясов

ПРЯМАЯ И ОБРАТНАЯ ТЕОРЕМЫ В ТЕОРИИ АБСОЛЮТНО СХОДЯЩИХСЯ РЯДОВ ФУРЬЕ НЕПРЕРЫВНЫХ ПЕРИОДИЧЕСКИХ ФУНКЦИЙ

1. Введение и формулировка основных результатов

Пусть $C(\mathbb{T})$ – пространство всех непрерывных 2π-периодических функций с равномерной нормой $\|f\| = \max\{|f(x)| : x \in \mathbb{T}\}$, $\mathbb{T} = (-\pi, \pi]$, $\omega_\ell(f;\delta)$ – модуль гладкости ℓ-го порядка функции $f \in C(\mathbb{T})$, $\ell \in \mathbb{N}$ (при $\ell = 1$ – модуль непрерывности: $\omega_1(f;\delta) \equiv \omega(f;\delta)$), определяемый следующим образом:

$$\omega_\ell(f;\delta) = \sup\left\{\left\|\Delta_h^\ell f(\cdot)\right\| : h \in \mathbb{R},\ |h| \leqslant \delta\right\}, \quad \delta > 0,$$

где

$$\Delta_h^\ell f(x) = \sum_{\nu=0}^{\ell}(-1)^{\ell-\nu}\binom{\ell}{\nu} f(x+\nu h); \quad \binom{\ell}{\nu} = \frac{\ell!}{\nu!(\ell-\nu)!}, \quad x \in \mathbb{R};$$

$E_n(f)$ – наилучшее равномерное приближение функции $f \in C(\mathbb{T})$ тригонометрическими полиномами порядка не выше n; $\Omega_\ell(0,\pi]$ – класс функций ω, определенных на $(0,\pi]$ и удовлетворяющих условиям $0 < \omega(\delta) \downarrow 0$ $(\delta \downarrow 0)$ и $\delta^{-\ell}\omega(\delta) \downarrow$ $(\delta \uparrow)$; M_0 – класс всех числовых последовательностей $\lambda = \{\lambda_n\}_{n=1}^{\infty}$, удовлетворяющих условию $0 < \lambda_n \downarrow 0$ $(n \uparrow \infty)$.

Для функции $f \in C(\mathbb{T})$ с рядом Фурье

$$f(x) \sim \sigma(f;x) \equiv \frac{1}{2}a_0(f) + \sum_{k=1}^{\infty}(a_k(f)\cos kx + b_k(f)\sin kx) \tag{1}$$

обозначим $\rho_n(f) = \sum_{k=n+1}^{\infty}(|a_k(f)| + |b_k(f)|)$, $n \in \mathbb{Z}_+$; очевидно, что если $\rho_0(f) < \infty$, то $\rho_n(f) \downarrow 0$ при $n \uparrow \infty$. Кроме того, из условия $\rho_0(f) < \infty$ следует (по известному из анализа признаку Вейерштрасса) абсолютная и равномерная сходимость всюду на $\mathbb{T}$ ряда (1) к функции $f \in C(\mathbb{T})$, при этом $E_n(f) \leqslant \|f(\cdot) - S_n(f;\cdot)\| \leqslant \rho_n(f)$, где $S_n(f;\cdot)$ – частная сумма порядка $n \in \mathbb{Z}_+$ ряда (1). С другой стороны, если ряд (1) абсолютно сходится всюду на $\mathbb{T}$, то в силу теоремы Лузина–Данжуа (см., например, [1, с. 173]) $\rho_0(f) < \infty$. Таким образом, абсолютная сходимость ряда Фурье (1) функции $f \in C(\mathbb{T})$ всюду на $\mathbb{T}$ и сходимость неотрицательного числового ряда $\rho_0(f)$ равносильны, в силу чего $\rho_n(f)$, $n \in \mathbb{N}$, мы называем величиной, характеризующей скорость абсолютной сходимости ряда (1) на $\mathbb{T}$.

В этой статье сформулированы так называемые прямая и обратная теоремы в теории абсолютно сходящихся рядов Фурье (ТАСРФ) по тригонометрической системе для случая непрерывных периодических функций, относящиеся к классическому аспекту этой теории – изучению взаимосвязей между степенью гладкости заданной функции и скоростью абсолютной сходимости ее ряда Фурье, а также приведены утверждения о точности полученных результатов на соответствующих классах функций, определяемых мажорантами рассматриваемых характеристик.

Прямой теоремой в ТАСРФ мы называем всякое утверждение, позволяющее по известным структурным (либо конструктивным) свойствам заданных функций из некоторого класса делать заключение о скорости абсолютной сходимости их рядов Фурье по соответствующей системе разложения, т. е. в рассматриваемом случае судить о скорости сходимости к нулю числовой последовательности $\{\rho_n(f)\}_{n=1}^{\infty}$. Ясно, что подобные утверждения относятся к дескриптивной части ТАСРФ, так как содержат также заключения об абсолютной сходимости рядов Фурье рассматриваемых функций.

Обратной теоремой в ТАСРФ мы называем всякое утверждение, позволяющее по известной скорости абсолютной сходимости на заданном множестве ряда Фурье функции из некоторого класса (т. е. в данном случае по известной скорости $\rho_n(f) \to 0$ $(n \to \infty)$) делать заключение о ее структурных (либо конструктивных) свойствах.

Первые результаты в этом направлении, по-видимому, получены Лоренцом [2] (см. также [1, с. 209–210]), доказавшим, в частности, следующие теоремы.

Теорема 1 ([2, с. 137]). *Пусть* $f \in C(\mathbb{T})$ *и* $\omega(f;\delta) = O(\delta^\alpha)$, $\delta \in (0,\pi]$, *где* $\alpha \in (1/2, 1]$. *Тогда* $\rho_0(f) < \infty$ *и* $\rho_n(f) = O(n^{-(\alpha-1/2)})$, $n \in \mathbb{N}$.

Теорема 2 ([2, с. 140–141]). *Пусть* $f \in C(\mathbb{T})$ *и* $\rho_n(f) = O(n^{-\alpha})$, $n \in \mathbb{N}$, *где* $\alpha \in (0,1]$. *Тогда при* $0 < \alpha < 1$ $\omega(f;\delta) = O(\delta^\alpha)$, $\delta \in (0,\pi]$, *и при* $\alpha = 1$ $\omega(f;\delta) = O(\delta \ln(\pi e/\delta))$, $\delta \in (0,\pi]$.

Нами получены следующие результаты.

Теорема 3 (прямая). *Пусть* $f \in C(\mathbb{T})$, $\ell \in \mathbb{N}$ *и сходится ряд*

$$\sum_{n=1}^{\infty} n^{-1/2} E_{n-1}(f) < \infty \tag{2}$$

либо эквивалентный ему ряд

$$\sum_{n=1}^{\infty} n^{-1/2}\omega_\ell(f;\pi/n) < \infty; \tag{3}$$

тогда $\rho_0(f) < \infty$ *и справедливы оценки:*

1) $\rho_0(f) \leqslant C_1 \sum_{n=1}^{\infty} n^{-1/2}E_{n-1}(f) \leqslant C_2(\ell) \sum_{n=1}^{\infty} n^{-1/2}\omega_\ell(f;\pi/n)$;

2) $\rho_n(f) \leqslant C_3\{n^{1/2}E_{n-1}(f) + \sum_{\nu=n+1}^{\infty} \nu^{-1/2}E_{\nu-1}(f)\}$;

3) $\rho_n(f) \leqslant C_4(\ell) \sum_{\nu=n+1}^{\infty} \nu^{-1/2}\omega_\ell(f;\pi/\nu), \quad n \in \mathbb{N}$.

Здесь и далее C_k, $k \in \mathbb{N}$, – положительные абсолютные постоянные, а $C_k(\ell)$, $k \in \mathbb{N}$, – положительные постоянные, зависящие лишь от указанного в скобках параметра ℓ.

Теорема 4 (обратная). *Пусть* $f \in C(\mathbb{T})$, $\ell \in \mathbb{N}$ *и* $\rho_0(f) < \infty$; *тогда справедлива оценка*

$$\omega_\ell(f;\pi/n) \leqslant C_5(\ell) n^{-\ell} \sum_{\nu=1}^{n} \nu^{\ell-1}\rho_{\nu-1}(f), \quad n \in \mathbb{N}. \tag{4}$$

Первые результаты об абсолютной сходимости рядов Фурье непрерывных периодических функций в терминах поведения их последовательности наилучших приближений и модулей непрерывности были получены значительно раньше в работах Фредгольма [3], Бернштейна [4, 5] и Саса [6]. Бернштейном [4, 5] в случае $\ell = 1$ была доказана справедливость импликации (см. также [1, с. 608; 7, теорема (3.1) на с. 384]):

$$f \in C(\mathbb{T}),\ \omega(f;\delta) = O(\delta^\alpha),\ \alpha \in (1/2, 1] \implies \rho_0(f) < \infty. \tag{5}$$

Позднее было обнаружено (см. например [8, с. 152–153; 9, с. 253; 10, с. 369]), что (5) является частным случаем следующего утверждения (которое получается из предложения, установленного Фредгольмом [3]; см. также [7, теорема (3.10) на с. 387]):

$$f \in C(\mathbb{T}),\ \omega(f;\delta) = O(\delta^\alpha),\ \alpha \in (0, 1] \implies \sum_{n=1}^{\infty}(|a_n(f)|^\beta + |b_n(f)|^\beta) < \infty$$

при всех $\beta > 2/(2\alpha+1)$ ($\iff \alpha > 1/\beta - 1/2 \implies \alpha > 1/2$ при $\beta = 1$). Последний результат был также установлен Сасом [6] (см. [1, с. 647],). В общем случае справедливость импликации (3) $\Longrightarrow \rho_0(f) < \infty$ установлена Бернштейном [11] (см. также [7, с. 384–385; 1, с. 608]) при $\ell = 1$, Стечкиным [12] при $\ell \in \mathbb{N}$, а импликация (2) $\Longrightarrow \rho_0(f) < \infty$ доказана Бернштейном [11] (см. также [1, с. 608–613]).

Для заданных $\ell \in \mathbb{N}$, $\omega \in \Omega_\ell(0,\pi]$ и $\varepsilon = \{\varepsilon_n\} \in M_0$ обозначим

$$H^\ell[\omega] = \{f \in C(\mathbb{T}) : \omega_\ell(f;\delta) \leqslant \omega(\delta), \delta \in (0,\pi]\},$$

$$E[\varepsilon] = \{f \in C(\mathbb{T}) : E_{n-1}(f) \leqslant \varepsilon_n, n \in \mathbb{N}\}.$$

Теорема 5. *Пусть $\ell \in \mathbb{N}$, $\omega \in \Omega_\ell(0,\pi]$ и $\varepsilon \in M_0$; тогда*

1) *если сходится ряд $\sum_{n=1}^\infty n^{-1/2}\omega(\pi/n)$, то*

$$\sup\{\rho_n(f) : f \in H^\ell[\omega]\} \underset{(\ell)}{\asymp} \sum_{\nu=n+1}^\infty \nu^{-1/2}\omega(\pi/\nu), \quad n \in \mathbb{N}; \tag{6}$$

2) *если сходится ряд $\sum_{n=1}^\infty n^{-1/2}\varepsilon_n$ и последовательность $\varepsilon = \{\varepsilon_n\} \in M_0$ удовлетворяет условию: $n^\beta \varepsilon_n \uparrow$ ($n \uparrow$) для некоторого $\beta > 0$, то*

$$\sup\{\rho_n(f) : f \in E[\varepsilon]\} \underset{(\beta)}{\asymp} \sum_{\nu=n+1}^\infty \nu^{-1/2}\varepsilon_\nu, \quad n \in \mathbb{N}. \tag{7}$$

Соотношение $u_n \underset{(\ell)}{\asymp} v_n$ обозначает существование постоянных $0 < C_1 \leqslant C_2$, зависящих лишь от указанного параметра ℓ, что $C_1 v_n \leqslant u_n \leqslant C_2 v_n$, $n \in \mathbb{N}$.

Условие сходимости ряда в пункте 1 теоремы 5 необходимо и достаточно для того, чтобы $\rho_0(f) < \infty$ для каждой функции $f \in C(\mathbb{T})$ с $\omega_\ell(f;\delta) = O(\omega(\delta))$, $\delta \in (0,\pi]$ (в частности, для каждой $f \in H^\ell[\omega]$). Достаточность следует из импликации (3) $\Longrightarrow \rho_0(f) < \infty$ в теореме 3. Необходимость доказана Бернштейном и Стечкиным. Бернштейном – в работе [4] при $\ell = 1$, $\omega(\delta) = \delta^\alpha$, $\alpha \in (0, 1/2]$ (см. также [1, с. 623–624] и [7, теорема (3.10) на с. 387]); в работе [11] при $\ell = 1$ и функции $\omega \in \Omega_1(0,\pi]$, удовлетворяющей дополнительным условиям: существует число $\beta \in (0,1)$ такое, что $\delta^{-\beta}\omega(\delta) \uparrow$ и $\delta^{-(1-\beta)}\omega(\delta) \downarrow$ при $\delta \uparrow$ (позднее в авторских комментариях к [13, с. 590] им было отмечено, что первое из этих условий является излишним). Стечкиным – в работе [14] при $\ell = 1$ (см. также [1, с. 625–628]); в работе [12, следствие 4.2 на с. 237] при любом $\ell \in \mathbb{N}$ в случае произвольных $\omega \in \Omega_\ell(0,\pi]$ (см. также пункт 2 леммы 3 в разделе 3).

Условие сходимости ряда в пункте 2 теоремы 5 необходимо и достаточно для того, чтобы $\rho_0(f) < \infty$ для каждой функции $f \in C(\mathbb{T})$ такой, что

$E_{n-1}(f) = O(\varepsilon_n)$, $n \in \mathbb{N}$ (в частности, для каждой $f \in E[\varepsilon]$). Достаточность следует из импликации (2) $\Longrightarrow \rho_0(f) < \infty$ в теореме 3, а необходимость доказана Бернштейном [11] (подробное доказательство приведено в [1, с. 618–620]; см. также пункт 2 леммы 1 в разделе 3).

Следствие 1. *Пусть $\ell \in \mathbb{N}$, $\alpha \in \mathbb{R}$; тогда*

1) *если $\alpha \in (1/2, \ell]$ и $\omega(\delta) = \delta^\alpha$, $\delta \in (0, \pi]$, то*

$$\sup\{\rho_n(f) : f \in H^\ell[\omega]\} \underset{(\ell,\alpha)}{\asymp} n^{-(\alpha-1/2)}, \quad n \in \mathbb{N};$$

2) *если $\alpha > 1/2$ и $\varepsilon_n = n^{-\alpha}$, $n \in \mathbb{N}$, то*

$$\sup\{\rho_n(f) : f \in E[\varepsilon]\} \underset{(\alpha)}{\asymp} n^{-(\alpha-1/2)}, \quad n \in \mathbb{N}.$$

Пункт 1 следствия 1 в случае $\ell = 1$ и $\alpha \in (0, 1)$ фактически получен в работе Лоренца [2]. Действительно, оценка сверху имеет место в силу теоремы 1. С другой стороны, в [2] на с. 139 отмечено, что для действительной части тригонометрического ряда $\sum_{n=1}^{\infty} e^{in\ln n} n^{-(\alpha+1/2)} e^{inx}$ (i – мнимая единица, $\alpha \in \mathbb{R}$), который в случае $\alpha > 0$ равномерно сходится на периоде $\mathbb{T}$ к функции $\varphi_\alpha \in C(\mathbb{T})$, причем $\omega(\operatorname{Re}\varphi_\alpha; \delta) = O(\delta^\alpha)$ при $\alpha \in (0, 1)$, $\delta \in (0, \pi]$ (см. [7, с. 317–321, 387; 15, с. 119–122, 140]), справедлива оценка $\rho_n(\operatorname{Re}\varphi_\alpha) \geqslant C_6(\alpha) n^{-(\alpha-1/2)}$, $n \in \mathbb{N}$, $\alpha > 1/2$.

Следствие 2. *Для того чтобы ряд Фурье каждой функции $f \in C(\mathbb{T})$ с $\omega_\ell(f; \delta) = O(\omega(\delta))$, $\delta \in (0, \pi]$, абсолютно сходился всюду на $\mathbb{T}$ со скоростью $\rho_n(f) = O(\lambda_n)$, $n \to \infty$, где $\omega \in \Omega_\ell(0, \pi]$, $\lambda = \{\lambda_n\}_{n=1}^\infty \in M_0$, необходимо и достаточно выполнение условия*

$$\sum_{\nu=n+1}^{\infty} \nu^{-1/2} \omega(\pi/\nu) = O(\lambda_n), \quad n \in \mathbb{N}. \tag{8}$$

Ниже приведены примеры функций $\omega \in \Omega_1(0; \pi]$ и последовательностей $\lambda \in M_0$, удовлетворяющих условию (8). Отметим, что достаточно ограничиться рассмотрением случая $\ell = 1$, так как переход к случаю $\ell > 1$ легко осуществляется с помощью следующего утверждения: если для некоторых $\omega \in \Omega_1(0; \pi]$ и $\lambda \in M_0$ имеет место (8), то функция $\varphi_\ell(\delta) = \omega(\delta)^\ell \in \Omega_\ell(0; \pi]$ и справедлива оценка

$$\sum_{\nu=n+1}^{\infty} \nu^{-1/2} \varphi_\ell(\pi/\nu) = O(\omega(\pi/n)^{\ell-1} \lambda_n), \quad n \in \mathbb{N}.$$

Условию (8) при $\ell = 1$ удовлетворяют

$$\omega(\delta) = \delta^{\alpha},\ \alpha \in (1/2, 1], \quad \text{и} \quad \lambda = \{n^{-(\alpha-1/2)}\};$$
$$\omega(\delta) = \delta^{\alpha} \ln(e\pi/\delta),\ \alpha \in (1/2, 1], \quad \text{и} \quad \lambda = \{n^{-(\alpha-1/2)} \ln(en)\};$$
$$\omega(\delta) = \delta^{\alpha} / \ln(e\pi/\delta),\ \alpha \in (1/2, 1), \quad \text{и} \quad \lambda = \{n^{-(\alpha-1/2)} / \ln(en)\}.$$

Кроме того, следует отметить, что если $\omega(\delta) = \delta^{1/2} / \ln(e\pi/\delta)$, то соотношение (8) не выполняется ни для какой последовательности $\lambda \in M_0$, так как в этом случае ряд в левой части (8) расходится со скоростью $\ln(\ln(en))$ $(n \to \infty)$.

Для заданной последовательности $\lambda = \{\lambda_n\}_{n=1}^{\infty} \in M_0$ обозначим

$$A[\lambda] = \{f \in C(\mathbb{T}) :\ \rho_{n-1}(f) \leqslant \lambda_n,\ n \in \mathbb{N}\}.$$

Заметим, что для всякой последовательности $\lambda \in M_0$ существует функция $f(\cdot;\lambda) \in C(\mathbb{T})$ такая, что $\rho_{n-1}(f) = \lambda_n$, $n \in \mathbb{N}$. Действительно, в силу известной теоремы Пэли (см., например, [1, теорема 1 на с. 277]) в качестве $f(\cdot;\lambda)$ подходит четная непрерывная функция с $a_n(f) = \lambda_n - \lambda_{n+1}$, $n \in \mathbb{N}$. Отсюда, в частности, следует, что условие $0 < \lambda_n \downarrow 0$ $(n \uparrow \infty)$ полностью характеризует порядок убывания последовательности $\{\rho_{n-1}(f)\}_{n=1}^{\infty}$ для любой функции $f \in C(\mathbb{T})$ с $\rho_0(f) < \infty$. Отметим, что указанная функция $f(\cdot;\lambda)$ ранее применялась Стечкиным в [16, с. 52].

Теорема 6. *Пусть $\ell \in \mathbb{N}$, $\lambda \in M_0$; тогда*

$$\sup\{\omega_{\ell}(f;\pi/n) : f \in A[\lambda]\} \underset{(\ell)}{\asymp} n^{-\ell} \sum_{\nu=1}^{n} \nu^{\ell-1} \lambda_{\nu}, \quad n \in \mathbb{N}. \tag{9}$$

Следствие 3. *Пусть $\ell \in \mathbb{N}$, $\alpha \in (0, \ell]$; тогда*

1) *если $\lambda_n = (\pi/n)^{\alpha}$, $n \in \mathbb{N}$, и $\delta \in (0, \pi]$, то*
$$\sup\{\omega_{\ell}(f;\delta) : f \in A[\lambda]\} \underset{(\ell,\alpha)}{\asymp} \{\delta^{\alpha},\ \alpha \in (0,\ell); \quad \delta^{\ell} \ln(\pi e/\delta),\ \alpha = \ell\};$$

2) *если $\lambda_n = (\pi/n)^{\ell}$, $n \in \mathbb{N}$, и $\delta \in (0, \pi]$, то*
$$\sup\{\omega_{\ell+1}(f;\delta) : f \in A[\lambda]\} \underset{(\ell)}{\asymp} \delta^{\ell}.$$

Пункт 1 следствия 3 в случае $\ell = 1$ фактически установлен в работе Лоренца [2]. Действительно, оценка сверху имеет место в силу теоремы 2. С другой стороны, в [2] на с. 141 отмечено, что для функции $f(x) = \sum_{n=1}^{\infty} n^{-(\alpha+1)} \sin nx$ с $\rho_{n-1}(f) = O(n^{-\alpha})$, $n \in \mathbb{N}$, при $\alpha \in (0, 1)$ имеет место оценка $\omega(f;\delta) \geqslant C_7(\alpha)\delta^{\alpha}$, $\delta \in (0, \pi]$. Кроме того, в [2] на с. 142 показано, что для функции $\varphi(x) = \sum_{k=1}^{\infty} 4^{-k} \cos 4^k x$ с $\rho_{n-1}(\varphi) = O(n^{-1})$, $n \in \mathbb{N}$, справедлива оценка $\omega(f;\delta) \geqslant C_8 \delta \ln(\pi e/\delta)$, $\delta \in (0, \pi]$.

2. Доказательства теорем 3 и 4

Доказательство теоремы 3. Прежде всего отметим, что эквивалентность рядов (2) и (3) при $\ell = 1$ установлена Стечкиным [17, теорема 1, с. 225–226] (см. также [1, с. 612–613]) с помощью известных неравенств – прямой и обратной теорем теории приближений периодических непрерывных функций (см., например, [18, теорема 1 на с. 136; 19, теорема 1 на с. 226, теорема 8 на с. 234):

$$C_9(\ell)^{-1}E_{n-1}(f) \leqslant \omega_\ell(f;\pi/n) \leqslant C_{10}(\ell)n^{-\ell}\sum_{\nu=1}^{n}\nu^{\ell-1}E_{\nu-1}(f). \tag{10}$$

Действительно, в силу неравенств (10) имеем

$$\sum_{n=1}^{\infty}n^{-1/2}E_{n-1}(f) \leqslant C_9(\ell)\sum_{n=1}^{\infty}n^{-1/2}\omega_\ell(f;\pi/n) \leqslant$$
$$\leqslant C_9(\ell)C_{10}(\ell)\sum_{n=1}^{\infty}n^{-(\ell+1/2)}\sum_{\nu=1}^{n}\nu^{\ell-1}E_{\nu-1}(f) =$$
$$= C_9(\ell)C_{10}(\ell)\sum_{\nu=1}^{\infty}\nu^{\ell-1}E_{\nu-1}(f)\sum_{n=\nu}^{\infty}n^{-(\ell+1/2)} \leqslant$$
$$\leqslant C_{11}(\ell)\sum_{\nu=1}^{\infty}\nu^{-1/2}E_{\nu-1}(f).$$

В доказательстве левой оценки в пункте 1 теоремы 3 используется следующее неравенство, полученное Стечкиным в [20, с. 178, теорема 1 в случае $p = 2$, $\beta = 1$; 17, с. 229, теорема 3) для случая функций $f \in L_2(\mathbb{T})$:

$$\rho_0(f) \leqslant C_{12}\sum_{n=1}^{\infty}n^{-1/2}E_{n-1}(f)_2, \quad C_{12} = 2/\sqrt{3}, \tag{11}$$

где $L_p(\mathbb{T})$, $p \in [1,\infty)$ – пространство всех измеримых 2π-периодических функций с нормой $\|f\|_p = (\pi^{-1}\int_{-\pi}^{\pi}|f(x)|^p\,dx)^{1/p} < \infty$, $E_{n-1}(f)_2 = \|f - S_{n-1}(f)\|_2$ – наилучшее квадратическое приближение порядка $n-1 \in \mathbb{Z}_+$ функции $f \in L_2(\mathbb{T})$. Обозначим через $T_n(f)$ тригонометрический полином наилучшего равномерного приближения функции $f \in C(\mathbb{T})$ порядка $n \in \mathbb{Z}_+$; тогда

$$E_n(f)_2 \leqslant \|f - T_n(f)\|_2 \leqslant \sqrt{2}\,\|f - T_n(f)\| = \sqrt{2}E_n(f),$$

откуда $E_n(f)_2 \leqslant \sqrt{2}E_n(f)$, $n \in \mathbb{Z}_+$. Применяя последнее неравенство в оценке (11), получим левую оценку в пункте 1:

$$\rho_0(f) \leqslant C_{12}\sum_{n=1}^{\infty}n^{-1/2}E_{n-1}(f)_2 \leqslant \sqrt{2}C_{12}\sum_{n=1}^{\infty}n^{-1/2}E_{n-1}(f).$$

Правая оценка в пункте 1 теоремы 3 имеет место в силу левого неравенства в (10).

Положим $g_n(f) = f - S_n(f)$, $n \in \mathbb{N}$; имеем $\|g_n(f)\|_2 = E_n(f)_2 \leqslant \|f\|_2$. Кроме того, ясно, что справедливы неравенства

$$E_{\nu-1}(g_n)_2 \leqslant \|g_n(f)\|_2 = E_n(f)_2, \quad \nu \in \mathbb{N};$$
$$E_\nu(g_n)_2 \leqslant E_\nu(f)_2 + E_\nu(S_n(f))_2 = E_\nu(f)_2, \quad \nu \geqslant n,\ n \in \mathbb{N}.$$

В силу этих неравенств из оценки (11) получим

$$\rho_n(f) = \rho_0(g_n) = \rho_0(f - S_n(f)) \leqslant C_{12} \sum_{\nu=1}^{\infty} \nu^{-1/2} E_{\nu-1}(g_n)_2 =$$
$$= C_{12} \left[\sum_{\nu=1}^{n} \nu^{-1/2} E_{\nu-1}(g_n)_2 + \sum_{\nu=n+1}^{\infty} \nu^{-1/2} E_{\nu-1}(g_n)_2 \right] \leqslant$$
$$\leqslant C_{12} \left[C_{13} n^{1/2} E_{n-1}(f)_2 + \sum_{\nu=n+1}^{\infty} \nu^{-1/2} E_{\nu-1}(f)_2 \right],$$

откуда ($n \in \mathbb{N}$)

$$\rho_n(f) \leqslant C_{14} \left[n^{1/2} E_{n-1}(f)_2 + \sum_{\nu=n+1}^{\infty} \nu^{-1/2} E_{\nu-1}(f)_2 \right]. \qquad (12)$$

Применяя в (12) установленное выше неравенство $E_n(f)_2 \leqslant \sqrt{2} E_n(f)$, $n \in \mathbb{Z}_+$, получаем оценку в пункте 2 теоремы 3.

Докажем оценку в пункте 3. Применяя левое неравенство из (10) в оценке из пункта 2, получим

$$\rho_n(f) \leqslant C_3 \left[n^{1/2} E_{n-1}(f) + \sum_{\nu=n+1}^{\infty} \nu^{-1/2} E_{\nu-1}(f) \right] \leqslant$$
$$\leqslant C_3 C_9(\ell) \left[n^{1/2} \omega_\ell(f; \pi/n) + \sum_{\nu=n+1}^{\infty} \nu^{-1/2} \omega_\ell(f; \pi/\nu) \right] \leqslant$$
$$\leqslant C_3 C_9(\ell) \left(2^{\ell+1/2} + 1 \right) \sum_{\nu=n+1}^{\infty} \nu^{-1/2} \omega_\ell(f; \pi/\nu),$$

так как

$$\sum_{\nu=n+1}^{\infty} \nu^{-1/2} \omega_\ell\left(f; \frac{\pi}{\nu}\right) \geqslant \sum_{\nu=n+1}^{2n} \nu^{-1/2} \omega_\ell\left(f; \frac{\pi}{\nu}\right) \geqslant \omega_\ell\left(f; \frac{\pi}{2n}\right) \sum_{\nu=n+1}^{2n} \nu^{-1/2} \geqslant$$
$$\geqslant (2n)^{-1/2} n \omega_\ell\left(f; \frac{\pi}{2n}\right) \geqslant 2^{-(\ell+1/2)} n^{1/2} \omega_\ell\left(f; \frac{\pi}{n}\right).$$

Теорема 3 доказана.

Оценка (12) другим способом ранее получена автором в ([21, с. 144, левая оценка в пункте 2 теоремы 1 при $p = 2$]) как следствие неравенства (см. там же оценку в пункте 2 леммы 1 при $p = 2$ на с. 145; $0 < u_k \in \mathbb{R}$, $k \in \mathbb{N}$)

$$\sum_{k=n+1}^{\infty} u_k \leqslant n^{1/2} \left(\sum_{k=n+1}^{\infty} u_k^2 \right)^{1/2} + \sum_{\nu=n}^{\infty} \nu^{-1/2} \left(\sum_{k=\nu+1}^{\infty} u_k^2 \right)^{1/2}, \quad n \in \mathbb{N},$$

в котором надо положить $u_k = \big(a_k(f)^2 + b_k(f)^2\big)^{1/2}$, $k \in \mathbb{N}$.

Доказательство теоремы 4. Обозначим $\Delta\rho_{\nu-1}(f) = \rho_{\nu-1}(f) - \rho_\nu(f)$, $\nu \in \mathbb{N}$. В силу известных свойств модулей гладкости (см., например, [19, с. 223–225]), учитывая $\rho_n(f) \downarrow 0$ при $n \uparrow \infty$, имеем

$$\begin{aligned}
\omega_\ell(f;\pi/n) &\leqslant \omega_\ell(f - S_n(f);\pi/n) + \omega_\ell(S_n(f);\pi/n) \leqslant \\
&\leqslant 2^\ell \big\| f - S_n(f) \big\| + \pi^\ell n^{-\ell} \big\| S_n^{(\ell)}(f) \big\| \leqslant \\
&\leqslant 2^\ell \sum_{\nu=n+1}^{\infty} (|a_\nu(f)| + |b_\nu(f)|) + \pi^\ell n^{-\ell} \sum_{\nu=1}^{n} \nu^\ell (|a_\nu(f)| + |b_\nu(f)|) = \\
&= 2^\ell \rho_n(f) + \pi^\ell n^{-\ell} \sum_{\nu=1}^{n} \nu^\ell \Delta\rho_{\nu-1}(f) \leqslant \\
&\leqslant 2^\ell \rho_n(f) + \pi^\ell n^{-\ell} \ell \sum_{\nu=1}^{n} \Delta\rho_{\nu-1}(f) \sum_{\mu=1}^{\nu} \mu^{\ell-1} = \\
&= 2^\ell \rho_n(f) + \pi^\ell n^{-\ell} \ell \sum_{\mu=1}^{n} \mu^{\ell-1} \sum_{\nu=\mu}^{n} \Delta\rho_{\nu-1}(f) = \\
&= 2^\ell \rho_n(f) - \pi^\ell n^{-\ell} \ell \rho_n(f) \sum_{\mu=1}^{n} \mu^{\ell-1} + \pi^\ell n^{-\ell} \ell \sum_{\mu=1}^{n} \mu^{\ell-1} \rho_{\mu-1}(f),
\end{aligned}$$

откуда

$$\omega_\ell(f;\pi/n) \leqslant C_5(\ell) n^{-\ell} \sum_{\mu=1}^{n} \mu^{\ell-1} \rho_{\mu-1}(f), \quad C_5(\ell) = \ell \pi^\ell,$$

так как

$$n^{-\ell} \ell \rho_n(f) \sum_{\mu=1}^{n} \mu^{\ell-1} \geqslant n^{-\ell} \ell \rho_n(f) \ell^{-1} n^\ell = \rho_n(f),$$

и, следовательно,

$$2^\ell \rho_n(f) - \pi^\ell n^{-\ell} \ell \rho_n(f) \sum_{\mu=1}^{n} \mu^{\ell-1} \leqslant 2^\ell \rho_n(f) - \pi^\ell \rho_n(f) < 0.$$

Теорема 4 доказана

3. Функции, используемые для оценок снизу

Нам понадобятся следующие вспомогательные леммы.

Лемма 1. *Для всякой последовательности $\varepsilon = \{\varepsilon_n\} \in M_0$ существует функция $g(\cdot;\varepsilon) \in C(\mathbb{T})$, обладающая следующими свойствами:*

1) $E_{n-1}(g) \leqslant C_{15}\varepsilon_n, \quad n \in \mathbb{N}$;

2) $\rho_0(g) < \infty \Longleftrightarrow \sum_{n=1}^{\infty} n^{-1/2}\varepsilon_n < \infty$;

3) *если ряд в правой части* 2) *сходится, то*

$$\sum_{\nu=n+1}^{\infty} \nu^{-1/2}\varepsilon_\nu \leqslant C_{16}\left(\rho_n(g) + n^{1/2}\varepsilon_{n+1}\right), \quad n \in \mathbb{N}.$$

Доказательство. Положим (см., например, [12, с. 227–228, 242; 1, с. 619–620])

$$g(x;\varepsilon) = \sum_{k=1}^{\infty} 2^{-k/2}(\varepsilon_{2^k} - \varepsilon_{2^{k+1}})t_{2^k-1}(x), \quad x \in \mathbb{R},$$

где для полиномов

$$t_{2^k-1}(x) = \sum_{\nu=2^{k-1}}^{2^k-1} \cos(\nu x + 2^{-k}\nu^2) = \mathrm{Re} \sum_{\nu=2^{k-1}}^{2^k-1} \exp(i(\nu x + 2^{-k}\nu^2))$$

имеют место оценки (см., например, [12, с. 225; 1, с. 622]) $\left\|t_{2^k-1}\right\| \leqslant C_{17}2^{k/2}$, $k \in \mathbb{N}$, C_{17} – абсолютная постоянная. В силу этих оценок получим

$$E_0(g) \leqslant \|g\| \leqslant \sum_{k=1}^{\infty} 2^{-k/2}(\varepsilon_{2^k} - \varepsilon_{2^{k+1}}) \left\|t_{2^k-1}\right\| \leqslant$$
$$\leqslant C_{17} \sum_{k=1}^{\infty}(\varepsilon_{2^k} - \varepsilon_{2^{k+1}}) = C_{17}\varepsilon_2 \leqslant C_{17}\varepsilon_1 < \infty$$

и, следовательно, $g(\cdot,\varepsilon) \in C(\mathbb{T})$. Далее, для каждого $n \in \mathbb{N}$ найдется такое число $m \in \mathbb{N}$, что $2^{m-1} \leqslant n < 2^m$; отсюда, учитывая свойства $E_n(f) \downarrow (n \uparrow)$ и $\varepsilon_n \downarrow 0$ $(n \uparrow \infty)$, имеем

$$\begin{aligned}E_{n-1}(g) &\leqslant E_{2^{m-1}-1}(g) \leqslant \|g(\cdot;\varepsilon) - S_{2^{m-1}-1}(g;\cdot)\| = \\ &= \Big\| \sum_{k=m}^{\infty} 2^{-k/2}(\varepsilon_{2^k} - \varepsilon_{2^{k+1}}) t_{2^k-1} \Big\| \leqslant \sum_{k=m}^{\infty} 2^{-k/2}(\varepsilon_{2^k} - \varepsilon_{2^{k+1}}) \left\| t_{2^k-1} \right\| \leqslant \\ &\leqslant C_{17} \sum_{k=m}^{\infty} (\varepsilon_{2^k} - \varepsilon_{2^{k+1}}) = C_{17}\varepsilon_{2^m} \leqslant C_{17}\varepsilon_n,\end{aligned}$$

откуда $E_{n-1}(g) \leqslant C_{17}\varepsilon_n$, $n \in \mathbb{N}$, т. е. имеет место 1).

Докажем 2). Если ряд в правой части 2) сходится, то в силу 1) и теоремы 3 $\rho_0(g) < \infty$, причем

$$\rho_0(g) \leqslant C_1 \sum_{n=1}^{\infty} n^{-1/2} E_{n-1}(g) \leqslant C_1 C_{15} \sum_{n=1}^{\infty} n^{-1/2} \varepsilon_n.$$

Для доказательства обратной импликации нам понадобится предварительная оценка сверху ряда в правой части 2) (очевидно, в предположении его сходимости, что в дальнейшем будет гарантировано условием $\rho_0(g) < \infty$). Имеем $(C_0 = (1 - 2^{-1/2})^{-1} > 1)$

$$\begin{aligned}\sum_{n=1}^{\infty} n^{-1/2}\varepsilon_n &= \sum_{k=0}^{\infty} \sum_{n=2^k}^{2^{k+1}-1} n^{-1/2}\varepsilon_n \leqslant \sum_{k=0}^{\infty} \varepsilon_{2^k} 2^{-k/2}(2^{k+1} - 2^k) = \sum_{k=0}^{\infty} 2^{k/2}\varepsilon_{2^k} = \\ &= \varepsilon_1 + \sum_{k=1}^{\infty} 2^{k/2}\varepsilon_{2^k} = \varepsilon_1 + C_0 \sum_{k=1}^{\infty} (2^{k/2} - 2^{(k-1)/2})\varepsilon_{2^k} = \\ &= \varepsilon_1 + C_0 \Big(\sum_{k=1}^{\infty} 2^{k/2}\varepsilon_{2^k} - \sum_{k=0}^{\infty} 2^{k/2}\varepsilon_{2^{k+1}} \Big) = \\ &= \varepsilon_1 + C_0 \Big(\sum_{k=1}^{\infty} 2^{k/2}(\varepsilon_{2^k} - \varepsilon_{2^{k+1}}) - \varepsilon_2 \Big) = \\ &= (\varepsilon_1 - C_0\varepsilon_2) + C_0 \sum_{k=1}^{\infty} 2^{k/2}(\varepsilon_{2^k} - \varepsilon_{2^{k+1}}) \leqslant \varepsilon_1 + C_0 \sum_{k=1}^{\infty} 2^{k/2}(\varepsilon_{2^k} - \varepsilon_{2^{k+1}}).\end{aligned}$$

Применяя полученную оценку, тождество $\cos(\alpha+\beta) = \cos\alpha \cdot \cos\beta - \sin\alpha \cdot \sin\beta$

и неравенство $1 = \cos^2\alpha + \sin^2\alpha \leqslant |\cos\alpha| + |\sin\alpha|$, имеем

$$\sum_{n=1}^{\infty} n^{-1/2}\varepsilon_n \leqslant \varepsilon_1 + C_0 \sum_{k=1}^{\infty} 2^{k/2}(\varepsilon_{2^k} - \varepsilon_{2^{k+1}}) =$$

$$= \varepsilon_1 + 2^{-1}C_0 \sum_{k=1}^{\infty} 2^{-k/2}(\varepsilon_{2^k} - \varepsilon_{2^{k+1}}) \sum_{\nu=2^{k-1}}^{2^k-1} 1 \leqslant$$

$$\leqslant \varepsilon_1 + 2^{-1}C_0 \sum_{k=1}^{\infty} 2^{-k/2}(\varepsilon_{2^k} - \varepsilon_{2^{k+1}}) \sum_{\nu=2^{k-1}}^{2^k-1} \left(\left|\cos\left(\frac{\nu^2}{2^k}\right)\right| + \left|\sin\left(\frac{\nu^2}{2^k}\right)\right|\right) \leqslant$$

$$\leqslant \varepsilon_1 + 2^{-1}C_0\rho_0(g) < \infty.$$

Доказательство 3). Предварительно оценим ($m \in \mathbb{N}$)

$$\sum_{\nu=2^{m+1}}^{\infty} \nu^{-1/2}\varepsilon_\nu = \sum_{k=m+1}^{\infty} \sum_{\nu=2^k}^{2^{k+1}-1} \nu^{-1/2}\varepsilon_\nu \leqslant \sum_{k=m+1}^{\infty} 2^{k/2}\varepsilon_{2^k} =$$

$$= C_0 \sum_{k=m+1}^{\infty} (2^{k/2} - 2^{(k-1)/2})\varepsilon_{2^k} = C_0 \left(\sum_{k=m+1}^{\infty} 2^{k/2}\varepsilon_{2^k} - \sum_{k=m}^{\infty} 2^{k/2}\varepsilon_{2^{k+1}} \right) =$$

$$= C_0 \left(\sum_{k=m+1}^{\infty} 2^{k/2}(\varepsilon_{2^k} - \varepsilon_{2^{k+1}}) - 2^{m/2}\varepsilon_{2^{m+1}} \right) \leqslant$$

$$\leqslant C_0 \sum_{k=m+1}^{\infty} 2^{k/2}(\varepsilon_{2^k} - \varepsilon_{2^{k+1}}) = C_0 2^{-1} \sum_{k=m+1}^{\infty} 2^{-k/2}(\varepsilon_{2^k} - \varepsilon_{2^{k+1}}) \sum_{\nu=2^{k-1}}^{2^k-1} 1 \leqslant$$

$$\leqslant C_0 2^{-1}\rho_{2^m-1}(g).$$

Для произвольного $n \in \mathbb{N}$ найдется число $m \in \mathbb{N}$ такое, что $2^{m-1} \leqslant n < 2^m$; отсюда

$$\sum_{\nu=n+1}^{\infty} \nu^{-1/2}\varepsilon_\nu = \sum_{\nu=n+1}^{4n-1} \nu^{-1/2}\varepsilon_\nu + \sum_{\nu=4n}^{\infty} \nu^{-1/2}\varepsilon_\nu \leqslant$$

$$\leqslant \varepsilon_{n+1}(n+1)^{-1/2}(3n-1) + \sum_{\nu=4\cdot 2^{m-1}}^{\infty} \nu^{-1/2}\varepsilon_\nu \leqslant$$

$$\leqslant n^{-1/2}3n\varepsilon_{n+1} + (1-2^{-1/2})^{-1}2^{-1}\rho_{2^m-1}(g) \leqslant$$

$$\leqslant 3n^{1/2}\varepsilon_{n+1} + (1-2^{-1/2})^{-1}2^{-1}\rho_n(g) \leqslant$$

$$\leqslant ((1-2^{-1/2})^{-1}2^{-1} + 3)(\rho_n(g) + n^{1/2}\varepsilon_{n+1}).$$

Лемма 1 доказана.

Лемма 2. *Пусть $\ell \in \mathbb{N}$; для каждой функции $\omega \in \Omega_\ell(0,\pi]$ существует последовательность $\varepsilon = \{\varepsilon_n\}$ такая, что:*

1) $0 < \varepsilon_n \leqslant \omega(\pi/n)$, $n \in \mathbb{N}$, $\varepsilon_n \downarrow 0$ *при* $n \uparrow \infty$;
2) $n^{-\ell} \sum_{\nu=1}^{n} \nu^{\ell-1} \varepsilon_\nu \underset{(\ell)}{\asymp} \omega(\pi/n)$;
3) $\sum_{n=1}^{\infty} n^{-1/2}\omega(\pi/n) \underset{(\ell)}{\asymp} \sum_{n=1}^{\infty} n^{-1/2}\varepsilon_n$;
4) *если ряд в левой части* 3) *сходится, то*
$$\sum_{\nu=n+1}^{\infty} \nu^{-1/2}\omega(\pi/\nu) \underset{(\ell)}{\asymp} \sum_{\nu=n+1}^{\infty} \nu^{-1/2}\varepsilon_\nu + n^{1/2}\omega(\pi/n), \quad n \in \mathbb{N}.$$

Доказательство. Построение последовательности $\varepsilon = \{\varepsilon_n\}$, удовлетворяющей условиям 1) и 2), ведется по схеме Стечкина [14, лемма 2, с. 92–95] (см. также [1, с. 625–628]), развитой Гейтом в [22, лемма 1]. Эта последовательность определяется следующим образом. Поскольку $\omega \in \Omega_\ell(0,\pi]$, то $\delta^{-\ell}\omega(\delta) \downarrow (\delta \uparrow)$, откуда $n^\ell\omega(\pi/n) \uparrow (n \uparrow)$. Если $n^\ell\omega(\pi/n) = O(1)$ при $n \to \infty$, то положим $\varepsilon_n = n^{-1}\omega(\pi/n)$. Если же $n^\ell\omega(\pi/n) \uparrow \infty$ при $n \to \infty$, то положим $\varepsilon_1 = \omega(\pi)$, $\varepsilon_n = \omega(\pi/n_{k+1})$ при $n_k < n \leqslant n_{k+1}$, где $n_1 = 1$,
$$n_{k+1} = \min\{m \in \mathbb{N} : m^\ell\omega(\pi/m) > 2^\ell n_k^\ell \omega(\pi/n_k)\}, \quad k \in \mathbb{N}.$$
В силу того что $n^\ell\omega(\pi/n) \uparrow \infty$ $(n \uparrow \infty)$, такой номер n_{k+1} всегда существует, причем $n_{k+1} > 2n_k$. Соотношения 3) и 4) доказываются с помощью 1) и 2):
$$\sum_{n=1}^{\infty} n^{-1/2}\varepsilon_n \leqslant \sum_{n=1}^{\infty} n^{-1/2}\omega(\pi/n) \leqslant C_{18}(\ell) \sum_{n=1}^{\infty} n^{-1/2-\ell} \sum_{\nu=1}^{n} \nu^{\ell-1}\varepsilon_\nu =$$
$$= C_{18}(\ell) \sum_{\nu=1}^{\infty} \nu^{\ell-1}\varepsilon_\nu \sum_{n=\nu}^{\infty} n^{-(\ell+1/2)} \leqslant C_{19}(\ell) \sum_{\nu=1}^{\infty} \nu^{-1/2}\varepsilon_\nu;$$

$$\sum_{\nu=n+1}^{\infty} nu^{-1/2}\omega(\pi/\nu) \asymp \sum_{\nu=n+1}^{\infty} \nu^{-1/2-\ell} \sum_{\mu=1}^{\nu} \mu^{\ell-1}\varepsilon_\mu =$$
$$= \sum_{\nu=n+1}^{\infty} \nu^{-1/2-\ell} \biggl(\sum_{\mu=1}^{n} \mu^{\ell-1}\varepsilon_\mu + \sum_{\mu=n+1}^{\nu} \mu^{\ell-1}\varepsilon_\mu \biggr) =$$
$$= \sum_{\nu=n+1}^{\infty} \nu^{-1/2-\ell} \sum_{\mu=1}^{n} \mu^{\ell-1}\varepsilon_\mu + \sum_{\mu=n+1}^{\infty} \mu^{\ell-1}\varepsilon_\mu \sum_{\nu=\mu}^{\infty} \nu^{-1/2-\ell} \asymp$$
$$\asymp n^{1/2-\ell} \sum_{\mu=1}^{n} \mu^{\ell-1}\varepsilon_\mu + \sum_{\mu=n+1}^{\infty} \mu^{-1/2}\varepsilon_\mu \asymp n^{1/2}\omega(\pi/n) + \sum_{\mu=n+1}^{\infty} \mu^{-1/2}\varepsilon_\mu.$$

Лемма 2 доказана.

Лемма 3. *Пусть $\ell \in \mathbb{N}$ и $\omega \in \Omega_\ell(0,\pi]$; существует функция $f_0(\cdot;\omega) \in C(\mathbb{T})$, обладающая следующими свойствами:*

1) $\omega_\ell(f_0;\delta) \leqslant C_{20}(\ell)\omega(\delta), \quad \delta \in (0,\pi]$;
2) $\rho_0(f_0) < \infty \Longleftrightarrow \sum_{n=1}^{\infty} n^{-1/2}\omega(\pi/n) < \infty$;
3) *если ряд в правой части* 2) *сходится, то*

$$\sum_{\nu=n+1}^{\infty} \nu^{-1/2}\omega(\pi/\nu) \leqslant C_{21}(l)(\rho_n(f_0) + n^{1/2}\omega(\pi/n)), \quad n \in \mathbb{N}.$$

Доказательство. Положим $f_0(\cdot;\omega) = g(\cdot;\varepsilon)$, где $\varepsilon = \{\varepsilon_n\}$ – последовательность, соответствующая согласно лемме 2 заданной функции $\omega \in \Omega_\ell(0,\pi]$, а функция $g(\cdot;\varepsilon)$ определена в лемме 1. В силу 1) леммы 1, правого неравенства в (10) и 2) леммы 2 имеем

$$\omega_\ell(f_0;\pi/n) \leqslant C_{10}(\ell)n^{-\ell}\sum_{\nu=1}^{n}\nu^{\ell-1}E_{\nu-1}(f_0) \leqslant$$
$$\leqslant C_{10}(\ell)C_{15}n^{-\ell}\sum_{\nu=1}^{n}\nu^{\ell-1}\varepsilon_\nu \leqslant C_{22}(\ell)\omega(\pi/n);$$

итак, справедливо неравенство $\omega_\ell(f_0;\pi/n) \leqslant C_{22}(\ell)\omega(\pi/n)$, $n \in \mathbb{N}$, и, следовательно, $\omega_\ell(f_0;\delta) \leqslant 2^\ell C_{22}(\ell)\omega(\delta)$, $\delta \in (0,\pi]$, т. е. имеет место 1). Далее, 2) является следствием 2) леммы 1 и 3) леммы 2:

$$\sum_{n=1}^{\infty} n^{-1/2}\omega(\pi/n) < \infty \Longleftrightarrow \sum_{n=1}^{\infty} n^{-1/2}\varepsilon_n < \infty \Longleftrightarrow \rho_0(g) = \rho_0(f_0) < \infty,$$

а 3) вытекает из 4) леммы 2, 3) леммы 1 и 1) леммы 2:

$$\sum_{\nu=n+1}^{\infty} \nu^{-1/2}\omega(\pi/\nu) \leqslant C_{23}(\ell)\left(\sum_{\nu=n+1}^{\infty}\nu^{-1/2}\varepsilon_\nu + n^{1/2}\omega(\pi/n)\right) \leqslant$$
$$\leqslant C_{23}(\ell)(C_{16}(\rho_n(g) + n^{1/2}\varepsilon_{n+1}) + n^{1/2}\omega(\pi/n)) \leqslant$$
$$\leqslant C_{21}(\ell)(\rho_n(f_0) + n^{1/2}\omega(\pi/n)), \quad n \in \mathbb{N}.$$

Лемма 3 доказана.

Лемма 4. *Пусть $\ell \in \mathbb{N}$ и $\omega \in \Omega_\ell(0;\pi]$. Тогда существует последовательность функций $\{\psi_n(\cdot;\omega)\}_{n=1}^{\infty} \subset C(\mathbb{T})$ такая, что*

1) $\omega_\ell(\psi_n;\delta) \leqslant C_{24}(\ell)\omega(\delta), \quad \delta \in (0,\pi],\ n \in \mathbb{N}$;

2) $\rho_n(\psi_n) \geqslant n^{1/2}\omega(\pi/n), \quad n \in \mathbb{N}$.

Доказательство. Нам понадобится следующее утверждение, которое приведено в работе Стечкина [12, лемма 2 на с. 225], а также в [1, лемма 2 на с. 622]: пусть $\alpha = 1$ либо $\alpha = 2$, $0 \leqslant m \leqslant n \leqslant s$, $s \in \mathbb{Z}_+$; тогда

$$\left|\sum_{\nu=m}^{n} \exp(\alpha i(\nu x + s^{-1}\nu^2))\right| = O((s+1)^{1/2}) \tag{13}$$

равномерно относительно m, n и $x \in [0, 2\pi]$. Положим

$$\psi_n(x;\omega) = n^{-1/2}\omega(\pi/n)\tau_{2n}(x), \quad n \in \mathbb{N},$$

где для полиномов

$$\tau_{2n}(x) = \sum_{\nu=0}^{2n} \cos(\nu x + \nu^2/(2n))$$

в силу (13) имеют место оценки ($x \in [0, 2\pi]$)

$$\begin{aligned} |\tau_{2n}(x)| &= \left|\mathrm{Re}\sum_{\nu=0}^{2n} \exp(i(\nu x + (2n)^{-1}\nu^2))\right| \leqslant \\ &\leqslant \left|\sum_{\nu=0}^{2n} \exp(i(\nu x + (2n)^{-1}\nu^2))\right| \leqslant C_{25} \cdot (2n)^{1/2}, \end{aligned}$$

C_{25} – абсолютная постоянная, откуда

$$\|\tau_{2n}\| \leqslant C_{25} \cdot (2n)^{1/2}, \quad n \in \mathbb{N}.$$

Имеем

$$\begin{aligned} \|\psi_n\| = n^{-1/2}\omega(\pi/n)\,\|\tau_{2n}\| &\leqslant n^{-1/2}\omega(\pi/n)C_{25} \cdot (2n)^{1/2} = \\ = 2^{1/2}C_{25}\omega(\pi/n) &\leqslant 2^{1/2}C_{25}\omega(\pi), \quad n \in \mathbb{N}, \end{aligned}$$

откуда

$$\sup_{n\in\mathbb{N}} \|\psi_n\| \leqslant 2^{1/2}C_{25}\omega(\pi) < \infty,$$

т. е. $\{\psi_n\} \subset C(\mathbb{T})$; кроме того, очевидно, что $\|\psi_n\| \to 0$ при $n \to \infty$.

Докажем 1). Для любого $\delta \in (0,\pi]$ и фиксированного $n \in \mathbb{N}$ возможны два случая: $\delta < \pi/n$ либо $\delta \geqslant \pi/n$. При $\delta < \pi/n$ в силу $\delta^{-\ell}\omega(\delta) \downarrow (\delta \uparrow)$ имеем

$$\begin{aligned}\omega_\ell(\psi_n;\delta) &\leqslant \delta^\ell \left\|\psi_n^{(\ell)}\right\| = \delta^\ell n^{-1/2}\omega(\pi/n)\left\|\tau_{2n}^{(\ell)}\right\| \leqslant \\ &\leqslant \delta^\ell n^{-1/2}\omega(\pi/n)(2n)^\ell \|\tau_{2n}\| \leqslant 2^\ell C_{25} 2^{1/2}\delta^\ell n^\ell \omega(\pi/n) \leqslant \\ &\leqslant 2^{\ell+1/2}C_{25}\pi^\ell\omega(\delta),\end{aligned}$$

а при $\delta \geqslant \pi/n$ в силу $\omega(\delta) \uparrow (\delta \uparrow)$ получим

$$\begin{aligned}\omega_\ell(\psi_n;\delta) &\leqslant 2^\ell \|\psi_n\| = 2^\ell n^{-1/2}\omega(\pi/n)\|\tau_{2n}\| \leqslant \\ &\leqslant 2^{\ell+1/2}C_{25}\omega(\pi/n) \leqslant 2^{\ell+1/2}C_{25}\omega(\delta).\end{aligned}$$

Следовательно, при каждом $n \in \mathbb{N}$,

$$\omega_\ell(\psi_n;\delta) \leqslant C_{24}(\ell)\omega(\delta), \quad \delta \in (0,\pi].$$

Теперь докажем 2). Так как

$$\begin{aligned}\psi_n(x;\omega) &= n^{-1/2}\omega(\pi/n)\tau_{2n}(x) = \\ &= n^{-1/2}\omega(\pi/n)\sum_{\nu=0}^{2n}\left(\cos\nu x\cdot\cos\left(\frac{\nu^2}{2n}\right) - \sin\nu x\cdot\sin\left(\frac{\nu^2}{2n}\right)\right),\end{aligned}$$

то

$$\rho_n(\psi_n) = n^{-1/2}\omega(\pi/n)\sum_{\nu=n+1}^{2n}\left(\left|\cos\left(\frac{\nu^2}{2n}\right)\right| + \left|\sin\left(\frac{\nu^2}{2n}\right)\right|\right),$$

откуда, в силу оценки $1 \leqslant |\cos y| + |\sin y|$, $y \in \mathbb{R}$, имеем

$$\rho_n(\psi_n) \geqslant n^{-1/2}\omega(\pi/n)\sum_{\nu=n+1}^{2n} 1 = n^{1/2}\omega(\pi/n), \quad n \in \mathbb{N}.$$

Лемма 4 доказана.

Лемма 5. *Пусть* $\ell \in \mathbb{N}$, $g \in C(\mathbb{T})$, $g_\pm(x) = (1/2)(g(x) \pm g(-x))$ *и*

$$g(x) \sim (1/2)a_0(g) + \sum_{n=1}^{\infty}(a_n(g)\cos nx + b_n(g)\sin nx),$$

где $a_n(g) \geqslant 0$, $b_n(g) \geqslant 0$. *Тогда справедливы оценки* $(n \in \mathbb{N})$

1) $\sum_{\nu=n}^{\infty} a_\nu(g) \leqslant C_{26}(\ell)\omega_\ell(g_+;\pi/n) \leqslant C_{26}(\ell)\omega_\ell(g;\pi/n)$;

2) $n^{-k}\sum_{\nu=1}^{n}\nu^k a_\nu(g)\leqslant C_{27}(\ell)\omega_\ell(g_+;\pi/n)\leqslant C_{27}(\ell)\omega_\ell(g;\pi/n)$, *где* $k=\ell+(1-(-1)^\ell)/2=\{\ell,\ \ell$ *– четное;* $\ell+1,\ \ell$ *– нечетное*$\}$;

3) $n^{-k}\sum_{\nu=1}^{n}\nu^k b_\nu(g)\leqslant C_{28}(\ell)\omega_\ell(g_-;\pi/n)\leqslant C_{28}(\ell)\omega_\ell(g;\pi/n)$, *где* $k=\ell+(1+(-1)^\ell)/2=\{\ell+1,\ \ell$ *– четное;* $\ell,\ \ell$ *– нечетное*$\}$.

Лемма 5 в несколько иной формулировке приведена в [23] (см. неравенства (22)–(24) на с.72). Ранее неравенство 1) и неравенство 2) при четном ℓ для симметрических модулей гладкости другим способом доказаны в [24, с. 84–85], (см. также [25]).

Лемма 6. *Пусть* $\ell\in\mathbb{N}$*; для всякой последовательности* $\lambda=\{\lambda_n\}\in M_0$ *существует функция* $g(\cdot;\lambda)\in C(\mathbb{T})$ *такая,что:*

1) $\rho_0(g)<\infty$, $\rho_{n-1}(g)=2\lambda_n$, $n\in\mathbb{N}$;

2) $n^{-\ell}\sum_{\nu=1}^{n}\nu^{\ell-1}\lambda_\nu\leqslant C_{29}(\ell)\omega_\ell(g;\pi/n)$.

Доказательство. Положим $\Delta\lambda_n=\lambda_n-\lambda_{n+1}$, $n\in\mathbb{N}$ (см. например [23, с. 73; 16, с. 52]),

$$g(x;\lambda)=\sum_{n=1}^{\infty}\Delta\lambda_n(\cos nx+\sin nx),\quad x\in\mathbb{R}.$$

Очевидно, $\rho_0(g)=2\sum_{n=1}^{\infty}\Delta\lambda_n=2\lambda_1<\infty$; следовательно, $g(\cdot;\lambda)\in C(\mathbb{T})$ и $\rho_{n-1}(g)=2\sum_{\nu=n}^{\infty}\Delta\lambda_\nu=2\lambda_n$, $n\in\mathbb{N}$, т. е. имеет место 1).

Докажем 2). Учитывая, что

$$\Delta\rho_{n-1}(g)=\rho_{n-1}(g)-\rho_n(g)=|a_n(g)|+|b_n(g)|=2\Delta\lambda_n,\quad n\in\mathbb{N},$$

имеем ($\rho_0(g)<\infty\Longrightarrow\rho_n(g)\downarrow 0\ (n\uparrow\infty)$)

$$\begin{aligned}\sum_{\nu=1}^{n}\nu^{\ell-1}\rho_{\nu-1}(g)&=\sum_{\nu=1}^{n}\nu^{\ell-1}\sum_{\mu=\nu}^{\infty}\Delta\rho_{\mu-1}(g)=\\&=\sum_{\nu=1}^{n}\nu^{\ell-1}\sum_{\mu=\nu}^{n}\Delta\rho_{\mu-1}(g)+\sum_{\nu=1}^{n}\nu^{\ell-1}\sum_{\mu=n+1}^{\infty}\Delta\rho_{\mu-1}(g)=\\&=\sum_{\mu=1}^{n}\Delta\rho_{\mu-1}(g)\sum_{\nu=1}^{\mu}\nu^{\ell-1}+\rho_n(g)\sum_{\nu=1}^{n}\nu^{\ell-1}\leqslant\\&\leqslant\sum_{\mu=1}^{n}\mu^{\ell}\Delta\rho_{\mu-1}(g)+n^{\ell}\rho_n(g)=\\&=n^{\ell}\sum_{\nu=n+1}^{\infty}\Delta\rho_{\nu-1}(g)+\sum_{\nu=1}^{n}\nu^{\ell}\Delta\rho_{\nu-1}(g),\end{aligned}$$

откуда, в силу равенства в 1) этой леммы и неравенств 1), 2) при четном ℓ, 3) при нечетном ℓ леммы 5, получим ($\ell \in \mathbb{N}$)

$$2n^{-\ell}\sum_{\nu=1}^{n}\nu^{\ell-1}\lambda_\nu = n^{-\ell}\sum_{\nu=1}^{n}\nu^{\ell-1}\rho_{\nu-1}(g) \leqslant 2\sum_{\nu=n+1}^{\infty}\Delta\lambda_\nu + 2n^{-\ell}\sum_{\nu=1}^{n}\nu^{\ell}\Delta\lambda_\nu \leqslant$$
$$\leqslant 2C_{26}(\ell)\omega_\ell(g_+;\pi/n) + 2C_{30}(\ell)\omega_\ell(\varphi;\pi/n)2(C_{26}(\ell)+C_{30}(\ell))\omega_\ell(g;\pi/n),$$

где $\varphi = g_+$ и $C_{30}(\ell) = C_{27}(\ell)$ при четном ℓ, $\varphi = g_-$ и $C_{30}(\ell) = C_{28}(\ell)$ при нечетном ℓ. Лемма 6 доказана.

4. Доказательства теорем 5, 6 и следствий 1, 2, 3

Доказательство пункта 1 теоремы 5. Оценка сверху в (6). Пусть $\ell \in \mathbb{N}$ и $\omega \in \Omega_\ell(0,\pi]$; для любой функции $f \in H^\ell[\omega]$ имеем

$$\sum_{n=1}^{\infty} n^{-1/2}\omega_\ell(f;\pi/n) \leqslant \sum_{n=1}^{\infty} n^{-1/2}\omega(\pi/n) < \infty,$$

откуда в силу теоремы 3 $\rho_0(f) < \infty$ и

$$\rho_n(f) \leqslant C_4(\ell)\sum_{\nu=n+1}^{\infty}\nu^{-1/2}\omega_\ell(f;\pi/\nu) \leqslant C_4(\ell)\sum_{\nu=n+1}^{\infty}\nu^{-1/2}\omega(\pi/\nu), \quad n \in \mathbb{N}.$$

Оценка снизу в (6). Рассмотрим функцию $C_{20}(\ell)^{-1}f_0(\cdot;\omega) \in H^\ell[\omega]$, где f_0 определена в лемме 3 ($C_{20}(\ell)$ – постоянная в пункте 1 этой леммы) и последовательность функций $\{C_{24}\ell)^{-1}\psi_n(\cdot;\omega)\}_{n=1}^{\infty} \subset H^\ell[\omega]$, где ψ_n определены в лемме 4 ($C_{24}(\ell)$ – постоянная в пункте 1 этой леммы). В силу 3) леммы 3 и 2) леммы 4 имеем (при условии $\sum_{n=1}^{\infty} n^{-1/2}\omega(\pi/n) < \infty \Longleftrightarrow \rho_0(f_0) < \infty$, см. пункт 2 леммы 3)

$$\sum_{\nu=n+1}^{\infty}\nu^{-1/2}\omega(\pi/\nu) \leqslant C_{21}(\ell)(\rho_n(f_0) + n^{1/2}\omega(\pi/n)) \leqslant$$
$$\leqslant C_{21}(\ell)(\rho_n(f_0) + \rho_n(\psi_n)) \leqslant$$
$$\leqslant C_{21}(\ell)(C_{20}(\ell) + C_{24}(\ell))\sup\{\rho_n(f) : f \in H^\ell[\omega]\}.$$

Доказательство пункта 2 теоремы 5. Оценка сверху в (7). Пусть $\varepsilon \in M_0$; для любой функции $f \in E[\varepsilon]$ имеем

$$\sum_{n=1}^{\infty} n^{-1/2}E_{n-1}(f) \leqslant \sum_{n=1}^{\infty} n^{-1/2}\varepsilon_n < \infty,$$

откуда в силу теоремы 3 $\rho_0(f) < \infty$ и

$$\rho_n(f) \leqslant C_3(n^{1/2}E_{n-1}(f) + \sum_{\nu=n+1}^{\infty} \nu^{-1/2}E_{\nu-1}(f)) \leqslant$$
$$\leqslant C_3(n^{1/2}\varepsilon_n + \sum_{\nu=n+1}^{\infty} \nu^{-1/2}\varepsilon_\nu) \leqslant C_3(2^{\beta+1/2}+1)\sum_{\nu=n+1}^{\infty} \nu^{-1/2}\varepsilon_\nu,$$

так как в силу условия $n^\beta\varepsilon_n \uparrow (n\uparrow)$ для некоторого $\beta \in (0,\infty)$ имеем

$$\sum_{\nu=n+1}^{\infty} \nu^{-1/2}\varepsilon_\nu \geqslant \sum_{\nu=n+1}^{2n} \nu^{-1/2}\varepsilon_\nu \geqslant \varepsilon_{2n}(2n)^{-1/2}n = 2^{-1/2}n^{1/2}\varepsilon_{2n} =$$
$$= 2^{-1/2-\beta}n^{1/2-\beta}(2n)^\beta\varepsilon_{2n} \geqslant 2^{-1/2-\beta}n^{1/2-\beta}n^\beta\varepsilon_n =$$
$$= 2^{-(\beta+1/2)}n^{1/2}\varepsilon_n.$$

Оценка снизу в (7). Рассмотрим функцию $C_{15}^{-1}g(\cdot;\varepsilon) \in E[\varepsilon]$, где g определена в лемме 1 (C_{15} – постоянная в пункте 1 этой леммы). В силу 3) леммы 1 имеем (при условии $\sum_{n=1}^{\infty} n^{-1/2}\varepsilon_n < \infty \Longleftrightarrow \rho_0(g) < \infty$, см. пункт 2 леммы 1)

$$\sum_{\nu=n+1}^{\infty} \nu^{-1/2}\varepsilon_\nu \leqslant C_{16}(\rho_n(g) + n^{1/2}\varepsilon_{n+1}), \quad n \in \mathbb{N}.$$

Привлекая условие $n^\beta\varepsilon_n \uparrow (n\uparrow)$, оценим сверху $n^{1/2}\varepsilon_{n+1}$. Имеем (см. доказательство пункта 3 леммы 1)

$$n^{1/2}\varepsilon_{n+1} \leqslant n^{1/2}\varepsilon_n = n^{1/2-\beta}n^\beta\varepsilon_n \leqslant n^{1/2-\beta}(5n)^\beta\varepsilon_{5n} = 5^\beta n^{1/2}\varepsilon_{5n} \leqslant$$
$$\leqslant 5^{\beta+1/2}\sum_{\nu=4n+1}^{5n} \nu^{-1/2}\varepsilon_\nu \leqslant 5^{\beta+1/2}\sum_{\nu=4n+1}^{\infty} \nu^{-1/2}\varepsilon_\nu \leqslant$$
$$\leqslant 5^{\beta+1/2}(1-2^{-1/2})^{-1}2^{-1}\rho_n(g).$$

Учитывая последнюю оценку, получим

$$\sum_{\nu=n+1}^{\infty} \nu^{-1/2}\varepsilon_\nu \leqslant C_{16}(\rho_n(g) + 5^{\beta+1/2}C_0 2^{-1}\rho_n(g)) =$$
$$= C_{16}(1+5^{\beta+1/2}C_0 2^{-1})\rho_n(g) \leqslant C_{31}(\beta)C_{15}\sup\{\rho_n(f) : f \in E[\varepsilon]\}.$$

Теорема 5 доказана.

Замечание 1. *Если функция* $\omega(\delta) \in \Omega_\ell(0,\pi]$ *удовлетворяет* (S_ℓ)*-условию Стечкина (см., например,* [26, § 2]*): существует число* $\gamma \in (0,\ell)$ *такое, что* $\delta^{-(\ell-\gamma)}\omega(\delta) \downarrow (\delta\uparrow)$*, то существует индивидуальная функция* $\varphi(\cdot;\omega) \in H^\ell[\omega]$*, доставляющая оценку снизу в формуле* (6) *пункта* 1 *теоремы* 5.

Доказательство. Пусть $\varphi(x;\omega) = (2^\ell C_{32}(\ell,\gamma))^{-1} g(x;\varepsilon)$, где последовательность $\varepsilon = \{\omega(\pi/n)\}_{n=1}^\infty \in M_0$, $g(\cdot;\varepsilon)$ – функция, рассмотренная в лемме 1, $C_{32}(\ell,\gamma)$ – постоянная, которая будет определена ниже. Учитывая, что $\delta^{-\beta}\omega(\delta)\downarrow(\delta\uparrow) \Longrightarrow n^\beta\omega(\pi/n)\uparrow(n\uparrow)$, где $\beta=\ell-\gamma$, $\beta\in(0,\ell)$, в силу правого неравенства в (10) и 1) леммы 1 имеем

$$\begin{aligned}\omega_\ell(g;\pi/n) &\leqslant C_{10}(\ell)n^{-\ell}\sum_{\nu=1}^n \nu^{\ell-1}E_{\nu-1}(g) \leqslant C_{10}(\ell)C_{15}n^{-\ell}\sum_{\nu=1}^n \nu^{\ell-1}\omega(\pi/\nu) = \\ &= C_{10}(\ell)C_{15}n^{-\ell}\sum_{\nu=1}^n \nu^{\ell-\beta-1}\nu^\beta\omega(\pi/\nu) \leqslant \\ &\leqslant C_{10}(\ell)C_{15}n^{-\ell+\beta}\omega(\pi/n)\sum_{\nu=1}^n \nu^{\ell-\beta-1} \leqslant \\ &\leqslant C_{10}(\ell)C_{15}n^{-\ell+\beta}\omega(\pi/n)C_{33}(\ell-\beta)n^{\ell-\beta} = C_{32}(\ell,\gamma)\omega(\pi/n),\end{aligned}$$

откуда

$$\omega_\ell(\varphi;\delta) = (2^\ell C_{32}(\ell,\gamma))^{-1}\omega_\ell(g;\delta) \leqslant \omega(\delta), \quad \delta\in(0,\pi].$$

С другой стороны, в силу 3) леммы 1 при $\varepsilon_n = \omega(\pi/n)$, $n\in\mathbb{N}$, имеем

$$\sum_{\nu=n+1}^\infty \nu^{-1/2}\omega(\pi/\nu) \leqslant C_{16}(\rho_n(g) + n^{1/2}\omega(\pi/n)),$$

откуда (см. доказательство оценки снизу в пункте 2 теоремы 5)

$$\begin{aligned}\sum_{\nu=n+1}^\infty \nu^{-1/2}\omega(\pi/\nu) &\leqslant C_{16}(\rho_n(g) + 5^{\beta+1/2}C_0 2^{-1}\rho_n(g)) \leqslant \\ &\leqslant C_{31}(\beta)\rho_n(g) = C_{31}(\beta)2^\ell C_{32}(\ell,\gamma)\rho_n(\varphi) \leqslant \\ &\leqslant C_{31}(\beta)2^\ell C_{32}(\ell,\gamma)\sup\{\rho_n(f) : f\in H^\ell[\omega]\}.\end{aligned}$$

Доказательство теоремы 6. Оценка сверху в (9): если $\ell\in\mathbb{N}$ и $\lambda\in M_0$, то для каждой функции $f\in A[\lambda]$ ($\Longrightarrow \rho_0(f)\leqslant\lambda_1<\infty$) в силу неравенства (4) теоремы 4 имеем

$$\omega_\ell(f;\pi/n) \leqslant C_5(\ell)n^{-\ell}\sum_{\nu=1}^n \nu^{\ell-1}\rho_{\nu-1}(f) \leqslant C_5(\ell)n^{-\ell}\sum_{\nu=1}^n \nu^{\ell-1}\lambda_\nu, \quad n\in\mathbb{N}.$$

Оценку снизу в (9) доставляет функция $2^{-1}g(\cdot,\lambda) \in A[\lambda]$, рассмотренная в лемме 6. В силу 2) этой леммы получим

$$n^{-\ell}\sum_{\nu=1}^{n}\nu^{\ell-1}\lambda_\nu \leqslant C_{29}(\ell)\omega_\ell(g;\pi/n) \leqslant 2C_{29}(\ell)\sup\{\omega_\ell(f;\pi/n) : f \in A[\lambda]\}.$$

Теорема 6 доказана.

Доказательство следствия 1. Если $\omega(\delta) = \delta^\alpha$, $\alpha \in (1/2,\ell]$, и $\varepsilon_n = n^{-\alpha}$, $\alpha > 1/2$, то соответствующие ряды в пунктах 1 и 2 теоремы 5 сходятся и утверждения 1 и 2 следствия 1 непосредственно следуют из теоремы 5 в силу известных оценок ($\alpha > 1/\ 2$, $n \in \mathbb{N}$)

$$(\alpha-1/2)^{-1}(n+1)^{-(\alpha-1/2)} \leqslant \sum_{\nu=n+1}^{\infty}\nu^{-(\alpha+1/2)} \leqslant (\alpha-1/2)^{-1}n^{-(\alpha-1/2)}.$$

Доказательство следствия 2. Достаточность. Если выполняется условие (8), то, очевидно, ряд в пункте 1 теоремы 5 сходится; следовательно, для каждой функции $f \in C(\mathbb{T})$ с $\omega_\ell(f;\delta) = O(\omega(\delta))$, $\delta \in (0,\pi]$, также сходится ряд (3). Отсюда в силу теоремы 3 $\rho_0(f) < \infty$ и

$$\rho_n(f) \leqslant C_4(\ell)\sum_{\nu=n+1}^{\infty}\nu^{-1/2}\omega_\ell(f;\pi/\nu) =$$
$$= O\left(\sum_{\nu=n+1}^{\infty}\nu^{-1/2}\omega(\pi/\nu)\right) = O(\lambda_n), \quad n \in \mathbb{N}.$$

Необходимость. Рассмотрим функцию $f_0(\cdot;\omega)$ из леммы 3 и последовательность функций $\{\psi_n(\cdot;\omega)\}_{n=1}^\infty$ из леммы 4. В силу 1) леммы 3 $f_0 \in C(\mathbb{T})$ и $\omega_\ell(f_0;\delta) = O(\omega(\delta))$, $\delta \in (0,\pi]$, а в силу 1) леммы 4 $\psi_n(\cdot;\omega) \in C(\mathbb{T})$ и $\omega(\psi_n;\delta) = O(\omega(\delta))$, $\delta \in (0,\pi]$, $n \in \mathbb{N}$, причем согласно условиям следствия 2 имеем $\rho_n(f_0) = O(\lambda_n)$ ($\Longrightarrow \rho_0(f_0) < \infty$) и $\rho_n(\psi_n) = O(\lambda_n)$, $n \in \mathbb{N}$. Отсюда в силу 2) и 3) леммы 3 и 2) леммы 4 получим

$$\sum_{\nu=n+1}^{\infty}\nu^{-1/2}\omega(\pi/\nu) \leqslant C_{21}(\ell)(\rho_n(f_0) + n^{1/2}\omega(\pi/n)) \leqslant$$
$$\leqslant C_{21}(\ell)(O(\lambda_n) + \rho_n(\psi_n)) = 2C_{21}(\ell)O(\lambda_n) = O(\lambda_n), \quad n \in \mathbb{N}.$$

Следствие 2 доказано.

Доказательство следствия 3. Утверждение 1 следствия 3 непосредственно следует из соотношения (9) теоремы 6 в силу известных оценок

$$C_{34}(\ell-\alpha)\cdot n^{-\alpha} \leqslant n^{-\ell}\sum_{\nu=1}^{n}\nu^{\ell-\alpha-1} \leqslant C_{35}(\ell-\alpha)\cdot n^{-\alpha}, \quad \alpha<\ell;$$

$$n^{-\ell}\ln(n+1) \leqslant n^{-\ell}\sum_{\nu=1}^{n}\nu^{\ell-\alpha-1} \leqslant n^{-\ell}\ln(en), \quad \alpha=\ell,$$

с учетом следующего замечания: для $\delta\in(0,\pi]$ найдется $n\in\mathbb{N}$ такое, что $\pi/(n+1)<\delta\leqslant\pi/n$ и

$$2^{-\ell}\omega_\ell(f;\pi/n) \leqslant \omega_\ell(f;\delta) \leqslant \omega_\ell(f;\pi/n), \qquad 2^{-\alpha}(\pi/n)^\alpha \leqslant \delta^\alpha \leqslant (\pi/n)^\alpha,$$

$$\delta^\ell\ln(e\pi/\delta) \leqslant (\pi/n)^\ell\ln(e(n+1)) = (\pi/n)^\ell(1+\ln(n+1)) \leqslant 3(\pi/n)^\ell\ln(n+1),$$

$$n^{-\ell}\ln(en) \leqslant (2/\pi)^\ell(\pi/(n+1))^\ell\ln(e\pi/\delta) \leqslant (2/\pi)^\ell\delta^\ell\ln(e\pi/\delta).$$

Докажем утверждение 2. Если $\lambda_n=(\pi/n)^\ell$, $n\in\mathbb{N}$, то для каждой функции $f\in A[\lambda]$ в силу неравенства (4) имеем

$$\omega_{\ell+1}(f;\pi/n) \leqslant C_5(\ell+1)\cdot n^{-(\ell+1)}\sum_{\nu=1}^{n}\nu^\ell\rho_{\nu-1}(f) \leqslant$$

$$\leqslant C_5(\ell+1)\cdot n^{-(\ell+1)}\pi^\ell\sum_{\nu=1}^{n}1 = C_5(\ell+1)\cdot\pi^\ell n^{-\ell}, \quad n\in\mathbb{N},$$

откуда $\omega_{\ell+1}(f;\delta)\leqslant 2^\ell C_5(\ell+1)\cdot\delta^\ell$, $\delta\in(0,\pi]$.

Оценку снизу доставляет функция $2^{-1}g(\cdot;\lambda)\in A[\lambda]$, рассмотренная в лемме 6. В силу 2) этой леммы имеем ($n\in\mathbb{N}$)

$$C_{29}(\ell+1)\cdot\omega_{\ell+1}(g;\pi/n) \geqslant n^{-(\ell+1)}\sum_{\nu=1}^{n}\nu^\ell\lambda_\nu = n^{-(\ell+1)}\pi^\ell\sum_{\nu=1}^{n}1 = \pi^\ell n^{-\ell},$$

откуда

$$\delta^\ell \leqslant 2^{\ell+1}C_{29}(\ell+1)\cdot\omega_{\ell+1}(g;\delta) \leqslant 2^{\ell+2}C_{29}(\ell+1)\cdot\sup\{\omega_{\ell+1}(f;\delta) : f\in A[\lambda]\}.$$

Следствие 3 доказано.

Литература

1. Бари Н. К. Тригонометрические ряды. М.: Физматгиз, 1961.
2. Lorentz G. G. Fourier-Koeffizienten und Funktionenklassen // Mathematische Zeitschr. 1948. Bd. 51, № 2. S. 135–149.
3. Fredholm I. Sur une classe d'équations fonctionnelles // Acta Math. 1903. Vol. 27. P. 365–390.
4. Bernstein S. N. Sur la convergence absolue des séries trigonométriques // Comptes Rendus Acad. Sci. 1914. Vol. 158. P. 1661–1663.
5. Бернштейн С. Н. Об абсолютной сходимости тригонометрических рядов // Сообщ. Харьков. матем. о-ва. Сер. 2. 1914. Т. 14. С. 139–144.
6. Szasz O. Über den Konvergenzexponenten der Fourierschen Reihen gewisser Funktionenklassen // Münchener Sitzungsberichte. 1922. S. 135–150.
7. Зигмунд А. Тригонометрические ряды. М.: Мир, 1965. Т. 1.
8. Гохберг И. Ц., Крейн М. Г. Введение в теорию линейных несамосопряженных операторов в гильбертовом пространстве. М.: Наука, 1965.
9. Ульянов П. Л. Об абсолютной сходимости тригонометрических рядов Фурье // Докл. АН СССР. 1992. Т. 322, № 2. С. 253–258.
10. Тиман М. Ф. Частные наилучшие приближения функций, абсолютная сходимость рядов Фурье и ядерность интегральных операторов Гильберта–Шмидта // Матем. сб. 1968. Т. 75, № 3. С. 361–374.
11. Bernstein S. N. Sur la convergence absolue des séries trigonométriques // Comptes Rendus Acad. Sci. 1934. Vol. 199. P. 397–400.
12. Стечкин С. Б. Об абсолютной сходимости рядов Фурье (второе сообщение) // Изв. АН СССР. Сер. матем. 1955. Т. 19, № 4. С. 221–246.
13. Бернштейн С. Н. Собрание сочинений. М.: Изд-во АН СССР, 1954. Т. 2.
14. Стечкин С. Б. Об абсолютной сходимости рядов Фурье // Изв. АН СССР. Сер. матем. 1953. Т. 17, № 2. С. 87–98.
15. Зигмунд А. Тригонометрические ряды. М.; Л.: ГОНТИ, 1939.
16. Стечкин С. Б. Приближение периодических функций суммами Фейера // Тр. Матем. ин-та АН СССР. 1961. Т. 62. С. 48–60.
17. Стечкин С. Б. Об абсолютной сходимости ортогональных рядов, I // Матем. сб. 1951. Т. 29, № 1. С. 225–232.
18. Стечкин С. Б. О порядке наилучших приближений непрерывных функций // Докл. АН СССР. 1949. Т. 65, № 2. С. 135–137.
19. Стечкин С. Б. О порядке наилучших приближений непрерывных функций // Изв. АН СССР. Сер. матем. 1951. Т. 15, № 3. С. 219–242.

20. Стечкин С. Б. Об абсолютной сходимости ортогональных рядов // Успехи матем. наук. 1947. Т. 2, № 3. С. 177–178.

21. Ильясов Н. А. О порядке абсолютной сходимости рядов Фурье периодических функций из классов $H_p^\ell[\omega]$ // Вестн. Бакин. ун-та. Сер. физ.-мат. наук. 1998. № 1. С. 143–153.

22. Гейт В. Э. Об условиях вложения классов $H_{k,R}^\omega$ и $\widetilde{H}_{k,R}^\omega$ // Матем. заметки. 1973. Т. 13, № 2. С. 169–178.

23. Гейт В. Э. Теоремы вложения для некоторых классов периодических непрерывных функций // Изв. вузов. Математика. 1972. № 4. С. 67–77.

24. Жук В. В. Об одном методе суммирования рядов Фурье. Ряды Фурье с положительными коэффициентами // Исследования по некоторым проблемам конструктивной теории функций: Сб. науч. тр. Ленингр. механ. ин-та. Вып. 50. Л., 1965. С. 73–92.

25. Boas R. P. Fourier series with pozitive coefficients // J. Math. Anal. Appl. 1967. Vol. 17, № 3. P. 463–483.

26. Бари Н. К., Стечкин С. Б. Наилучшие приближения и дифференциальные свойства двух сопряженных функций // Тр. Моск. матем. о-ва. 1956. Т. 5. С. 483–522.