УДК 517.5

А. В. Макаров, Е. В. Ошман

О МНОЖЕСТВАХ ТОЧЕК НЕПРЕРЫВНОСТИ МНОГОЗНАЧНОЙ МЕТРИЧЕСКОЙ ПРОЕКЦИИ В ПРОСТРАНСТВЕ $C(Q)$

В этой работе приводятся подробные доказательства некоторых результатов, опубликованных в [1, 2].

1. Основные понятия и определения

Пусть M, N – непустые множества в линейном нормированном пространстве X, $x \in X$, $y \in X$, L – замкнутое подпространство в X. Мы используем обозначения:

$$sp\, M \text{ – линейная оболочка } M;$$
$$xy = \|x-y\|; \qquad d(x,M) = xM = \inf\{xy :\ y \in M\};$$
$$\rho(M,N) = \inf\{xy :\ x \in M,\ y \in N\}; \qquad d(M,N) = \sup\{xN :\ x \in M\};$$
$$D(M,N) = \max\{d(M,N),\ d(N,M)\}; \qquad P_M x = \{y \in M :\ xy = xM\};$$
$$V = \{x \in X :\ \|x\| \le 1\}; \qquad S = \{x \in X :\ \|x\| = 1\};$$
$$L^\perp = \{f \in X^* :\ f(x) = 0\ \forall\, x \in L\}; \qquad S_{L^\perp} = \{f \in L^\perp :\ \|f\| = 1\}$$
$$S_{X/L} = \{G \in X/L :\ \|G\| = 1\}, \qquad \|G\| = d(\theta, G);$$
$$x_\alpha \dashrightarrow x, \text{ если сеть } \{x_\alpha\}_{\alpha\in A} \subset X \text{ слабо сходится к } x \in X.$$

Допуская вольность, мы обозначаем через G и элемент фактор-пространства X/L, и соответствующий ему параллельный сдвиг подпространства L в X.

Многозначное отображение $P_M : x \to P_M x$ называется *метрической проекцией* X на M. Множество M называется *множеством существования* (*P-компактным*, *чебышевским*), если $\forall\, x \in X \quad P_M x \ne \varnothing$ ($P_M x \ne \varnothing$ и компактно, $P_M x$ одноточечно). Пусть M – множество существования в X, $x \in X$. Метрическая проекция P_M называется *полунепрерывной сверху* (*полунепрерывной снизу*) в точке x, если из условий $P_M x \subset W$, W открыто в X, $x_n \to x$ следует, что $P_M x_n \subset W$ для всех n, начиная с некоторого номера (из условий $y \in P_M x$, $x_n \to x$ следует $d(y, P_M x_n) \to 0$). P_M называется *H-полунепрерывной сверху* (*H-полунепрерывной снизу*, *H-непрерывной*, *ρ-непрерывной*) в точке x, если из условия $x_n \to x$ следует $d(P_M x_n, P_M x) \to 0$ (соответственно

$d(P_M x, P_M x_n) \to 0$, $D(P_M x, P_M x_n) \to 0$, $\rho(P_M x, P_M x_n) \to 0$). Метрическая проекция P_M называется *непрерывной* в точке x, если она полунепрерывна сверху и полунепрерывна снизу в этой точке.

Для M будем рассматривать множества $\mathcal{N}_{пн.св}$, $\mathcal{N}_{пн.сн}$, $\mathcal{N}$, $\mathcal{N}_{H-пн.св}$, $\mathcal{N}_{H-пн.сн}$, $\mathcal{N}_H$, $\mathcal{N}_\rho$, всех точек $x \in X$, в которых P_M соответственно полунепрерывна сверху, полунепрерывна снизу, непрерывна, H-полунепрерывна сверху, H-полунепрерывна снизу, H-непрерывна, ρ-непрерывна. Будем рассматривать также множество $\mathcal{K} = \{x \in X : \ P_M x \text{ компактно}\}$. Известны (см., например, [3]) следующие соотношения:

$$M \subset \mathcal{N}_{пн.св} \subset \mathcal{N}_{H-пн.св}, \quad M \subset \mathcal{N}_{H-пн.сн} \subset \mathcal{N}_{пн.сн},$$
$$\mathcal{N}_{пн.сн} \bigcup \mathcal{N}_{H-пн.сн} \subset \mathcal{N}_\rho, \quad \mathcal{N}_{H-пн.св} \bigcap \mathcal{K} \subset \mathcal{N}_{пн.св},$$
$$\mathcal{N}_{пн.сн} \bigcap \mathcal{K} \subset \mathcal{N}_{H-пн.сн}, \quad \mathcal{N}_H \bigcap \mathcal{K} \subset \mathcal{N}.$$

Если M – подпространство в X, то $\mathcal{N}_{H-пн.св} \bigcap \mathcal{K} = \mathcal{N}_{пн.св}$, $\mathcal{N}_H \bigcap \mathcal{K} = \mathcal{N}$. Для чебышевского M все рассматриваемые множества точек непрерывности P_M совпадают.

Пусть Q – бикомпактное хаусдорфово пространство, $C(Q)$ – банахово пространство всех вещественных непрерывных на Q функций с нормой $\|x\| = \sup\{|x(q)| : \ q \in Q\}$; $C(Q)^*$ – пространство мер Радона μ:

$$\langle x, \mu \rangle := \int_Q x \, d\mu \qquad \forall\, x \in C(Q);$$

$\|\mu\| = |\mu|(Q) = var(\mu, Q)$; S_μ – носитель меры $\mu \in C(Q)^*$; $S_\mu^+ := S_{\mu^+}$, $S_\mu^- := S_{\mu^-}$, где $\mu^+ - \mu^- = \mu$, $\mu^+ + \mu^- =| \mu |$.

Мы будем изучать перечисленные выше множества точек непрерывности метрической проекции P_M в случае, когда $X = C(Q)$, $M = L$ – подпространство в $C(Q)$ и $1 \le codim\, L < +\infty$. Всюду в дальнейшем (если нет особых разъяснений) подпространство L – множество существования в $C(Q)$, $1 \le codim\, L < +\infty$. Такие подпространства существуют в любом $C(Q)$, и их характеризацию дает следующая теорема A [4].

Теорема A (А. Л. Гаркави). *Для того чтобы подпространство $L \subset C(Q)$, $1 \le codim\, L < +\infty$ было множеством существования, необходимо и достаточно, чтобы выполнялись следующие условия:*
а) $S_\mu^+ \bigcap S_\mu^- = \varnothing \ \ \forall\, \mu \in L^\perp$;
б) множество $S_{\mu'} \setminus S_{\mu''}$ замкнуто $\forall\, \mu', \mu'' \in L^\perp$;
в) мера μ'' абсолютно непрерывна относительно μ' на множестве $S_{\mu'}$ $\forall\, \mu', \mu'' \in L^\perp$.

Пусть $\{\mu_1, \ldots, \mu_n\}$ – базис в $L^\perp$ и $Q_L = \bigcup_{i=1}^n S_{\mu_i}$. Множество Q_L называется *приведенным бикомпактом* подпространства L [1] и, очевидно, не зависит от выбора базиса в $L^\perp$. Заметим также, что для любого $\mu \in L^\perp$ $S_\mu \subset Q_L$ и в силу свойств «а», «б» теоремы А множества S_μ^+, S_μ^-, $Q_L \backslash S_\mu$ являются открыто-замкнутыми относительно Q_L. С каждой мерой $\mu \in L^\perp$ будем связывать функцию $\alpha_\mu \in C(Q_L)$:

$$\alpha_\mu(q) = \begin{cases} 1, & q \in S_\mu^+, \\ -1, & q \in S_\mu^-, \\ 0, & q \in Q_L \backslash S_\mu. \end{cases}$$

Число $r[\mu] = dim\, L_\mu^\perp$, где $L_\mu^\perp = \{\nu \in L^\perp : \ S_\nu \subset S_\mu\}$, называется *рангом* меры μ [2].

Обозначим:

$$F_G^+ = \bigcap\{x^{-1}(1)\bigcap Q_L : \ x \in P_G\theta\}, \qquad F_G^- = \bigcap\{x^{-1}(-1)\bigcap Q_L : \ x \in P_G\theta\},$$
$$F_G = F_G^+ \bigcap F_G^-, \qquad \text{где } \ G \in S_{C(Q)/L}.$$

Множество F_G непусто, так как для любой ненулевой меры $\mu \in L^\perp$, разделяющей G и V (по теореме Эйдельгайта такие меры всегда существуют), очевидно, $S_\mu^\pm \subset F_G^\pm$. Справедливо и обратное: если для некоторой ненулевой меры $\mu \in L^\perp$ $S_\mu^\pm \subset F_G^\pm$, то μ разделяет G и V. Множества F_G и $F_G^\pm$ были введены в [1]. Они совпадают с соответствующими множествами F_p и $F_p^\pm$, введенными Л. П. Власовым в [5], и в дальнейшем будут играть важную роль. Их основные свойства приведены в [6] (см. леммы 2, 5, следствие 2).

Для $G \in S_{C(Q)/L}$ будем рассматривать функцию $\alpha_G \in C(F_G)$: $\alpha_G(q) = 1$ для $q \in F_G^+$, $\alpha_G(q) = -1$ для $q \in F_G^-$. Через $\mu[G]$ будем обозначать значение меры $\mu \in L^\perp$ на элементе $G \in S_{C(Q)/L}$ (мы отождествляем $L^\perp$ с $(C(Q)/L)^*$).

В [6, теорема 1] (см. также [2, теорема 1]) установлены равенства

$$\mathcal{N}_{H\text{–}пн.сн} = \mathcal{N}_{пн.сн} = \mathcal{N}_\rho, \qquad \mathcal{N}_{H\text{–}пн.св} = \mathcal{N}_H, \qquad \mathcal{N}_{пн.св} = \mathcal{N}.$$

Поэтому достаточно изучать множества $\mathcal{N}_\rho$, $\mathcal{N}_H$, $\mathcal{N}$. Заметим также, что, ввиду равенства $\mathcal{N} = \mathcal{N}_H \bigcap \mathcal{K}$, иногда достаточно знать только свойства множеств $\mathcal{N}_\rho$, $\mathcal{N}_H$, $\mathcal{K}$. Мы будем пользоваться характеристикой множеств $\mathcal{N}_\rho$, $\mathcal{N}_H$ [6, теоремы 2, 3], а также характеристикой множества $\mathcal{K}$ [5, теорема 2], полученной Л. П. Власовым.

2. Дескриптивные свойства множеств $\mathcal{N}$, $\mathcal{N}_H$, $\mathcal{N}_\rho$, $\mathcal{K}$

Теорема 1. *Пусть подпространство L – множество существования в $C(Q)$, $1 \leq codim\, L < +\infty$. Тогда справедливы следующие утверждения:*

1) *множества* $\mathcal{N} \setminus L$, $\mathcal{N}_H \setminus L$, $\mathcal{N}_\rho \setminus L$ *открыты в слабой топологии* $C(Q)$*;*

2) *множества* $\overline{\mathcal{N}}$, $\overline{\mathcal{N}}_H$, $\overline{\mathcal{N}}_\rho$ *слабо замкнуты в* $C(Q)$, $\overline{\mathcal{N}}_H = \overline{\mathcal{N}}_\rho$ *и множество* $\mathcal{N}_\rho \setminus \mathcal{N}_H$ *нигде не плотно в* $C(Q)$*;*

3) *множество* $\mathcal{K}$ *слабо замкнуто в* $C(Q)$.

Доказательство. 1) Предположим, что множество $\mathcal{N}_\rho \setminus L$ не является открытым в слабой топологии $C(Q)$. Тогда, очевидно, существует такая сеть $\{x_\alpha\}_{\alpha\in A} \subset C(Q)$, что

$$x_\alpha \dashrightarrow x, \quad x \in \mathcal{N}_\rho \setminus L, \qquad x_\alpha \notin \mathcal{N}_\rho \quad \forall\, \alpha \in A. \tag{1}$$

Так как $codim\, L < +\infty$, то $\widehat{x}_\alpha = x_\alpha + L \to \widehat{x} = x + L$ в $C(Q)/L$ и можно выбрать такую последовательность $\{\alpha_n\} \subset A$, что $\widehat{x}_{\alpha_n} \to \widehat{x}$ и $G_n \to G$ в $C(Q)/L$, где $G_n = \widehat{x}_{\alpha_n}/_{\|\widehat{x}_{\alpha_n}\|}$ $(n = 1, 2, \ldots)$, $G = \widehat{x}/_{\|\widehat{x}\|}$. Теперь, в силу (1) и [6, лемма 4], найдется такая последовательность $\{x_n\}$, что $x_n \in P_{G_n}\theta$ $(n = = 1, 2, \ldots)$ и $\|x_n - \alpha_G\|_{C(F_G)} \to 0$, откуда, так как $x_n\big|_{F_{G_n}} = \alpha_{G_n}$ $(n = 1, 2, \ldots)$ и по [6, лемма 5] $F_{G_n} \subset F_G$ $\forall\, n > N$, имеем

$$F^{\pm}_{G_n} \subset F^{\pm}_{G} \quad \forall\, n > N_1. \tag{2}$$

Из (2) непосредственно следует, что если G удовлетворяет условию (h) (см. [6, теорема 2]) (соответственно удовлетворяет условию 3 или 4 из [6, теорема 3]), то такому же условию удовлетворяют и G_n при $n > N_1$. В силу (1) и [6, теорема 2] теперь имеем $x_{\alpha_n} \in \mathcal{N}_\rho \setminus L$ $\forall\, n > N_1$, что противоречит (1). Значит, множество $\mathcal{N}_\rho \setminus L$ открыто в слабой топологии $C(Q)$. Множества $\mathcal{N}_H \setminus L$ и $\mathcal{N} \setminus L$ также открыты в слабой топологии $C(Q)$. Это непосредственно следует из приведенных только что рассуждений с использованием в них теоремы 3 вместо теоремы 2 из [6].

2) Покажем, например, что множество $\overline{\mathcal{N}}_\rho$ слабо замкнуто в $C(Q)$. Обозначим через $[\mathcal{N}_\rho]$ замыкание $\mathcal{N}_\rho$ в слабой топологии $C(Q)$. Ясно, что $\overline{\mathcal{N}}_\rho \subset [\mathcal{N}_\rho]$. Пусть $x \in [\mathcal{N}_\rho]$. Тогда существует такая сеть $\{x_\alpha\}_{\alpha\in A} \subset \mathcal{N}_\rho$, что $x_\alpha \dashrightarrow x$. Так как $codim\, L < +\infty$, то $\widehat{x}_\alpha = x_\alpha + L \to \widehat{x} = x + L$ в $C(Q)/L$ и, следовательно, найдется такая сеть $\{y_\alpha\}_{\alpha\in A} \subset C(Q)$, что $y_\alpha \in x_\alpha + L$ $\forall\, \alpha \in A$ и $y_\alpha \to x$. Но $x_\alpha + L \subset \mathcal{N}_\rho$ $\forall\, \alpha \in A$, поэтому $x \in \overline{\mathcal{N}}_\rho$ и $\overline{\mathcal{N}}_\rho = [\mathcal{N}_\rho]$. Точно так же доказывается слабая замкнутость множеств $\overline{\mathcal{N}}_H$ и $\overline{\mathcal{N}}$. Покажем, что $\overline{\mathcal{N}}_\rho = \overline{\mathcal{N}}_H$. Для этого достаточно установить включение $\mathcal{N}_\rho \setminus L \subset \overline{\mathcal{N}}_H$. Пусть $x_0 \in \mathcal{N}_\rho \setminus L$, $\widehat{x}_0 = x_0 + L$, $G_0 = \widehat{x}_0/_{\|\widehat{x}_0\|} \in S_{C(Q)/L}$. По теореме 2 из [6] G_0 удовлетворяет условию (h), и так как множество $\mathcal{N}_\rho \setminus L$ открыто в $C(Q)$, то существует такое число $\varepsilon > 0$, что все $G \in S_{C(Q)/L}$ с $\|G - G_0\| < \varepsilon$ также удовлетворяют условию (h). По известной теореме Мазура [7] существует такая, состоящая из точек гладкости $S_{C(Q)/L}$, последовательность $\{G_n\}$, что $G_n \to G_0$ и $\|G_n - G_0\| < \varepsilon$

для всех n. В силу [6, следствие 2] $sp\, G_n \subset \mathcal{N}_H$ для всех n и, очевидно, найдется такая последовательность $\{y_n\}$, что $y_n \in \|\widehat{x}_0\| G_n \quad \forall\, n$ и $y_n \to x_0$, т. е. $x_0 \in \overline{\mathcal{N}}_H$. Равенство $\overline{\mathcal{N}}_\rho = \overline{\mathcal{N}}_H$ доказано. Из него следует включение

$$\mathcal{N}_\rho \setminus \mathcal{N}_H \subset \overline{\mathcal{N}}_H \setminus \mathcal{N}_H \subset \overline{(\mathcal{N}_H \setminus L)} \setminus (\mathcal{N}_H \setminus L)\,,$$

и так как $\mathcal{N}_H \setminus L$ открыто, получаем, что множество $\mathcal{N}_\rho \setminus \mathcal{N}_H$ нигде не плотно в $C(Q)$. Утверждение 2 доказано полностью.

3) Рассмотрим сеть $\{x_\alpha\}_{\alpha \in A} \subset \mathcal{K}$ с $x_\alpha \dashrightarrow x$ и покажем, что $x \in \mathcal{K}$. Можно считать, что $x \notin L$ и $\{x_\alpha\}_{\alpha \in A} \subset \mathcal{K} \setminus L$. Так как $codim\, L < +\infty$, то

$$\widehat{x}_\alpha = x_\alpha + L \;\to\; \widehat{x} = x + L \;\; \text{в} \;\; C(Q)/L$$

и можно выбрать такую последовательность $\{\alpha_n\} \subset A$, что

$$G_n = \widehat{x}_{\alpha_n} / _{\|\widehat{x}_{\alpha_n}\|} \;\to\; G = \widehat{x} / _{\|\widehat{x}\|} \;\; \text{в} \;\; C(Q)/L.$$

По лемме 5 из [6] $F_{G_n} \subset F_G \quad \forall\, n > N$, откуда, в силу критерия множества $\mathcal{K}$ [5, теорема 2], непосредственно получаем $x \in \mathcal{K}$. Теорема 1 доказана.

Замечание 1. *Из доказательства теоремы* 1 *следует, что все ее утверждения останутся справедливыми, если в них слабую топологию* $C(Q)$ *заменить на еще более слабую топологию* τ_L*, которая порождается в* $C(Q)$ *преднормой* $\|x\|_{L^\perp} = d\,(x, L)$. *Эта преднорма уже применялась в исследованиях по непрерывности метрической проекции* (*см.* [8, 9]).

3. Нетривиальность множеств $\mathcal{N}$, $\mathcal{N}_H$, $\mathcal{N}_\rho$

В этой части мы покажем, что множества $\mathcal{N}$, $\mathcal{N}_H$, $\mathcal{N}_\rho$ могут быть тривиальными, т. е. совпадать с подпространством L. Следующая теорема дает критерий нетривиальности этих множеств.

Теорема 2. *Пусть подпространство* L – *множество существования в* $C(Q)$, $\;1 \le codim\, L < +\infty$. *Рассмотрим следующие утверждения:*
1) $\;\mathcal{N}_\rho \setminus L \neq \varnothing$;
2) $\;\mathcal{N}_H \setminus L \neq \varnothing$;
3) $\;\exists\, \mu \in L^\perp : \; r[\mu] = 1$;
4) $\;\mathcal{N} \setminus L \neq \varnothing$;
5) $\;\exists\, \mu \in L^\perp : \; r[\mu] = 1$ *и множество* $Q \setminus S_\mu$ *конечно.*
Тогда 1) $\Leftrightarrow$ 2) $\Leftrightarrow$ 3), $\;$ 4) $\Leftrightarrow$ 5). *В частности, утверждения* 1–3 *выполняются, если существует мера* $\mu \in L^\perp \setminus \{\theta\}$ *с метризуемым носителем* S_μ.

Доказательство. Эквивалентность 1 и 2 следует из теоремы 1. Импликации 3) $\Rightarrow$ 2) и 5) $\Rightarrow$ 4) непосредственно вытекают из [6, следствие 3] (в доказательстве второй используется также критерий множества $\mathcal{N}$ [6, теорема 3]).

2) $\Rightarrow$ 3). Пусть $x_0 \in \mathcal{N}_H \setminus L$, $\widehat{x}_0 = x_0 + L$, $G_0 = \widehat{x}_0/_{\|\widehat{x}_0\|} \in S_{C(Q)/L}$. Так как $G_0 \subset \mathcal{N}_H \setminus L$ и множество $\mathcal{N}_H \setminus L$ открыто в $C(Q)$ (теорема 1), то, в силу теоремы Мазура [7], найдется такая точка гладкости G единичной сферы $S_{C(Q)/L}$, что $G \subset \mathcal{N}_H \setminus L$. Теперь по [6, следствие 2] существует такая мера $\overline{\mu}$ из $L^{\perp}$, что $S^{\pm}_{\overline{\mu}} = F^{\pm}_G$ и $r[\overline{\mu}] = 1$. Импликация 2) $\Rightarrow$ 3) доказана. Импликация 4) $\Rightarrow$ 5) доказывается совершенно аналогично. При этом используются открытость в $C(Q)$ множества $\mathcal{N} \setminus L$ (теорема 1) и критерий множества $\mathcal{N}$ [6, теорема 3].

Пусть мера $\mu \in L^{\perp} \setminus \{\theta\}$ имеет метризуемый носитель S_{μ}. Поскольку $codim\, L < +\infty$, очевидно, найдется такая мера $\overline{\mu} \in L^{\perp} \setminus \{\theta\}$, что $S_{\overline{\mu}} \subset S_{\mu}$ и $S_{\nu} = S_{\overline{\mu}}\ \forall\, \nu \in L^{\perp}_{\overline{\mu}} \setminus \{\theta\}$. Рассмотрим в пространстве $C(S_{\overline{\mu}})$ подпространство $L_{\overline{\mu}}$ с аннулятором $L^{\perp}_{\overline{\mu}}$. Подпространство $L_{\overline{\mu}}$ ($codim\, L_{\overline{\mu}} = r[\overline{\mu}]$) является чебышевским в $C(S_{\overline{\mu}})$, так как для него легко проверяются все условия критерия А. Л. Гаркави [4, теорема III]. Предположим, что $r[\overline{\mu}] \geq 2$. Тогда, так как бикомпакт $S_{\overline{\mu}}$ метризуем, в силу известного результата А. Л. Гаркави [10, теорема II], получаем, что $S_{\overline{\mu}} = \overline{I}$, где I – множество всех изолированных точек $S_{\overline{\mu}}$. Пусть $q_0 \in I$ и ν_1, ν_2 – линейно независимые меры из $L^{\perp}_{\overline{\mu}}$. Тогда, очевидно, $\nu = \nu_2(q_0)\nu_1 - \nu_1(q_0)\nu_2 \in L^{\perp}_{\overline{\mu}} \setminus \varnothing$ и $\nu(q_0) = 0$, т. е. $q_0 \in S_{\overline{\mu}} \setminus S_{\nu}$, что противоречит определению меры $\overline{\mu}$. Значит, $r[\overline{\mu}] = 1$ и, следовательно, выполняются утверждения 1–3. Теорема 2 доказана.

Следствие 1. *Пусть Q – бикомпакт без изолированных точек, L – P-компактное подпространство в $C(Q)$, $1 \leq codim\, L < +\infty$. Тогда подпространство L чебышевское, и, если $codim\, L \geq 2$, то $\mathcal{N} = L$.*

Доказательство. Из критерия P-компактного подпространства [11, теорема 1] следует, что $S_{\mu} = Q\ \ \forall\, \mu \in L^{\perp} \setminus \{\theta\}$ и, следовательно, по критерию А. Л. Гаркави [4, теорема III] L – чебышевское подпространство в $C(Q)$. Если $codim\, L \geq 2$, то ясно, что не существует меры $\mu \in L^{\perp}$ с $r[\mu] = 1$ и по теореме 2 $\mathcal{N} = L$. Следствие 1 доказано.

Приведем один весьма общий способ построения бикомпактов Q, для которых $C(Q)$ содержит чебышевские подпространства любой конечной коразмерности $m \geq 2$ с тривиальным множеством точек непрерывности метрической проекции.

Пусть $L_{\infty}(S, \Sigma, \lambda)$ – банахово пространство вещественных функций, существенно ограниченных на пространстве (S, Σ, λ), с неотрицательной σ-конечной мерой λ, не имеющей атомов, и существует λ-интегрируемая функция $\varphi \in L_\infty(S,\Sigma,\lambda)$, не равная постоянной ни на каком множестве положительной меры. Рассмотрим для любого натурального числа $m \geq 2$ подпространство $L^m \subset L_\infty(S,\Sigma,\lambda)$, определяемое уравнениями

$$\int_S \psi(s)\,(\varphi(s))^k\,d\lambda(s), \quad k = 1,2,\ldots,m \ \ (\psi \in L^m)\,.$$

А. Л. Гаркави [10] показал, что подпространство L^m $(codim\, L^m = m)$ является чебышевским. С другой стороны, известно (см., например, [12]), что в нашем случае $L_\infty(S,\Sigma,\lambda)$ изометрически изоморфно некоторому пространству $C(Q)$, где бикомпакт Q не имеет изолированных точек. По следствию 1 в $L_\infty(S,\Sigma,\lambda)$ любое P-компактное подпространство L $(1 \leq codim\, L < +\infty)$ является чебышевским и если $codim\, L \geq 2$, то $\mathcal{N} = L$. В качестве $L_\infty(S,\Sigma,\lambda)$ можно взять, например, классические лебеговские пространства $L_\infty[0,1]$ и $L_\infty(-\infty,+\infty)$.

4. Подпространства с ρ-непрерывной метрической проекцией

В 1968 г. П. Д. Моррис [13] доказал, что метрическая проекция P_L на подпространство существования $L \subset C(Q)$ не может быть непрерывной, если бикомпакт Q бесконечен, $2 \leq codim\, L < +\infty$ и множество $P_L x$ конечномерно $\forall\, x \in C(Q)$. В. И. Андреев [14] и независимо от него Е. В. Ошман [11] показали, что результат Морриса верен и без предположения о конечномерности множества $P_L x$. Кроме того, в [11] был получен критерий подпространства существования $L \subset C(Q)$ $(codim\, L = 1)$ с непрерывной метрической проекцией. Далее, в [1, 15] был опубликован критерий подпространства существования $L \subset C(Q)$ $(1 \leq codim\, L < +\infty)$ с H-непрерывной метрической проекцией. С его помощью легко строить такие подпространства заданной коразмерности в любом $C(Q)$. В этой части мы получим критерий подпространства существования L $(1 \leq codim\, L < +\infty)$ с $\mathcal{N}_\rho = C(Q)$.

Пусть замкнутое подпространство $L \subset C(Q)$ $(1 \leq codim\, L < +\infty)$ удовлетворяет условиям «а», «б» теоремы A. *L-компонентой* точки $q \in Q_L$ [2] называется множество

$$\Phi(q) = \bigcap_{\mu \in L^\perp} \{t \in Q_L : \ \alpha_\mu(t) = \alpha_\mu(q)\}.$$

Ясно, что множество $\Phi(q)$ замкнуто в Q, содержит связную компоненту точки q в Q_L и $\forall\, q_1, q_2 \in Q_L$ либо $\Phi(q_1) = \Phi(q_2)$, либо $\Phi(q_1) \bigcap \Phi(q_2) = \varnothing$. Будем называть $\Phi(q)$ *существенной L-компонентой*, если $|\mu|(\Phi(q)) \neq 0$ для некоторой меры $\mu \in L^\perp$.

Лемма 1. *Пусть замкнутое подпространство $L \subset C(Q)$, $codim\, L \in [1, \infty)$, удовлетворяет условиям «а», «б», теоремы А и Φ – существенная L-компонента. Тогда существует ненулевая мера $\mu_\Phi \in C(Q)^*$: $S_{\mu_\Phi} = S^+_{\mu_\Phi}$ (если Φ открыто в Q_L, то $S^+_{\mu_\Phi} = \Phi$) и для каждой меры $\mu \in L^\perp$ такое число $\lambda_\mu(\Phi)$, что $\mu(E) = \lambda_\mu(\Phi)\mu_\Phi(E)$ для любого борелевского множества $E \subset \Phi$. Если L – множество существования в $C(Q)$, то Q_L содержит не более счетного числа различных существенных L-компонент и $\forall\, \mu \in L^\perp$ включения $\Phi \subset S^+_\mu$, $\Phi \subset S^-_\mu$, $\Phi \subset Q_L \setminus S_\mu$, соответственно равносильны неравенствам*

$$\lambda_\mu(\Phi) > 0, \quad \lambda_\mu(\Phi) < 0, \quad \lambda_\mu(\Phi) = 0.$$

Доказательство. Из определения L-компоненты следует, что $\forall\, \mu \in L^\perp$ либо $\Phi \subset S^+_\mu$, либо $\Phi \subset S^-_\mu$, либо $\Phi \subset Q_L \setminus S_\mu$. Отсюда, повторяя дословно рассуждения теоремы 3 из [15], получаем, что сужения на Φ любых мер μ, $\nu \in L^\perp$ знакопостоянны и линейно зависимы. Так как Φ – существенная L-компонента, то найдется такая мера $\mu \in L^\perp$, что $\Phi \subset S^+_\mu$ и $\mu(\Phi) > 0$. Для любого борелевского множества $E \subset Q$ положим $\mu_\Phi(E) = \mu(E \bigcap \Phi)$. Ясно, что мера μ_Φ искомая. Если теперь L – множество существования в $C(Q)$, то из условия «в» теоремы А получаем, что мера $\nu \in L^\perp$ имеет ненулевое сужение на Φ тогда и только тогда, когда $\Phi \subset S_\nu$. Отсюда непосредственно следует последнее утверждение леммы, а так как существует мера $\nu \in L^\perp$ с $S_\nu = Q_L$ [15, лемма 2] и различные L-компоненты не пересекаются, то Q_L может содержать не более счетного числа различных существенных L-компонент. Лемма доказана.

Предложение 1. *Пусть L – подпространство существования в $C(Q)$, $m = codim\, L \in [1, \infty)$, Φ – существенная L-компонента. Тогда найдутся такие меры μ', $\mu'' \in L^\perp$, что $\Phi = (Q_L \setminus S_{\mu'}) \bigcap S^+_{\mu''}$ и $r[\mu'] = m-1$, $r[\mu''] = m$. Обратно, если множество $(Q_L \setminus S_{\mu'}) \bigcap S^+_{\mu''}$ не пусто для некоторых мер μ', $\mu'' \in L^\perp$ с $r[\mu'] = m - 1$, $r[\mu''] = m$, то оно является существенной L-компонентой.*

Если L – P-компактное (чебышевское) подпространство и $m \geq 2$, то каждая существенная L-компонента состоит из конечного числа изолированных в Q точек (состоит не более чем из $m-1$ изолированных в Q точек).

Доказательство. Не нарушая общности, можно считать $m \geq 2$. Пусть μ', $\mu'' \in L^\perp$, $r[\mu'] = m-1$, $r[\mu''] = m$, $F = (Q_L \setminus S_{\mu'}) \bigcap S^+_{\mu''} \neq \varnothing$ и $\{\mu_1, \ldots, \mu_{m-1}\}$ есть базис подпространства в $L^\perp_{\mu'} \subset L^\perp$. Тогда, очевидно, $\{\mu_1, \ldots, \mu_{m-1}, \mu''\}$ есть базис в $L^\perp$ и, следовательно, $\forall\, \mu \in L^\perp$ сужения на F мер μ, μ'' знакопостоянны и линейно зависимы. Отсюда, так как множество F не пусто и открыто в Q_L, непосредственно получаем, что оно является существенной

L-компонентой. Обратно, пусть Φ – существенная L-компонента. Положим $L_\Phi^\perp = \{\mu \in L^\perp : \ \varphi(\mu) = 0\}$, где $\varphi(\mu) = \lambda_\mu(\Phi) \ \ \forall\, \mu \in L^\perp$. Из теоремы А следует, что $L_\Phi^\perp$ – аннулятор некоторого подпространства существования $L_\Phi \subset C(Q)$, причем $codim\, L_\Phi = dim\, L_\Phi^\perp = m-1$, так как по лемме 1 φ – ненулевой линейный функционал на $L^\perp$. В силу [15, лемма 2] найдутся такие меры $\mu' \in L_\Phi^\perp$ и $\mu'' \in L^\perp$, что $S_{\mu'} = Q_{L_\Phi}$ и $S_{\mu''} = Q_L$. Тогда $r[\mu'] = m-1$, $\ r[\mu''] = m$ и можно считать, что $\Phi \subset S^+_{\mu''}$. Таким образом, $\Phi \subset (Q_L \setminus S_{\mu'})\bigcap S^+_{\mu''}$ и, в силу первой части доказательства, получаем равенство $\Phi = (Q_L \setminus S_{\mu'})\bigcap S^+_{\mu''}$.

Остальные утверждения предложения 1 непосредственно следуют из полученной характеристики существенных L-компонент и критерия P-компактного (чебышевского) подпространства [11, теорема 1] ([4, теорема III]).

Лемма 2. *Пусть L – замкнутое подпространство в $C(Q)$, $codim\, L \in [1,\infty)$. Тогда, для того чтобы L было множеством существования и Q_L разбивалось на конечное число L-компонент, необходимо и достаточно, чтобы существовали такие замкнутые попарно непересекающиеся множества $\{F_1,\dots,F_m\}$ и меры $\mu_{F_1},\dots,\mu_{F_m} \subset C(Q)^*$, что*

$$Q_L = \bigcup_{i=1}^m F_i, \qquad S_{\mu_{F_i}} = S^+_{\mu_{F_i}} = F_i, \quad i=1,\dots,m, \qquad L^\perp \subset sp\{\mu_{F_1},\dots,\mu_{F_m}\}.$$

В этом случае $\forall\, \mu \in L^\perp$ имеем

$$\mu = \sum_{i=1}^m \lambda_i \mu_{F_i}, \qquad |\mu| = \sum_{i=1}^m |\lambda_i| \mu_{F_i}, \qquad S_\mu = \bigcup \{F_i : \ \lambda_i \neq 0\},$$
$$S^+_\mu = \bigcup \{F_i : \ \lambda_i > 0\}, \qquad S^-_\mu = \bigcup \{F_i : \ \lambda_i < 0\}.$$

Если подпространство L удовлетворяет условиям «а», «б» теоремы А *и Q_L разбивается на конечное число L-компонент, то L – множество существования.*

Доказательство аналогично доказательству теоремы 4 в [15]. При этом вместо [15, теорема 3] используется лемма 1.

Замечание 2. 1) *Множества $F_1,\dots,F_m$ не являются, вообще говоря, L-компонентами, но любая L-компонента составляется из них.*

2) *Если L – множество существования, $codim\, L = 1$ и $\mu \in L^\perp \setminus \{\theta\}$, то $Q_L = S_\mu = S^+_\mu \bigcap S^-_\mu$, $\ S^+_\mu \bigcap S^-_\mu = \varnothing$, $\ L^\perp \subset sp\,\{\mu^+,\mu^-\}$, т. е. Q_L разбивается не более чем на две L-компоненты.*

Теорема 3. *Пусть замкнутое подпространство L в $C(Q)$ является множеством существования и $codim\,L \in [1,\infty)$. Тогда следующие утверждения эквивалентны:*

1) $\mathcal{N}_\rho = C(Q)$;
2) Q_L *разбивается на конечное число L-компонент;*
3) $L^\perp$ *– полиэдральное подпространство в $C(Q)^*$;*
4) *фактор-пространство $C(Q)/L$ полиэдрально.*

Доказательство. Утверждения 3 и 4 эквивалентны, так как пространство $(C(Q)/L)^*$ изометрически изоморфно подпространству $L^\perp \subset C(Q)^*$.

4) $\Rightarrow$ 1) Пусть L – подпространство существования в линейном нормированном пространстве X, $1 \le codim\,L < +\infty$ и фактор-пространство X/L полиэдрально. Покажем, что метрическая проекция P_L H-полунепрерывна снизу (тем более ρ-непрерывна) в каждой точке $x \in X$.

Пусть $\{G \in X/L:\ \|G\| \le 1\} = \bigcap_{f\in F}\{G \in X/L:\ f(G) \le 1\}$, где F – конечное подмножество $S_{L^\perp}$, $\{G_n\} \subset S_{X/L}$, $G_0 \in S_{X/L}$ и $G_n \to G_0$. В силу [15, теорема 1] достаточно установить, что $d\,(G_0{\bigcap}V,\, G_n{\bigcap}V) \to 0$. Найдем такое число $\varepsilon > 0$, что

$$\{G \in X/L:\ \|G - G_0\| \le \varepsilon\} \subset \bigcap_{f\in F_0}\{G \in X/L:\ f(G) < 1\}\,, \qquad (3)$$

где $F_0 = \{f \in F:\ f(G_0) < 1\}$. Не нарушая общности, можно считать, что $0 < \|G_n - G_0\| < \varepsilon$ $(n = 1, 2, \ldots)$. Положим

$$G_n^+ = G_0 + \varepsilon\,(G_n - G_0)\,/\|G_n - G_0\|, \qquad n = 1, 2, \ldots.$$

Из (3) следует, что $f\,(G_n^+) < 1$ для всех $f \in F_0$ и для любого n, а так как $f\,(G_n) \le 1$ для всех $f \in F$ и для любого n, то для всех $f \in F \setminus F_0$ получаем

$$f\left(G_n^+\right) = 1 + \frac{\varepsilon}{\|G_n - G_0\|}\,(f\,(G_n) - 1) \le 1, \quad n = 1, 2, \ldots\,.$$

Таким образом, очевидно, $\{G_n^+\} \subset S_{X/L}$ и с помощью неравенства, установленного Н. В. Невесенко в [16, предложение 1], нетрудно получить следующую оценку, справедливую для всех n:

$$d\,(G_0{\bigcap}V,\, G_n{\bigcap}V) \le \varepsilon^{-1}\|G_n - G_0\| d\left(G_0{\bigcap}V,\, G_n^+{\bigcap}V\right) \le 2\varepsilon^{-1}\|G_n - G_0\|.$$

Импликация 4) $\Rightarrow$ 1) доказана.

1) $\Rightarrow$ 2) Покажем, что множество функций $\{\alpha_\mu:\ S_\mu = Q_L\}$ конечно. Действительно, пусть $\{\alpha_{\mu_n}\}$ – последовательность попарно различных функций с $S_{\mu_n} = Q_L$ $\ \forall\, n$ и $G_n = x_n + L$, где $x_n \in V$, $x_n|_{Q_L} = \alpha_{\mu_n}$ $\ \forall\, n$. Тогда

$\{G_n\} \subset S_{C(Q)/L}$, $F^{\pm}_{G_n} = S^{\pm}_{\mu_n}$ $\forall\, n$, и так как $codim\, L < +\infty$, то можно считать, что $G_n \to G$, $G \in S_{C(Q)/L}$. По лемме 5 из [6] $Q_L = F_{G_n} \subset F_G$ $\forall\, n > N$, следовательно, $F_G = Q_L$. В силу равенства $\mathcal{N}_\rho = C(Q)$ и [6, лемма 4] теперь получаем, что $\alpha_{\mu_n} \rightrightarrows \alpha_G$ на Q_L, откуда $\alpha_{\mu_n} = \alpha_G$ $\forall\, n > N_1$, что противоречит попарной различности функций $\{\alpha_{\mu_n}\}$. Пусть

$$\{\alpha_\mu :\ S_\mu = Q_L\} = \{\alpha_{\mu_i} :\ i = 1, \dots, m\}, \quad q \in Q_L,$$
$$F = \bigcap_{i=1}^{m} \{t \in Q_L :\ \alpha_{\mu_i}(t) = \alpha_{\mu_i}(q)\}.$$

Ясно, что множество F открыто-замкнуто в Q_L, $\Phi(q) \subset F$ и $\forall\, \overline{\mu} \in L^\perp$ с $S_{\overline{\mu}} = Q_L$ либо $F \subset S^+_{\overline{\mu}}$, либо $F \subset S^-_{\overline{\mu}}$. Далее, в силу равенства $\mathcal{N}_\rho = C(Q)$ и [15, лемма 4], имеем

$$\forall\, \mu \in L^\perp \quad \exists\, \overline{\mu} \in L^\perp :\ S_{\overline{\mu}} = Q_L, \quad S^{\pm}_{\mu} \subset S^{\pm}_{\overline{\mu}}. \tag{4}$$

Значит, любая мера $\mu \in L^\perp$ знакопостоянна на F и, в силу [5, предложение 7], любые меры μ, $\nu \in L^\perp$ линейно зависимы на F. Так как множество F открыто в Q_L, а меры μ, $\overline{\mu}$ из (4) знакопостоянны и линейно зависимы на нем, то $\forall\, \mu \in L^\perp$, очевидно, либо $F \subset S^+_\mu$, либо $F \subset S^-_\mu$, либо $F \subset Q_L \setminus S_\mu$. Из определения L-компоненты теперь получаем, что $F \subset \Phi(q)$, т. е. $F = \Phi(q)$. Таким образом, мы показали, что каждая L-компонента является пересечением некоторых множеств из конечного семейства $\left\{S^{\pm}_{\mu_i} :\ i = 1, \dots, m\right\}$. Следовательно, Q_L разбивается на конечное число L-компонент и импликация 1) $\Rightarrow$ 2) доказана.

2) $\Rightarrow$ 3). В силу леммы 2 существуют такие попарно непересекающиеся множества $\{F_i :\ i = 1, \dots, m\}$ и меры $\{\mu_{F_i} :\ i = 1, \dots, m\} \subset C(Q)^*$, что

$$Q_L = \bigcup_{i=1}^{m} F_i, \quad L^\perp \subset sp\,\{\mu_{F_1}, \dots, \mu_{F_m}\},$$
$$S_{\mu_{F_i}} = S^+_{\mu_{F_i}} = F_i, \quad \|\mu_{F_i}\| = 1, \quad i = 1, \dots, m,$$

и для любой меры $\mu = \sum_{i=1}^{m} \lambda_i \mu_{F_i} \in L^\perp$

$$\|\mu\| = |\mu|(Q) = \sum_{i=1}^{m} |\lambda_i|.$$

Таким образом, подпространство $L^\perp \subset C(Q)^*$ изометрически изоморфно некоторому подпространству полиэдрального пространства

$$l_1^m = \{x = (\lambda_1, \dots, \lambda_m) : \lambda_i \in \mathbb{R},\ i = 1, \dots, m\} \quad \text{с нормой} \quad \|x\| = \sum_{i=1}^{m} |\lambda_i|.$$

Импликация 2) $\Rightarrow$ 3), а вместе с ней и теорема 3 доказаны.

Доказанная теорема 3 и лемма 2 дают простой способ построения в любом $C(Q)$ подпространств существования конечной коразмерности с H-полунепрерывной снизу метрической проекцией.

Следующая теорема фактически была нами получена при доказательстве импликации 4) $\Rightarrow$ 1) в теореме 3.

Теорема 4. *Пусть L – подпространство существования в линейном нормированном пространстве X, $1 \leq codim\, L < +\infty$, и фактор-пространство X/L или, что то же самое, подпространство $L^{\perp} \subset X^*$ полиэдрально. Тогда метрическая проекция P_L H-полунепрерывна снизу.*

Литература

1. Ошман Е. В. О точках непрерывности метрической проекции в пространстве непрерывных функций // Докл. АН СССР. 1979. Т. 247, № 5. С. 1050–1053.
2. Ошман Е. В. О непрерывности метрической проекции в пространстве $C(Q)$ // Там же. 1980. Т. 251, № 5. С. 1063–1066.
3. Deutsch F., Pollul W., Singer I. On set-valued metric projections, Hahn-Banach extension maps, and spherical image maps // Duke Math. J. 1973. Vol. 40, № 2. P. 355–370.
4. Гаркави А. Л. Задача Хелли и наилучшее приближение в пространстве непрерывных функций // Изв. АН СССР. Сер. математика. 1967. Т. 31, № 3. С. 641–656.
5. Власов Л. П. Аппроксимативные свойства подпространств конечной коразмерности в $C(Q)$ // Матем. заметки. 1980. Т. 28, № 2. С. 205–222.
6. Макаров А. В., Ошман Е. В. Характеристика точек непрерывности метрической проекции в пространстве $C(Q)$ // Изв. Урал. гос. ун-та. 2003. № 30. (Математика и механика. Вып. 6). С. 75–89.
7. Mazur S. Über konvexe Mengen in linearen normierten Räumen // Stud. Math. 1933. Vol. 4. P. 70–84.
8. Ошман Е. В. Характеристика подпространств с непрерывной метрической проекцией в линейном нормированном пространстве // Докл. АН СССР. 1972. Т. 207, № 2. С. 292–295.
9. Ошман Е. В. Непрерывность метрической проекции на чебышевские подпространства конечной коразмерности в пространстве непрерывных функций // 1980. Т. 27, № 4. С. 597–606.
10. Гаркави А. Л. О компактах, допускающих чебышевские системы мер // Матем. сб. 1967. Т. 74, № 2. С. 209–217.

11. Ошман Е. В. О непрерывности метрической проекции на подпространства конечного дефекта в пространстве непрерывных функций // Матем. заметки. 1976. Т. 19, № 4. С. 531–539.

12. Phelps R. R. Čebyšev subspaces of finite codimension in $C(X)$ // Pacif. J. Math. 1963. Vol. 13, № 2. P. 647–655.

13. Morris P. D. Metric projections onto subspaces of finite codimension // Duke Math. J. 1968. Vol. 35, № 4. P. 797–808.

14. Андреев В. И. О непрерывности метрической проекции в $C(Q)$ // Метрические вопросы теории функций и отображений. Киев: Наук. думка, 1975. С. 3–8.

15. Ошман Е. В. Непрерывность метрической проекции на подпространства конечной коразмерности в $C(Q)$ // Матем. заметки. 1982. Т. 32, № 3. С. 343–353.

16. Невесенко Н. В. ρ-непрерывность метрической проекции на выпуклые замкнутые множества // Там же. 1978. Т. 23, № 6. С. 845–854.

Статья поступила 22.04.2002 г.