УДК 517.5

С. Л. Сандакова

ПРИБЛИЖЕНИЕ ФУНКЦИЙ КЛАССА $W^r H_\omega$ СУММАМИ ФУРЬЕ ПО ТРИГОНОМЕТРИЧЕСКИМ ОРТОГОНАЛЬНЫМ ПОЛИНОМАМ*

1. Введение

В дальнейшем используются обозначения $\mathbb{C}, \mathbb{R}, \mathbb{Z}, \mathbb{Z}_+$ и $\mathbb{N}$ для множеств всех комплексных, действительных, целых, неотрицательных целых и натуральных чисел соответственно. При $1 \le r \le \infty$ через $L^r[a,b]$ обозначается пространство измеримых по Лебегу на отрезке $[a,b]$ комплекснозначных функций F с конечной нормой $\|F\|_{L^r[a,b]}$, где

$$\|F\|_{L^r[a,b]} := \left(\int_a^b |F(t)|^r dt\right)^{1/r} \quad (1 \le r < \infty), \qquad \|F\|_{L^\infty[a,b]} := \operatorname{ess}\sup_{a \le t \le b} |F(t)|.$$

Для 2π-периодической функции F полагаем $\|F\|_r := (2\pi)^{-1/r}\|F\|_{L^r[0,2\pi]}$, $L^r := L^r[0,2\pi]$. Пространство непрерывных 2π-периодических функций с нормой $\|F\|_C := \|F\|_{L^\infty}$ обозначается через $C_{2\pi}$. Для $F \in C_{2\pi}$ через $E_n(F)$ обозначаем наилучшее равномерное приближение функции F тригонометрическими полиномами порядка не выше n.

Величина $\omega(F;\delta)_{\infty,[a,b]} := \sup\{|F(t_2) - F(t_1)|;\, t_1, t_2 \in [a,b],\, |t_2 - t_1| \le \delta\}$ $(\delta \ge 0)$ называется *модулем непрерывности на отрезке* $[a,b]$ *функции* $F(t)$. Модуль непрерывности 2π-периодической функции F в пространстве L^r по определению есть $\omega(F;\delta)_r := \sup_{|\lambda| \le \delta} \|F(\lambda + \cdot) - F(\cdot)\|_r$.

Неубывающая непрерывная полуаддитивная на $[0,\infty)$ функция ω, для которой $\omega(0) = 0$, называется *модулем непрерывности*. Если вдобавок ω удовлетворяет условию $\omega((t_1 + t_2)/2) \ge (\omega(t_1) + \omega(t_2))/2$ при всех $t_1, t_2 \ge 0$, то она называется *вогнутым модулем непрерывности*.

Через H_ω обозначаем класс функций $F \in C_{2\pi}$, у которых модуль непрерывности в $C_{2\pi}$ не превосходит заданного модуля непрерывности ω. Полагаем также $H_\omega[a,b] := \{F : F \in L^\infty[a,b],\, \omega(F;\delta)_{\infty,[a,b]} \le \omega(\delta)$ для всех $\delta \ge 0\}$.

При $r \in \mathbb{Z}_+$ рассматриваем классы $W^r H_\omega := \{F : F \in C_{2\pi},\, F^{(r)} \in H_\omega\}$ и $W^r H_\omega[a,b] := \{F : F^{(r)} \in H_\omega[a,b]\}$.

*Исследования выполнены при финансовой поддержке гранта президента РФ по государственной поддержке ведущих научных школ РФ (проект НШ–1347.2003.1).

Неотрицательная и не эквивалентная нулю функция $\varphi \in L^1$ называется *весом.* Пусть $\{\Phi_n(\tau)\}_{n=0}^{\infty}$ – ортонормированная на отрезке $[0, 2\pi]$ с весом φ система тригонометрических полиномов, полученная из последовательности $1, \cos\tau, \sin\tau, \cos 2\tau, \sin 2\tau, \ldots$ методом ортогонализации Грама–Шмидта. Полиномы этой системы удовлетворяют условиям: Φ_0 – положительная константа; Φ_{2n-1} и Φ_{2n} $(n \in \mathbb{N})$ – полиномы порядка n с положительным старшим коэффициентом (старшим коэффициентом для Φ_{2n-1} является коэффициент при $\cos n\tau$, для Φ_{2n} – коэффициент при $\sin n\tau$; коэффициент при $\sin n\tau$ полинома Φ_{2n-1} равен нулю);

$$\frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi} \Phi_m(\tau)\Phi_n(\tau)\varphi(\tau)d\tau = \delta_{m,n} \qquad (m, n \in \mathbb{Z}_+).$$

Если $F\varphi \in L^1$, то имеют смысл суммы Фурье

$$s_{\varphi,n}(F;\theta) := \frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi} F(\tau)D_{\varphi,n}(\theta,\tau)\varphi(\tau)d\tau, \tag{1}$$

где

$$D_{\varphi,n}(\theta,\tau) := \sum_{k=0}^{n}\Phi_k(\theta)\Phi_k(\tau). \tag{2}$$

Рассмотрим функцию Лебега сумм $s_{\varphi,2n}(F;\theta)$

$$L_{\varphi,n}(\theta) := \sup_{F\in L^\infty,\, \|F\|_\infty \le 1} |s_{\varphi,2n}(F;\theta)| = \sup_{F\in C_{2\pi},\, \|F\|_\infty \le 1} |s_{\varphi,2n}(F;\theta)|. \tag{3}$$

Ввиду того что $s_{\varphi,n}(1;\theta) \equiv 1$, из (3) следует неравенство

$$L_{\varphi,n}(\theta) \ge 1 \quad (n \in \mathbb{Z}_+,\ \theta \in \mathbb{R}). \tag{4}$$

В силу (1)–(3) справедливо равенство

$$L_{\varphi,n}(\theta) = \frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi} |D_{\varphi,2n}(\theta,\tau)|\varphi(\tau)d\tau. \tag{5}$$

При $\varphi(\tau) \equiv 1$ сумма $s_{\varphi,2n}(F;\theta)$ совпадает с обычной суммой Фурье $s_n(F;\theta)$.

Аппроксимативные свойства сумм Фурье $s_{\varphi,2n}(F)$ на классе $\mathcal{M} \subset C_{2\pi}$ в точке θ принято характеризовать величиной

$$\mathcal{E}_{\varphi,n}(\mathcal{M}) := \sup\{|F(\theta) - s_{\varphi,2n}(F;\theta)| : F \in \mathcal{M}\}. \tag{6}$$

Уклонение функции $F \in C_{2\pi}$ от ее суммы Фурье $s_{\varphi,2n}(F;\theta)$ оценивается по неравенству Лебега

$$|F(\theta) - s_{\varphi,2n}(F;\theta)| \le (1 + L_{\varphi,n}(\theta))E_n(F) \qquad (\theta \in \mathbb{R},\ n \in \mathbb{Z}_+). \tag{7}$$

Известно (см. [1, с. 230]), что если периодическая функция F имеет непрерывную производную порядка $r \geq 0$ с модулем непрерывности $\omega(F^{(r)}; \delta)$, то при любом натуральном n существует тригонометрический полином T_n^* порядка не выше n такой, что

$$E_n(F) \leq \|F - T_n^*\|_\infty \leq B_r\, n^{-r}\, \omega(F^{(r)}; n^{-1})_\infty, \tag{8}$$

где $B_r > 0$ зависит лишь от r. Если $F \in W^r H_\omega$, то в силу (7) и (8) в каждой точке θ, в которой

$$\lim_{n\to\infty} L_{\varphi,n}(\theta) n^{-r} \omega(n^{-1}) = 0, \tag{9}$$

сумма $s_{\varphi,2n}(F;\theta)$ сходится к $F(\theta)$ равномерно на любом множестве $E \subset \mathbb{R}$ точек θ, на котором соотношение (9) выполняется равномерно. Скорость этой сходимости по порядку не превосходит $n^{-r}\omega(n^{-1})L_{\varphi,n}(\theta)$.

В случае когда $\varphi \equiv 1$, $\mathcal{M} = W^r H_\omega$, величина (6) совпадает с

$$\mathcal{E}_n(W^r H_\omega) := \sup\{|F(\theta) - s_n(F;\theta)| : F \in W^r H_\omega\}. \tag{10}$$

Величина (10) достаточно подробно изучена. Оценки ее порядка для $\omega(t) = t^\alpha$ $(0 < \alpha \leq 1)$, $r \in \mathbb{Z}_+$ получили еще А. Лебег [23] и С. Н. Бернштейн [6]. Первую асимптотически точную оценку величины (10) получил А. Н. Колмогоров [22] для случая $\omega(t) = t$, $r \in \mathbb{Z}_+$. Исследования в этом направлении продолжили С. М. Никольский [11–14], В. Т. Пинкевич [15], А. В. Ефимов [8–10], С. А. Теляковский [19], А. И. Степанец [18] и другие авторы.

В работе В. М. Бадкова [3] величина (6) изучалась для $\mathcal{M} = W^r H_\omega$ и веса

$$\varphi(\tau) := h(\tau) \prod_{\nu=1}^{m} |\sin \frac{\tau - \theta_\nu}{2}|^{\gamma_\nu} \qquad (\gamma_\nu > -1;\ -\pi < \theta_1 < \ldots < \theta_m \leq \pi), \tag{11}$$

удовлетворяющего условиям $h \in C_{2\pi}$, $h(\tau) > 0$, $\omega(h;\tau)_\infty \tau^{-1} \in L^1[0,\pi]$. (Заметим, что если функция h принадлежит L^∞ и отграничена от нуля, то вес (11) называется 2π-периодическим обобщенным весом Якоби.)

Основным результатом настоящей работы является следующая теорема, обобщающая соответствующий результат из [3].

Теорема 1.1. *Пусть вес φ имеет вид*

$$\varphi(\tau) := h(\tau) \prod_{\nu=1}^{m} w_\nu \left(\left| \sin \frac{\tau - \theta_\nu}{2} \right| \right) \qquad (-\pi < \theta_1 < \ldots < \theta_m \leq \pi), \tag{12}$$

где

$$w_\nu(u) := \prod_{\mu=1}^{l_\nu} [g_{\mu,\nu}(u)]^{\alpha(\mu,\nu)} \in L^1[0,1]; \tag{13}$$

$m, l_\nu \in \mathbb{N}$, $\alpha(\mu,\nu) \in \mathbb{R}$, $g_{\mu,\nu}(u)$ $(0 \le u < \infty)$ $(\mu = 1,\dots,l_\nu;\ \nu = 1,\dots,m)$ – *вогнутые модули непрерывности;*

$$\int_0^\theta w_\nu(\tau)d\tau = O(\theta w_\nu(\theta)) \qquad (\theta \to +0;\ \nu = 1,\dots,m); \tag{14}$$

$h(\tau)$ – неотрицательная, отграниченная от нуля и бесконечности измеримая 2π-периодическая функция, для которой выполнено хотя бы одно из условий: 1) $\omega(h;\delta)_2 = O(\sqrt{\delta})$ $(\delta \to +0)$ *и* 2) $\omega(h;\tau)_\infty \tau^{-1} \in L^1[0,\pi]$. *Тогда найдутся положительные постоянные $C_1(\varphi,r)$ и $C_2(\varphi,r)$ такие, что для всех $n \in \mathbb{N}$ и $\theta \in \mathbb{R}$ выполняются неравенства*

$$C_1(\varphi,r) \le \frac{\sup\{|F(\theta) - s_{\varphi,2n}(F;\theta)| : F \in W^r H_\omega\}}{(1 + L_{\varphi,n}(\theta))\omega(n^{-1})n^{-r}} \le C_2(\varphi,r). \tag{15}$$

В [16] анонсирована двусторонняя поточечная оценка функции $L_{\varphi,n}(\theta)$, фигурирующей в (15).

2. Связь ядер $D_{\varphi,n}(\theta,\tau)$ с многочленами, ортогональными на окружности

Пусть $\{\varphi_n(z)\}_{n=0}^\infty$ – система алгебраических многочленов, ортонормированная на окружности $|z| = 1$ с весом $\varphi \in L^1$ (см. [7, 17]). Это означает, что при каждом $n \in \mathbb{Z}_+$ степень $\varphi_n(z)$ равна n, коэффициент при z^n положителен, и выполняются условия ортогональности

$$\frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi} \varphi_n(e^{i\tau})\overline{\varphi_m(e^{i\tau})}\varphi(\tau)d\tau = \delta_{m,n} \qquad (m,n \in \mathbb{Z}_+).$$

При доказательстве теоремы 1.1 будем пользоваться известным равенством (см. [3, 24])

$$D_{\varphi,2n}(\theta,\tau) = e^{-in(\theta-\tau)}K_{\varphi,2n}(e^{i\theta}, e^{i\tau}), \tag{16}$$

где

$$K_{\varphi,n}(z,\xi) := \sum_{k=0}^n \varphi_k(z)\overline{\varphi_k(\xi)}. \tag{17}$$

Лемма 2.1. *Пусть $D_{\varphi,n}(\theta,\tau)$ определяется формулой* (2). *Тогда*

$$|D_{\varphi,2n}(\theta,\tau)| = |\varphi_{2n+1}(e^{i\theta})\varphi_{2n+1}(e^{i\tau})\, \sin A_n(\tau,\theta)| \cdot |\sin((\tau-\theta)/2)|^{-1}, \tag{18}$$

где $\tau,\theta \in \mathbb{R}$, $\tau \ne \theta$, $n \in \mathbb{Z}_+$, и

$$A_n(\theta,\tau) := \arg\varphi_{2n+1}(e^{i\tau}) - \arg\varphi_{2n+1}(e^{i\theta}) - (n + 2^{-1})(\tau - \theta). \tag{19}$$

Доказательство. Для ядра $K_{\varphi,n}(z,\xi)$ имеет место аналог формулы Кристоффеля–Дарбу (см. [7])

$$K_{\varphi,n}(z,\xi) = \frac{\varphi^*_{n+1}(z)\overline{\varphi^*_{n+1}(\xi)} - \varphi_{n+1}(z)\overline{\varphi_{n+1}(\xi)}}{1 - z\overline{\xi}}, \tag{20}$$

где $z, \xi \in \mathbb{C}$, $z\overline{\xi} \neq 1$ и

$$\varphi^*_n(z) := z^n\overline{\varphi_n(\overline{z}^{-1})} \qquad (z \in \mathbb{C}, z \neq 0, n \in \mathbb{Z}_+). \tag{21}$$

Из (16), (17) и (19)–(21) следует (18). Лемма доказана.

Ниже будет применяться следующая лемма, анонсированная (без доказательства) в [2]. Приводимое доказательство принадлежит В. М. Бадкову и публикуется с его согласия.

Лемма 2.2. *Пусть* $\{\varphi_{\sigma,n}(z)\}_{n=0}^{\infty}$ *– система многочленов, ортонормированная на окружности* $|z| = 1$ *по мере* $d\sigma(\tau)$. *Тогда для любой из ветвей функции* $\gamma_{\sigma,n}(\tau) := \arg\varphi_{\sigma,n}(e^{i\tau})$ *при всех* $\theta, \tau \in \mathbb{R}$ *и* $n \in \mathbb{N}$ *выполняется равенство*

$$\gamma_{\sigma,n}(\tau) - \gamma_{\sigma,n}(\theta) = \frac{n}{2}(\tau - \theta) + \frac{1}{2}\int_\theta^\tau |\varphi_{\sigma,n}(e^{iu})|^{-2}\sum_{\nu=0}^{n-1}|\varphi_{\sigma,\nu}(e^{iu})|^2\,du. \tag{22}$$

Доказательство. Дифференцируя равенство $\varphi_{\sigma,n}(e^{i\tau}) = e^{i\gamma_{\sigma,n}(\tau)}|\varphi_{\sigma,n}(e^{i\tau})|$ по τ, имеем

$$ie^{i\tau}\varphi'_{\sigma,n}(e^{i\tau}) = e^{i\gamma_{\sigma,n}(\tau)}\frac{d}{d\tau}|\varphi_{\sigma,n}(e^{i\tau})| + i\gamma'_{\sigma,n}(\tau)|\varphi_{\sigma,n}(e^{i\tau})|e^{i\gamma_{\sigma,n}(\tau)}.$$

Умножая обе части этого равенства на $-2i\overline{\varphi_{\sigma,n}(e^{i\tau})}$, с учетом соотношения $\overline{\varphi_{\sigma,n}(e^{i\tau})} = e^{-i\gamma_{\sigma,n}(\tau)}|\varphi_{\sigma,n}(e^{i\tau})|$ получаем, что

$$2e^{i\tau}\varphi'_{\sigma,n}(e^{i\tau})\overline{\varphi_{\sigma,n}(e^{i\tau})} = -2i|\varphi_{\sigma,n}(e^{i\tau})|\frac{d}{d\tau}|\varphi_{\sigma,n}(e^{i\tau})| + 2\gamma'_{\sigma,n}(\tau)|\varphi_{\sigma,n}(e^{i\tau})|^2. \tag{23}$$

Из (23) и формулы В. М. Бадкова (см. [5, лемма 11.1])

$$2\Re(e^{i\tau}\varphi'_{\sigma,n}(e^{i\tau})\overline{\varphi_{\sigma,n}(e^{i\tau})}) = n|\varphi_{\sigma,n}(e^{i\tau})|^2 + \sum_{\nu=0}^{n-1}|\varphi_{\sigma,\nu}(e^{i\tau})|^2 \tag{24}$$

следует, что $2\gamma'_{\sigma,n}(\tau)|\varphi_{\sigma,n}(e^{i\tau})|^2 = n|\varphi_{\sigma,n}(e^{i\tau})|^2 + \sum_{\nu=0}^{n-1}|\varphi_{\sigma,\nu}(e^{i\tau})|^2$. Отсюда легко находим, что

$$\gamma'_{\sigma,n}(\tau) = \frac{n}{2} + \frac{1}{2}|\varphi_{\sigma,n}(e^{i\tau})|^{-2}\sum_{\nu=0}^{n-1}|\varphi_{\sigma,\nu}(e^{i\tau})|^2. \tag{25}$$

Интегрируя (25), получаем (22).

3. Оценки величины $A_n(\theta,\tau)$

При выводе оценок снизу и сверху величин $A_n(\theta,\tau)$ и $|D_{\varphi,2n}(\theta,\tau)|$ используется следующий факт, полученный в [4] как следствие результатов [5].

Теорема 3.1. *Пусть $j\in\mathbb{Z}_+$, вес φ удовлетворяет условиям теоремы* 1.1. *Тогда найдутся положительные константы C_3 и C_4, зависящие лишь от φ и j, такие, что для всех $n>j$, $\theta\in\mathbb{R}$ выполняются неравенства*

$$C_3 n^j g_n(\theta)\le|\varphi_n^{(j)}(e^{i\theta})|\le C_4 n^j g_n(\theta), \tag{26}$$

где

$$g_n(\theta):=\left\{\prod_{\nu=1}^{m} w_\nu\left(\left|\sin\frac{\theta-\theta_\nu}{2}\right|+\frac{1}{n}\right)\right\}^{-\frac{1}{2}}. \tag{27}$$

Поведение функций (13) описывается следующей леммой.

Лемма 3.1. *Пусть $0<a<b<\infty$, функция w_ν определяется формулой* (13). *Тогда найдутся положительные константы C_5 и C_6, зависящие лишь от w_ν, a и b, такие, что для всех u_1 и u_2, удовлетворяющих условиям $a\le u_2/u_1\le b$, выполняются неравенства*

$$C_5\le w_\nu(u_2)/w_\nu(u_1)\le C_6. \tag{28}$$

Доказательство. Известно (см., например, [20, гл. 3]), что для любого модуля непрерывности $\omega(u)$ выполняется неравенство

$$\omega(u_2)\,u_2^{-1}\le 2\omega(u_1)\,u_1^{-1}\qquad(0<u_1\le u_2) \tag{29}$$

(для вогнутого $\omega(u)$ множитель 2 в правой части (29) можно опустить). Из этого неравенства и неубывания $\omega(u)$ легко следует (28).

Пользуясь теоремой 3.1 и леммой 3.1, убедимся в справедливости следующего утверждения.

Лемма 3.2. *Пусть вес φ удовлетворяет условиям теоремы* 1.1, *$A_n(\theta,\tau)$ определяется формулой* (19). *Тогда найдутся положительные константы $C_7(\varphi)$ и $C_8(\varphi)$ такие, что*

$$C_7(\varphi)n\cdot(\tau-\theta)\le A_n(\theta,\tau)\le C_8(\varphi)n\cdot(\tau-\theta)\qquad(\tau,\theta\in\mathbb{R};\ \theta\le\tau;\ n\in\mathbb{N}). \tag{30}$$

Доказательство. Преобразовав выражение (19) с помощью формулы (22) (при $d\sigma(\tau) = \varphi(\tau)d\tau$), с учетом (17) получим

$$A_n(\theta,\tau) = \frac{1}{2}\int_\theta^\tau |\varphi_{2n+1}(e^{iu})|^{-2} K_{\varphi,2n}(e^{iu},e^{iu})\,du. \tag{31}$$

Из (24) следует, что

$$|K_{\varphi,2n}(e^{iu},e^{iu})| \le 2|\varphi'_{2n+1}(e^{iu})\varphi_{2n+1}(e^{iu})|. \tag{32}$$

Из (32) в силу теоремы 3.1 получим, что

$$|K_{\varphi,2n}(e^{iu},e^{iu})| \le C_9(\varphi)n|\varphi_{2n+1}(e^{iu})|^2. \tag{33}$$

С другой стороны, в силу леммы 3.1 и формул (26), (27) из теоремы 3.1 вытекает оценка

$$K_{\varphi,2n}(e^{iu},e^{iu}) > \sum_{\nu=n+1}^{2n} |\varphi_\nu(e^{iu})|^2 \ge C_{10}(\varphi)\,n|\varphi_{2n+1}(e^{iu})|^2. \tag{34}$$

Из (31), (33) и (34) следует (30).

4. О нулях ядра $D_{\varphi,2n}(\theta,\tau)$

Ядро $D_{\varphi,2n}(\theta,\tau)$ как функция от τ является тригонометрическим полиномом порядка n, а потому имеет не более чем $2n$ нулей на периоде.

Лемма 4.1. *Ядро $D_{\varphi,2n}(\theta,\tau)$ как функция от τ имеет в интервале $(\theta,\theta+2\pi)$ точно $2n$ различных (и, следовательно, простых) нулей.*

Доказательство. Так как $\varphi_{2n+1}(e^{i\tau}) \neq 0$, то из (18) видно, что нули ядра $D_{\varphi,2n}(\theta,\tau)$ совпадают с нулями функции $\sin A_n(\theta,\tau)[\sin((\tau-\theta)/2)]^{-1}$ (как функции от τ при фиксированном θ). Известно (см. [7, формула (1.20)]), что

$$\frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi} e^{\pm i\nu\tau}|\varphi_n(e^{i\tau})|^{-2}\,d\tau = \frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi} e^{\pm i\nu\tau}\varphi(\tau)\,d\tau \qquad (\nu = 0,1,\ldots,n). \tag{35}$$

В силу (35) для любого многочлена $Q_n(z)$ степени не выше n

$$\frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi} |Q_n(e^{i\tau})|^2|\varphi_n(e^{i\tau})|^{-2}\,d\tau = \frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi} |Q_n(e^{i\tau})|^2\varphi(\tau)\,d\tau. \tag{36}$$

Из (31), (36), (17) и ортонормированности с весом φ системы $\{\varphi_\nu(e^{i\tau})\}_{\nu=0}^\infty$ следует равенство

$$A_n(\theta,\theta+2\pi) = \frac{1}{2}\int_0^{2\pi} K_{\varphi,2n}(e^{iu},e^{iu})|\varphi_{2n+1}(e^{iu})|^{-2}\,du = (2n+1)\pi. \tag{37}$$

Пользуясь (18) и (37), легко убеждаемся в справедливости леммы 4.1.

Заметим, что формулировка и доказательство леммы 4.1 сохраняют силу и для изучавшейся в [3] системы тригонометрических полиномов $\{T_{\sigma,n}(\tau)\}_{n=0}^{\infty}$, ортонормированной на $[0, 2\pi]$ по мере $d\sigma(\tau)$.

Лемма 4.2. *Пусть нули ядра $D_{\varphi,2n}(\theta, \tau)$ (как функции от τ) занумерованы в последовательность*

$$\ldots < z_{-2} < z_{-1} < z_0 < z_1 < z_2 < \ldots, \tag{38}$$

причем $z_{-1} < \theta < z_0$ и $z_\nu = z_\nu(\theta)$ $(\nu \in \mathbb{Z})$. Тогда

$$z_{-n} = z_n - 2\pi. \tag{39}$$

Если потребовать еще, чтобы вес φ удовлетворял условиям теоремы 1.1, *то найдутся положительные числа C_{11} и C_{12}, зависящие лишь от φ, такие, что расстояние между любыми двумя соседними элементами последовательности* (38) *заключено между $C_{11}\, n^{-1}$ и $C_{12}\, n^{-1}$.*

Доказательство. Заметим, что $D_{\varphi,2n}(\theta, \theta) > 0$. Поэтому удовлетворить условие $z_{-1} < \theta < z_0$ можно. Равенство (39) вытекает из определения последовательности (38), леммы 4.1 и 2π-периодичности по τ ядра $D_{\varphi,2n}(\theta, \tau)$. Оценки расстояния между соседними нулями этого ядра легко выводятся из формул (18) и (30).

5. Доказательство теоремы 1.1

Пусть последовательность z_ν $(\nu \in \mathbb{Z})$ имеет тот же смысл, что и в лемме 4.2. Рассмотрим отрезки

$$\Delta_\nu = \Delta_{\theta,\nu} := [z_{\nu-1}, z_\nu] \qquad (\nu \in \mathbb{Z}), \tag{40}$$

$$\delta_\nu = \delta_{\theta,\nu} := \{\tau : \tau \in \Delta_\nu, \ |\sin A_n(\theta, \tau)| \geq 1/2\}, \qquad (\nu \in \mathbb{Z}), \tag{41}$$

где $A_n(\theta, \tau)$ определяется формулой (19). Справедлива следующая лемма.

Лемма 5.1. *В условиях теоремы* 1.1 *найдется константа $C_{13}(\varphi) > 0$ такая, что для всех $\theta \in \mathbb{R}$ и $n \in \mathbb{N}$ выполняется неравенство*

$$C_{13}(\varphi) L_{\varphi,2n}(\theta) \leq \left\{ \sum_{\nu=1-n}^{-1} + \sum_{\nu=1}^{n} \right\} \int_{\delta_\nu} |D_{\varphi,2n}(\theta, \tau)| \varphi(\tau)\, d\tau, \tag{42}$$

в котором при $n = 1$ первую сумму следует опустить.

Доказательство. Прежде всего заметим, что поскольку обе части неравенства (42) положительны и принадлежат $C_{2\pi}$, то при доказательстве леммы можно считать, что n достаточно велико ($n > n_1(\varphi)$).

Пусть выполнены условия теоремы 1.1. Тогда в силу леммы 3.1 и свойства (14) найдутся положительные константы $C_{14}(\varphi)$ и $C_{15}(\varphi)$ такие, что для всех $\nu \in \mathbb{Z}$ и $n \in \mathbb{N}$ справедливы неравенства

$$C_{14}(\varphi) \leq \int_{\Delta_\nu} \varphi(\tau)\, d\tau \left[\int_{\delta_\nu} \varphi(\tau)\, d\tau \right]^{-1} \leq C_{15}(\varphi). \tag{43}$$

Пользуясь соотношениями (18), (26)−(28) и (40), а также леммой 4.2, заключаем, что при $\nu \in [1-n, -1] \bigcup [1, n]$ и $\tau \in \Delta_\nu$ справедливо соотношение

$$|D_{\varphi,2n}(\theta,\tau)| \leq C_{16}(\varphi)|\nu|^{-1} n |\varphi_{2n+1}(e^{i\theta})\varphi_{2n+1}(e^{iz_\nu})|. \tag{44}$$

В силу (44), (43), (41) и (18) при $\nu \in [1-n, -1] \bigcup [1, n]$ имеем неравенство

$$\int_{\Delta_\nu} |D_{\varphi,2n}(\theta,\tau)|\varphi(\tau)\, d\tau \leq C_{17}(\varphi) \int_{\delta_\nu} |D_{\varphi,2n}(\theta,\tau)|\varphi(\tau)\, d\tau. \tag{45}$$

Из (18), (26)–(28), (40), (41) и леммы 4.2 заключаем, что

$$\int_{\delta_1} |D_{\varphi,2n}(\theta,\tau)|\varphi(\tau)\, d\tau \geq C_{18}(\varphi) n |\varphi_{2n+1}(e^{i\theta})\varphi_{2n+1}(e^{iz_1})| \int_{\delta_1} \varphi(\tau)\, d\tau, \tag{46}$$

где константа $C_{18}(\varphi) > 0$. В силу (18), (26)−(28), (30), (40) и (43)

$$\int_{\Delta_0} |D_{\varphi,2n}(\theta,\tau)|\varphi(\tau)\, d\tau \leq C_{19}(\varphi) n |\varphi_{2n+1}(e^{i\theta})\varphi_{2n+1}(e^{iz_1})| \int_{\delta_0} \varphi(\tau)\, d\tau. \tag{47}$$

Из свойств веса φ следует, что

$$\int_{\delta_0} \varphi(\tau)\, d\tau \asymp \int_{\delta_1} \varphi(\tau)\, d\tau. \tag{48}$$

В силу (40) и (41) $\delta_0 \subset \Delta_0$. Поэтому из (46)−(48) вытекает оценка

$$\int_{\delta_0} |D_{\varphi,2n}(\theta,\tau)|\varphi(\tau)\, d\tau \leq C_{20}(\varphi) \int_{\delta_1} |D_{\varphi,2n}(\theta,\tau)|\varphi(\tau)\, d\tau. \tag{49}$$

Из (5), (39), (45) и (49) выводим (42).

Теперь мы можем доказать основную теорему.

Доказательство теоремы 1.1. В приводимом доказательстве мы во многом следуем схеме рассуждений работы [3]. Из неравенства Лебега (7), неравенства Джексона (8) и определения класса W^rH_ω получаем

$$|F(\theta) - s_{\varphi,2n}(F;\theta)| \le B_r(1 + L_{\varphi,n}(\theta))n^{-r}\omega(n^{-1})$$

для любой функции $F \in W^rH_\omega$, а значит,

$$\sup\{|F(\theta) - s_{\varphi,2n}(F;\theta)| : F \in W^rH_\omega\} \le B_r(1 + L_{\varphi,n}(\theta))\omega(n^{-1})n^{-r}, \qquad (50)$$

где $B_r > 0$. Первое из неравенств (15) доказано. Чтобы доказать второе, достаточно для каждого n и любого θ указать функцию $\widetilde{F}_{n,\theta,r,\omega} \in W^rH_\omega$ и константу $C_{21}(\varphi, r) > 0$ такие, что

$$|\widetilde{F}_{n,\theta,r,\omega}(\theta) - s_{\varphi,2n}(\widetilde{F}_{n,\theta,r,\omega};\theta)| \ge C_{21}(\varphi, r)(1 + L_{\varphi,n}(\theta))n^{-r}\omega(n^{-1}). \qquad (51)$$

Пусть числа z_ν $(\nu \in \mathbb{Z})$ имеют тот же смысл, что и в лемме 4.2, а отрезки Δ_ν $(\nu \in \mathbb{Z})$ определяются равенствами (40). Пользуясь функциями

$$v_0(t) = \omega(t), \quad v_{\nu+1}(t) = \int_0^1 v_\nu(ut)\,du, \quad (t \ge 0;\ \nu \in \mathbb{Z}_+), \qquad (52)$$

введенными в рассмотрение в [3], положим при $\nu \in \mathbb{Z}$

$$F^{r,\omega}_{n,\nu,\theta}(\tau) := \frac{(\tau - z_{\nu-1})^r v_r(\tau - z_{\nu-1})(z_\nu - \tau)^r v_r(z_\nu - \tau)}{(z_\nu - z_{\nu-1})^r\omega(z_\nu - z_{\nu-1})} \qquad (\tau \in \Delta_\nu). \qquad (53)$$

В [3] доказано, что $F^{r,\omega}_{n,\nu,\theta} \in d_rW^rH_\omega[z_{\nu-1}, z_\nu]$, где d_r – положительная константа, не зависящая от ω и концов промежутка Δ_ν (см. [3], лемма 5.2). Таким образом, $d_r^{-1}F^{r,\omega}_{n,\nu,\theta} \in W^rH_\omega[z_{\nu-1}, z_\nu]$. Определим функцию $F_{n,\theta,r,\omega}(\tau)$ в интервале $(-\infty, \infty)$ равенствами

$$F_{n,\theta,r,\omega}(\tau) = (2d_r)^{-1}\mathrm{sgn}D_{\varphi,2n}(\theta,\tau)F^{r,\omega}_{n,\nu,\theta}(\tau) \qquad (\tau \in \Delta_\nu;\ \nu \in \mathbb{Z}) \qquad (54)$$

и докажем, что $F_{n,\theta,r,\omega} \in W^rH_\omega$.

В силу (39) и (54) функция $F_{n,\theta,r,\omega}(\tau)$ 2π-периодична и имеет r непрерывных производных в $(-\infty, \infty)$. Так как $F^{r,\omega}_{n,\nu,\theta} \in d_rW^rH_\omega[z_{\nu-1}, z_\nu]$, то из (54) следует, что

$$\tau', \tau'' \in \Delta_\nu,\ |\tau' - \tau''| \le \delta \Rightarrow |F^{(r)}_{n,\theta,r,\omega}(\tau'') - F^{(r)}_{n,\theta,r,\omega}(\tau')| \le 2^{-1}\omega(\delta). \qquad (55)$$

В силу (54) r-я производная функции $F^{r,\omega}_{n,\nu,\theta}(\tau)$ на концах отрезка Δ_ν обращается в нуль при всех $\nu \in \mathbb{Z}$. Поэтому в случае когда между τ' и τ'' имеется хотя бы одна из точек z_ν, пользуясь (55), находим, что

$$|\tau' - \tau''| \le \delta \Rightarrow |F^{(r)}_{n,\theta,r,\omega}(\tau'') - F^{(r)}_{n,\theta,r,\omega}(\tau')| \le \omega(\delta)/2 + \omega(\delta)/2 = \omega(\delta).$$

Следовательно, $\omega(F^{(r)}_{n,\theta,r,\omega};\delta)_\infty \le \omega(\delta)$ для всех $\delta \ge 0$. Этим доказано, что $F_{n,\theta,r,\omega} \in W^r H_\omega$.

Докажем существование константы $C_{22}(r,\varphi) > 0$ такой, что для всех $\nu \in \mathbb{Z}$

$$|F_{n,\theta,r,\omega}(\tau)| \ge C_{22}(r,\varphi)\, n^{-r}\omega(n^{-1}) \qquad (\tau \in \delta_\nu), \tag{56}$$

где δ_ν определяется равенством (41).

Так как все нули (38) простые, то из (40) и (41) следует, что δ_ν есть отрезок $[z'_{\nu-1}, z''_{\nu-1}]$, вложенный в интервал $(z_{\nu-1}, z_\nu)$ при целых $\nu \ne 2nk$, где $k \in \mathbb{Z}$. В силу (18) и (30) найдутся положительные константы C_{23} и C_{24}, зависящие лишь от φ, такие, что

$$C_{23}n^{-1} \le z'_{\nu-1} - z_{\nu-1} \le C_{24}n^{-1}, \quad C_{23}n^{-1} \le z_\nu - z''_{\nu-1} \le C_{24}n^{-1}. \tag{57}$$

В [3] установлены неравенства

$$4^{-r}\omega(t) \le v_r(t) \le \omega(t) \qquad (t \ge 0,\ r \in \mathbb{N}). \tag{58}$$

Из (52), (53), (57) и (58) следует (56).

Введем теперь в рассмотрение функцию $\widetilde{F}_{n,\theta,r,\omega}(\tau)$, на отрезках $\Delta_{2n\nu}$ $(\nu \in \mathbb{Z})$ равную нулю, а в остальных точках интервала $(-\infty,\infty)$ совпадающую с $F_{n,\theta,r,\omega}(\tau)$. Так как $F_{n,\theta,r,\omega} \in W^r H_\omega$, то и $\widetilde{F}_{n,\theta,r,\omega} \in W^r H_\omega$. Из (1), (39) и определения функции $\widetilde{F}_{n,\theta,r,\omega}(\tau)$ следует, что

$$|\widetilde{F}_{n,\theta,r,\omega}(\theta) - s_{\varphi,2n}(\widetilde{F}_{n,\theta,r,\omega};\theta)| = \frac{1}{2\pi}\int_{z_{-n}}^{z_n} |\widetilde{F}_{n,\theta,r,\omega}(\tau) D_{\varphi,2n}(\theta,\tau)|\varphi(\tau)\,d\tau. \tag{59}$$

В силу (42), (56), (59) найдется число $C_{25} = C_{25}(r,\varphi) > 0$ такое, что

$$|\widetilde{F}_{n,\theta,r,\omega}(\theta) - s_{\varphi,2n}(\widetilde{F}_{n,\theta,r,\omega};\theta)| \ge C_{25}n^{-r}\omega(n^{-1})L_{\varphi,n}(\theta) \qquad (n \in \mathbb{N};\ \theta \in \mathbb{R}). \tag{60}$$

Из (60) и (4) следует (51). Из (6), (50) и (51) вытекает справедливость теоремы 1.1.

Автор благодарит В. М. Бадкова за постановку задачи и внимание к работе.

Литература

1. Ахиезер Н. И. Лекции по теории аппроксимации. М.: Наука, 1965.

2. Бадков В. М. Функция Кристоффеля и нули ортогональных полиномов // Современные проблемы теории функций и их приложения: Тез. докл. 10-й Саратов. зимней шк. Саратов: Изд-во Саратов. ун-та, 2000. С. 14–15.

3. Бадков В. М. Приближение функций в равномерной метрике суммами Фурье по ортогональным полиномам // Тр. МИАН. 1980. Т. 145. С. 20–62.

4. Бадков В. М. Асимптотика многочленов второго рода и двусторонние поточечные оценки их производных // Тр. Ин-та математики и механики УрО РАН. 1992. Т. 1. С. 71–83.

5. Бадков В. М. Асимптотические и экстремальные свойства ортогональных полиномов при наличии особенностей у веса // Тр. МИРАН. 1992. Т. 198. С. 41–88.

6. Бернштейн С. Н. О наилучшем приближении непрерывных функций посредством многочленов данной степени // Собр. соч. М.: Изд-во АН СССР. 1952. Т. 1. С. 11–104.

7. Геронимус Я. Л. Многочлены, ортогональные на окружности и на отрезке. М.: Физматгиз, 1958.

8. Ефимов А. В. О приближении некоторых классов непрерывных функций суммами Фурье и суммами Фейера // Изв. АН СССР. Сер. матем. 1958. Т. 22, № 1. С. 81–116.

9. Ефимов А. В. Приближение функций с заданным модулем непрерывности суммами Фурье // Там же. 1959. Т. 23, № 1. С. 115–134.

10. Ефимов А. В. Приближение непрерывных периодических функций суммами Фурье // Там же. 1960. Т. 24, № 2. С. 243–296.

11. Никольский С. М. Об асимптотическом поведении остатка при приближении функций, удовлетворяющих условию Липшица, суммами Фейера // Там же. 1940. Т. 4, № 6. С. 501–508.

12. Никольский С. М. Асимптотическая оценка остатка при приближении суммами Фурье // ДАН СССР. 1941. Т. 32, № 6. С. 386–389.

13. Никольский С. М. Приближение периодических функций тригонометрическими многочленами. М.;Л.: Изд-во АН СССР, 1945.

14. Никольский С. М. Ряды Фурье функций с данным модулем непрерывности // ДАН СССР. 1946. Т. 52, №3. С. 191–194.

15. Пинкевич В. Т. О порядке остаточного члена ряда Фурье функций, дифференцируемых в смысле Вейля // Изв. АН СССР. Сер. матем. 1940. Т. 4, №6. С. 521–528.

16. Сандакова С. Л. Оценки функции Лебега сумм Фурье по тригонометрическим полиномам, ортогональным с весом, имеющим особенности // Проблемы теоретической и прикладной математики: Тр. 34-й Регион. молодеж. конф. Екатеринбург: УрО РАН, 2003. С. 74–76.

17. Сегё Г. Ортогональные многочлены. М.: Физматгиз, 1962.

18. Степанец А. И. Классификация и приближение периодических функций. Киев: Наук. думка, 1987.

19. Теляковский С. А. Приближение дифференцируемых функций частными суммами их рядов Фурье // Матем. заметки. 1968. Т. 4, № 3. С. 291–300.

20. Тиман А. Ф. Теория приближения функций действительного переменного. М.: Физматгиз, 1960.

21. Badkov V. M. Orders of the weighted Lebesgue constants for Fourier sums with respect to orthogonal polynomials // Proc. of the Steklov Institute of Mathematics. Suppl. 1. 2001. P. S48–S64.

22. Kolmogoroff A. N. Zur Grössenordnung des Restgliedes Fourierscher Reihen differenzierbarer Funktionen // Ann. Math. 1935. Vol. 36, № 2. P. 521–526.

23. Lebesgue H. Sur la representation trigonometrique approchee des fonctions satisfaisant a une condition de Lipshitz // Bull. Soc. Math. France. 1910. T. 38. P. 184–210.

24. Szegö G. On bi-orthogonal systems of trigonometric polynomials // Magy. tud. akad. Mat. kut. intéz. közl. 1963 (1964). Vol. 8, № 3. P. 255–273.

Статья поступила 26.03.2004 г.