УДК 517.929

Ю. Ф. Долгий, С. Н. Нидченко

УСТОЙЧИВОСТЬ АНТИСИММЕТРИЧЕСКИХ ПЕРИОДИЧЕСКИХ РЕШЕНИЙ ДИФФЕРЕНЦИАЛЬНЫХ УРАВНЕНИЙ С ЗАПАЗДЫВАНИЕМ*

1. Постановка задачи

Рассматривается скалярное нелинейное дифференциальное уравнение с запаздыванием
$$\frac{dx(t)}{dt} = f(x(t), x(t-\tau)), \tag{1.1}$$
где f – трижды непрерывно дифференцируемая функция в открытом прямоугольнике $(-a_1, a_1) \times (-a_2, a_2)$ $(a_1, a_2 > 0)$; $f(0,0) = 0$. Ставится задача: найти условия существования антисимметрического решения $x(t + 2\tau) = -x(t)$, $t \in \mathbb{R}$, $\tau > 0$, дифференциального уравнения с запаздыванием (1.1) и исследовать его на устойчивость. Указанный круг вопросов изучался в работах [1–3] для уравнения (1.1), функция f которого не зависит от первого аргумента. Быстро осциллирующие периодические решения уравнения (1.1) изучались в работе [4].

2. Существование периодических решений

При выполнении условия $f(x_1, x_2) = -f(-x_1, -x_2)$, $x_j \in (-a_j, a_j)$, $j = 1, 2$, задача нахождения антисимметрического решения уравнения (1.1) сводится к проблеме нахождения решения краевой задачи для системы обыкновенных дифференциальных уравнений
$$\frac{dx_1}{dt} = f(x_1, -x_2),\ \frac{dx_2}{dt} = f(x_2, x_1), \tag{2.1}$$
$$x_1(0) = -x_2(\tau),\ x_2(0) = x_1(\tau). \tag{2.2}$$
Связь между решением $(x_1, x_2)^\top$ краевой задачи (2.1)–(2.2) и антисимметрическим решением x уравнения (1.1) определяется формулами $x(t) = x_1(t)$, $t \in [0, \tau]$, $x(t) = x_2(t - \tau)$, $t \in [\tau, 2\tau]$.

---

*Работа выполнена в рамках программы поддержки фундаментальных исследований Президиума РАН «Математические методы в нелинейной динамике».

Вопрос существования решения краевой задачи (2.1)–(2.2) будем рассматривать при выполнении условия

$$\left.\frac{\partial f(x,y)}{\partial x}\right|_{\substack{x=x_1\\ y=-x_2}} + \left.\frac{\partial f(x,y)}{\partial x}\right|_{\substack{x=x_2\\ y=x_1}} = 0, \tag{2.3}$$

где $x_j \in (-a_j, a_j)$; $j = 1, 2$. Условие (2.3) позволяет записать систему (2.1) в канонической форме:

$$\frac{dx_1}{dt} = \frac{\partial H(x_1,x_2)}{\partial x_2}, \quad \frac{dx_2}{dt} = -\frac{\partial H(x_1,x_2)}{\partial x_1}, \tag{2.4}$$

в которой функция H определяется формулой

$$H(x_1,x_2) = -\int_0^{x_1} f(x_2,s)ds + \int_0^{x_2} f(0,-s)ds,\ x_j \in (-a_j,a_j),\ j=1,2. \tag{2.5}$$

Системы (2.1) и (2.4) введены на отрезке времени $[0,\tau]$. Пользуясь автономностью этих систем, продолжим их на всю временную ось. Эти системы имеют первый интеграл

$$H(x_1,x_2) = C = const,\ x_j \in (-a_j,a_j),\ j=1,2, \tag{2.6}$$

который на фазовой плоскости определяет семейство интегральных кривых. Замкнутым кривым отвечают периодические решения. Пусть функция f четна по первому аргументу и трижды непрерывно дифференцируема в области $(-a_1,a_1)\times(-a_2,a_2)$. Тогда она допускает представление

$$f(x_1,x_2) = -ax_2 + bx_1^2x_2 + cx_2^3 + o((x_1^2+x_2^2)^{\frac{3}{2}}),\ x_j \in (-a_j,a_j),\ j=1,2, \tag{2.7}$$

которому отвечает представление функции

$$H(x_1,x_2) = \frac{a}{2}(x_1^2+x_2^2) - \frac{b}{2}x_1^2x_2^2 - \frac{c}{4}(x_1^4+x_2^4) + o((x_1^2+x_2^2)^2),\ x_j \in (-a_j,a_j),\ j=1,2.$$

Для $a>0$ существует такое $\widehat{C}>0$, при котором интегральные кривые (2.6), отвечающие значениям параметра $0<C<\widehat{C}$, замкнутые. Им соответствуют периодические решения $(x_1(t,\mu),x_2(t,\mu))^\top$, $t\in\mathbb{R}$, с периодом $T(\mu)$, удовлетворяющие начальным условиям $x_1(0,\mu)=0$, $x_2(0,\mu)=\mu$, интегральные постоянные которых $C=H(0,\mu)<\widehat{C}$ при $\mu\in(-\widehat{\mu},\widehat{\mu})$.

Теорема 2.1. *Пусть четная по первому аргументу и нечетная по второму аргументу функция f трижды непрерывно дифференцируема в области $(-a_1, a_1) \times (-a_2,\ a_2)$, удовлетворяет условию (2.3) и ее производная $\partial f(0,0)/\partial x_2$ отрицательна. Тогда каждому корню $\mu_* \in (0, \widehat{\mu})$ уравнения*

$$T(\mu) = 4\tau,\ \ \mu \in (0, \widehat{\mu}) \tag{2.8}$$

отвечает единственное антисимметрическое решение x_* дифференциального уравнения с запаздыванием, определяемое формулой $x_*(t) = x_1(t, \mu_*)$, $t \in \mathbb{R}$.

Доказательство. Покажем, что решение $(x_1(t, \mu_*), x_2(t, \mu_*))^\top$, $t \in \mathbb{R}$, системы (2.1) удовлетворяет краевым условиям (2.2). Из определения функции H следует, что она является четной по первому и второму аргументам. Следовательно, интегральная кривая с параметром $C = H(0, \mu_*)$ на фазовой плоскости симметрична относительно координатных осей x_1 и x_2. У этой кривой есть еще ось симметрии $x_1 = x_2$. Действительно, решая систему уравнений

$$\frac{\partial H(x_1, x_2)}{\partial x_2} = f(x_1, -x_2), \qquad \frac{\partial H(x_1, x_2)}{\partial x_1} = -f(x_2, x_1),$$

получим

$$H(x_1, x_2) = \int_0^{x_2} f(x_1, -s)ds - \int_0^{x_1} f(0, s)ds,\ \ x \in (-a_j, a_j),\ \ j = 1, 2.$$

Сравнивая этот результат с представлением (2.5), находим $H(x_1, x_2) = H(x_2, x_1)$, $x \in (-a_j, a_j)$, $j = 1, 2$, что доказывает наличие указанной симметрии. Времена движения по участкам интегральной кривой, расположенной в разных квадрантах, равны $T(\mu_*)/4 = \tau$. При $0 < \mu < \widehat{\mu}$ интегральные кривые системы (2.1) замкнуты. При малых положительных значениях параметра μ движение по интегральной кривой происходит по часовой стрелке. В силу непрерывности направление движения по интегральной кривой сохраняется при всех $0 < \mu < \widehat{\mu}$. Следовательно, выполняются условия $x_1(\tau, \mu_*) = \mu_*$, $x_2(\tau, \mu_*) = 0$, т. е. краевые условия (2.2). На отрезке времени $[0, 2\tau]$ система (2.1) инвариантна относительно замены: $t \to 2\tau - t$, $x_1 \to x_1$, $x_2 \to -x_2$. Следовательно, для рассматриваемого движения имеют место тождества

$$x_1(2\tau - t, \mu_*) \equiv x_1(t, \mu_*),\ \ x_2(2\tau - t, \mu_*) \equiv -x_2(t, \mu_*),\ \ t \in [0, 2\tau]. \tag{2.9}$$

На отрезке времени $[0, \tau]$ система (2.1) инвариантна относительно замены $t \to \tau - t$, $x_1 \to x_2$, $x_2 \to x_1$. Следовательно, для рассматриваемого движения имеют место тождества

$$x_1(\tau - t, \mu_*) \equiv x_2(t, \mu_*),\ \ x_2(\tau - t, \mu_*) \equiv x_1(t, \mu_*),\ \ t \in [0, \tau]. \tag{2.10}$$

Используя тождества (2.9) и (2.10), находим

$$x_*(t) \equiv x_2(t-\tau,\mu_*) \equiv x_1(2\tau - t,\mu_*) \equiv x_1(t,\mu_*) \text{ при } t \in [\tau, 2\tau].$$

Система (2.1) инвариантна относительно замены $t \to \tau + t$, $x_1 \to -x_1$, $x_2 \to -x_2$. Следовательно, имеют место тождества: $x_1(2\tau+t,\mu_*) \equiv -x_1(t,\mu_*)$, $x_2(2\tau+t,\mu_*) \equiv -x_2(t,\mu_*)$ при $t \in [0, 2\tau]$. Доказательство теоремы завершено.

Замечание 2.1. *Из результатов теоремы* 2.1 *следует, что* $x_*(t-\tau) = -x_2(t,\mu_*)$ *при* $t \in \mathbb{R}$.

Учитывая представление (2.7) функции f, систему (2.1) преобразуем к виду

$$\frac{dx_1}{dt} = ax_2 - bx_1^2x_2 - cx_2^3 + o\big((x_1^2+x_2^2)^{\frac{3}{2}}\big),$$
$$\frac{dx_2}{dt} = -ax_1 + bx_1x_2^2 + cx_1^3 + o\big((x_1^2+x_2^2)^{\frac{3}{2}}\big). \tag{2.11}$$

При нахождении для малых значений μ периодических решений $(x_1(t,\mu), x_2(t,\mu))^\top$, $t \in \mathbb{R}$, системы (2.11) и их периодов $T(\mu)$ можно воспользоваться методом Ляпунова. Относительно аргумента μ компоненты периодического решения являются нечетными функциями, а период – четной функцией. Делая в системе (2.11) замену: $t = T(\mu)s/(2\pi)$, $y_j(s) = x_j(T(\mu)s/(2\pi))$, $j = 1, 2$, получим

$$\frac{2\pi}{T(\mu)}\frac{dy_1}{ds} = ay_2 - by_1^2y_2 - cy_2^3 + o\big((y_1^2+y_2^2)^{\frac{3}{2}}\big),$$
$$\frac{2\pi}{T(\mu)}\frac{dy_2}{ds} = -ay_1 + by_1y_2^2 + cy_1^3 + o\big((y_1^2+y_2^2)^{\frac{3}{2}}\big). \tag{2.12}$$

Искомому периодическому решению $(x_1(t,\mu), x_2(t,\mu))^\top$, $t \in \mathbb{R}$, системы (2.11) отвечает 2π-периодическое решение

$$(y_1(s,\mu), y_2(s,\mu))^\top = (x_1(T(\mu)s/(2\pi),\mu),\ x_2(T(\mu)s/(2\pi),\mu))^\top,\ s \in \mathbb{R},$$

системы (2.12).

Теорема 2.2. *Пусть выполняются условия теоремы* 2.1. *Тогда при малых значениях* μ *период* T *и компоненты периодического решения системы* (2.12) *определяются асимптотическими формулами*

$$T(\mu) = \frac{2\pi}{a} + \frac{\pi(b+3c)}{2a^2}\mu^2 + o(\mu^2),$$
$$y_1(s,\mu) = \mu \sin s + o(\mu^2),$$
$$y_2(s,\mu) = \mu \cos s + o(\mu^2),\ s \in \mathbb{R}.$$

Доказательство. Согласно методу Ляпунова [5, с. 443] период и компоненты периодического решения системы (2.12) ищем в виде асимптотических разложений:

$$T(\mu) = \frac{2\pi}{a}(1 + h_2\mu^2 + o(\mu^2)),$$
$$y_1(s,\mu) = \mu \sin s + y_1^3\mu^3 + o(\mu^3),$$
$$y_2(s,\mu) = \mu \cos s + y_2^3\mu^3 + o(\mu^3),\ s \in \mathbb{R}.$$

Здесь 2π-периодические функции y_1^3, y_2^3 являются компонентами решения системы дифференциальных уравнений

$$\frac{dy_1^3}{ds} = y_2^3 + h_2 \cos s - \frac{b}{a}\sin^2 s \cos s - \frac{c}{a}\cos^3 s,$$
$$\frac{dy_1^3}{ds} = -y_1^3 - h_2 \sin s + \frac{b}{a}\sin s \cos^2 s + \frac{c}{a}\sin^3 s.$$

Из условий существования периодических решений [5, с. 109] этой системы находим $h_2 = (b + 3c)/4a$.

3. Бифуркационная постановка в задаче устойчивости периодического решения

Предполагая выполненными условия теоремы 2.1, рассмотрим вопрос об устойчивости периодического решения x_* дифференциального уравнения с запаздыванием (1.1). Запишем для этого решения уравнение возмущенного движения

$$\frac{dy(t)}{dt} = f(x_*(t) + y(t), x_*(t-\tau) + y(t-\tau)) - f(x_*(t), x_*(t-\tau)). \tag{3.1}$$

Уравнение линейного приближения для уравнения (3.1) имеет вид

$$\frac{dy(t)}{dt} = \frac{\partial f(x_*(t), x_*(t-\tau))}{\partial x_1}y(t) + \frac{\partial f(x_*(t), x_*(t-\tau))}{\partial x_2}y(t-\tau). \tag{3.2}$$

Это уравнение можно переписать в эквивалентной форме

$$\frac{dy(t)}{dt} = \frac{\partial f(x_1(t,\mu_*), -x_2(t,\mu_*))}{\partial x_1}y(t) + \frac{\partial f(x_1(t,\mu_*), -x_2(t,\mu_*))}{\partial x_2}y\Big(t - \frac{1}{4}T(\mu_*)\Big).$$

Рассмотрим однопараметрическое семейство линейных дифференциальных уравнений с запаздыванием

$$\frac{dy(t)}{dt} = \frac{\partial f(x_1(t,\mu), -x_2(t,\mu))}{\partial x_1}y(t) + \frac{\partial f(x_1(t,\mu), -x_2(t,\mu))}{\partial x_2}y\Big(t - \frac{1}{4}T(\mu)\Big), \tag{3.3}$$

где $\mu \in (-\widehat{\mu}, \widehat{\mu})$. Уравнение (3.2) совпадает с уравнением (3.3) при $\mu = \mu_*$. Задачу исследования устойчивости уравнения (3.2) заменим более общей задачей изучения устойчивости однопараметрического семейства уравнений (3.3). При решении последней задачи будут использованы бифуркационные методы исследования устойчивости.

Из результатов, полученных в ходе доказательства теоремы 2.1, следует, что $x_j(t + T(\mu)/2, \mu) = -x_j(t, \mu)$, $t \in \mathbb{R}$, $\mu \in (-\widehat{\mu}, \widehat{\mu})$, $j = 1, 2$. Тогда функции

$$a_j(t, \mu) = \frac{\partial f(x_1(t, \mu), -x_2(t, \mu))}{\partial x_j}, \; t \in \mathbb{R}, \; \mu \in (-\widehat{\mu}, \widehat{\mu}), \; j = 1, 2, \tag{3.4}$$

периодически зависят от t с периодом $T(\mu)/2$. Также из теоремы 2.1 следует, что

$$x_1(-t, \mu) = -x_1(T(\mu)/2 - t, \mu) = -x_1(t, \mu)$$

и

$$x_2(-t, \mu) = -x_2(T(\mu)/2 - t, \mu) = x_2(t, \mu),$$

$t \in [0, T(\mu)/2]$, $\mu \in (-\widehat{\mu}, \widehat{\mu})$. Тогда a_1 является нечетной, а a_2 – четной функцией аргумента t.

Функции $x_j(t, \mu)$, $t \in \mathbb{R}$, $\mu \in (-\widehat{\mu}, \widehat{\mu})$, $j = 1, 2$, являются нечетными функциями аргумента μ. Поэтому функции a_j, $j = 1, 2$, являются четными функциями аргумента μ.

Используя обозначения (3.4), перепишем уравнение (3.3):

$$\frac{dy(t)}{dt} = a_1(t, \mu) y(t) + a_2(t, \mu) y\Big(t - \frac{1}{4} T(\mu)\Big), \; \mu \in (-\widehat{\mu}, \widehat{\mu}). \tag{3.5}$$

Изучим устойчивость этого уравнения при малых значениях μ. Проведя в (3.5) замену: $t = T(\mu) s / (2\pi)$, $y\big(T(\mu) s / (2\pi)\big) = z(s)$, получим

$$\frac{2\pi}{T(\mu)} \frac{dz(s)}{ds} = \widehat{a}_1(s, \mu) z(s) + \widehat{a}_2(s, \mu) z\Big(s - \frac{\pi}{2}\Big). \tag{3.6}$$

Здесь $\widehat{a}_j(s, \mu) = a_j(T(\mu) s / (2\pi), \mu)$, $s \in \mathbb{R}$, $\mu \in (-\widehat{\mu}, \widehat{\mu})$, $j = 1, 2$. Функции $\widehat{a}_j$, $j = 1, 2$, являются 2π-периодическими функциями аргумента s и четными функциями аргумента μ. Учитывая представление (2.7) функции f и теорему 2.2, для функций $\widehat{a}_j$, $j = 1, 2$, находим асимптотические формулы

$$\widehat{a}_1(s, \mu) = -2b \sin s \cos s \; \mu^2 + o(\mu^2),$$
$$\widehat{a}_2(s, \mu) = -a + (b \sin^2 s + 3c \cos^2 s) \; \mu^2 + o(\mu^2).$$

Учитывая эти асимптотические представления и асимптотические представления периода T из теоремы 2.2, преобразуем уравнение (3.6) к квазигармонической форме

$$\frac{dz(s)}{ds} = \Big(-\frac{b}{a}\sin 2s\,\mu^2 + o(\mu^2)\Big) z(s) + \Big(-1 + \Big(\frac{b}{a}\sin^2 s + \frac{3c}{a}\cos^2 s - \\ - \frac{b+3c}{4a}\Big)\mu^2 + o(\mu^2)\Big) z\Big(s - \frac{\pi}{2}\Big). \tag{3.7}$$

При $\mu = 0$ уравнение (3.7) имеет двухкратный характеристический показатель $\lambda = i$. Используя метод Д-разбиения [6, с. 124], можно показать, что остальные характеристические показатели этого уравнения имеют отрицательные действительные части. Будем изучать ситуацию, когда двухкратный характеристический показатель при возрастании μ распадается на два характеристических показателя. В дальнейшем будет показано, что один из них будет равен i. Для нахождения зависимости второго характеристического показателя от μ при малых значениях этого аргумента воспользуемся методикой работы [7].

Теорема 3.1. *Пусть выполняются условия теоремы* 2.1 *и* $d^2T(0)/d\mu^2 \neq 0$. *Тогда уравнение* (3.5) *устойчиво для малых положительных значений параметра* μ *при* $d^2T(0)/d\mu^2 > 0$ *и неустойчиво при* $d^2T(0)/d\mu^2 < 0$.

Доказательство. Искомому характеристическому показателю $\lambda(\mu)$ ($\lambda(0) = i$) отвечает решение Флоке $z(s,\mu) = e^{\lambda(\mu)s}u(s,\mu)$, где u – π-периодическая функция аргумента s, удовлетворяющая уравнению

$$\frac{du(s)}{ds} = \Big(-\frac{b}{a}\sin 2s\,\mu^2 - \lambda(\mu) + o(\mu^2)\Big) u(s) + \Big(-1 + \Big(\frac{b}{a}\sin^2 s + \frac{3c}{a}\cos^2 s - \\ - \frac{b+3c}{4a}\Big)\mu^2 + o(\mu^2)\Big) e^{-\lambda(\mu)\frac{\pi}{2}} u\Big(s - \frac{\pi}{2}\Big). \tag{3.8}$$

Следуя работе [7], характеристический показатель и периодическое решение уравнения (3.8) будем искать в форме асимптотических разложений

$$\lambda(\mu) = i + \lambda_2\mu^2 + o(\mu^2),$$

$$u(s,\mu) = u_0(s) + u_2(s)\mu^2 + o(\mu^2). \tag{3.9}$$

Подставляя эти разложения в (3.8), находим дифференциальные уравнения с запаздыванием

$$\frac{du_0(s)}{ds} = -iu_0(s) + iu_0\Big(s - \frac{\pi}{2}\Big), \tag{3.10}$$

$$\frac{du_2(s)}{ds} = -iu_2(s) + iu_2\Big(s - \frac{\pi}{2}\Big) - \Big(\frac{b}{a}\sin 2s + \lambda_2\Big)u_0(s) - \frac{i}{a}\Big(b\sin^2 s + \\ + 3c\cos^2 s + \lambda_2\frac{\pi}{2}a - \frac{b+3c}{4a}\Big)u_0\Big(s - \frac{\pi}{2}\Big), \tag{3.11}$$

π-периодическими решениями которых являются коэффициенты разложения (3.9). Искомое π-периодическое решение уравнения (3.10) имеет вид $u_0 = c_0 + c_{-1}e^{-2is}$, где постоянные c_0 и c_{-1} одновременно в нуль не обращаются. С учетом полученного решения переписываем уравнение (3.11)

$$\frac{du_2(s)}{ds} = -iu_2(s) + iu_2\Big(s - \frac{\pi}{2}\Big) - \Big(\frac{b}{a}\sin 2s + \lambda_2\Big)(c_0 + c_{-1}e^{-2is}) - \frac{i}{a}\Big(b\sin^2 s + \\ + 3c\cos^2 s + \lambda_2\frac{\pi}{2}a - \frac{b+3c}{4a}\Big)(c_0 - c_{-1}e^{-2is}).$$

Условия существования периодических решений [8] этого дифференциального уравнения с запаздыванием имеют вид

$$\Big(\lambda_2\Big(1 + \frac{\pi i}{2}\Big) + \frac{i(b+3c)}{4}\Big)c_0 - \frac{i(b+3c)}{4a}c_{-1} = 0,$$
$$-\frac{i(b+3c)}{4a}c_0 + \Big(\lambda_2\Big(\frac{\pi i}{2} - 1\Big) + \frac{i(b+3c)}{4}\Big)c_{-1} = 0.$$

Поскольку $b + 3c = (a^2/\pi)(d^2T(0)/d\mu^2) \neq 0$, то ненулевое λ_2, при котором полученная система линейных алгебраических уравнений имеет нетривиальное решение, определяется формулой

$$\lambda_2 = -\frac{a}{4+\pi^2}\frac{d^2T(0)}{d\mu^2},$$

а соответствующий характеристический показатель – формулой

$$\lambda(\mu) = i - \frac{a\mu^2}{4+\pi^2}\frac{d^2T(0)}{d\mu^2} + o(\mu^2). \tag{3.12}$$

Устойчивость и неустойчивость уравнений (3.5) и (3.6) при малых значениях μ определяется знаком действительной части характеристического показателя (3.12). Теорема доказана.

Продолжим изучение устойчивости уравнения (3.5). В дальнейшем будем рассматривать неотрицательные значения параметра $\mu \in [0, \widehat{\mu})$. Устойчивость уравнения (3.5) будем описывать в функциональном пространстве состояний [9, с. 151]. Она зависит от расположения спектра оператора монодромии [10], действующего в пространстве $C[-T(\mu)/2, 0]$ и определяемого формулой $(U\varphi)(\vartheta) = y(T(\mu)/2+\vartheta,\varphi)$, $\vartheta\in[-T(\mu)/2,0]$, где $y(T(\mu)/2+\cdot,\varphi)$ – отрезок решения дифференциального уравнения (3.5) с начальной функцией $\varphi\in C[-T(\mu)/2,0]$. Задачу нахождения ненулевых собственных чисел $\rho\in\mathbb{C}$ оператора монодромии можно заменить задачей нахождения ненулевых собственных чисел $z\in\mathbb{C}$ ($\rho=-z^{-2}$) краевой задачи для системы обыкновенных дифференциальных уравнений [11]

$$\begin{aligned}\frac{dy_1}{d\vartheta} &= a_1\Big(\frac{T(\mu)}{2}+\vartheta,\mu\Big)y_1 - za_2\Big(\frac{T(\mu)}{2}+\vartheta,\mu\Big)y_2,\\ \frac{dy_2}{d\vartheta} &= za_2\Big(\frac{T(\mu)}{4}+\vartheta,\mu\Big)y_1 - a_1\Big(\frac{T(\mu)}{4}+\vartheta,\mu\Big)y_2,\end{aligned}\tag{3.13}$$

$$y_1\Big(-\frac{T(\mu)}{4}\Big) = -zy_2(0),\ y_2\Big(-\frac{T(\mu)}{4}\Big) = zy_1(0).\tag{3.14}$$

Справедливы равенства

$$\begin{gathered}x_j(T(\mu)/2+\vartheta,\mu) = -x_j(\vartheta,\mu),\ j=1,2,\\ x_1(T(\mu)/4+\vartheta,\mu) = x_2(-\vartheta,\mu) = x_2(\vartheta,\mu),\\ x_2(T(\mu)/4+\vartheta,\mu) = x_1(-\vartheta,\mu) = -x_1(\vartheta,\mu),\end{gathered}$$

где $\vartheta\in[-T(\mu)/4,0]$, $\mu\in[0,\widehat{\mu})$. Учитывая (3.4), находим

$$a_1\Big(\frac{T(\mu)}{2}+\vartheta,\mu\Big) = \frac{\partial f(-x_1(\vartheta,\mu),x_2(\vartheta,\mu))}{\partial x_1},$$

$$a_1\Big(\frac{T(\mu)}{4}+\vartheta,\mu\Big) = \frac{\partial f(x_2(\vartheta,\mu),x_1(\vartheta,\mu))}{\partial x_1},\ \vartheta\in\Big[-\frac{T(\mu)}{2},0\Big],\ \mu\in[0,\widehat{\mu}).$$

Из условия (2.3) следует, что

$$a_1(T(\mu)/2+\vartheta,\mu) + a_1(T(\mu)/4+\vartheta,\mu) \equiv 0,$$

где $\vartheta\in[-T(\mu)/2,0]$, $\mu\in[0,\widehat{\mu})$. Введя обозначение $y=(y_1,y_2)^\top$, систему (3.13) и краевые условия запишем в векторной форме:

$$J\frac{dy}{d\vartheta} = (H_1(\vartheta,\mu)+zH_2(\vartheta,\mu))y,\tag{3.15}$$

$$y\Big(-\frac{T(\mu)}{4}\Big) = zJy(0),\ z\in\mathbb{C}.\tag{3.16}$$

Здесь

$$J=\begin{pmatrix}0 & -1\\ 1 & 0\end{pmatrix},\ H_1(\vartheta,\mu)=\begin{pmatrix}0 & -a_1(T(\mu)/4+\vartheta,\mu)\\ a_1(T(\mu)/2+\vartheta,\mu) & 0\end{pmatrix},$$

$$H_2(\vartheta,\mu) = \begin{pmatrix} -a_2(T(\mu)/4+\vartheta,\mu) & 0 \\ 0 & -a_2(T(\mu)/2+\vartheta,\mu) \end{pmatrix}, \tag{3.17}$$

$\vartheta \in [-T(\mu)/2, 0]$, $\mu \in [0,\widehat{\mu})$. Значения матричных функций H_1 и H_2 являются симметричными матрицами. Будем предполагать, что функция f удовлетворяет условию

$$\frac{\partial f(x_1,x_2)}{\partial x_2} < 0,\ x_j \in (-a_j, a_j),\ j = 1,2. \tag{3.18}$$

При выполнении этого условия, учитывая (3.4), находим $a_2(t,\mu) < 0$ при $t \in \mathbb{R}$, $\mu \in [0,\widehat{\mu})$. Следовательно, значения матричной функции H_2 являются определенно положительными матрицами.

Введем нормированную фундаментальную матрицу

$$Y(\vartheta,\mu,z) = ||y_{ij}(\vartheta,\mu,z)||_1^2,$$

где $Y(-T(\mu)/4,\mu,z) = I_2$, $\vartheta \in [-T(\mu)/4, 0]$, $z \in \mathbb{C}$, $\mu \in [0,\widehat{\mu})$, системы обыкновенных дифференциальных уравнений (3.15). Так как матрица коэффициентов системы (3.15) имеет нулевой след, то $\det Y(\vartheta,\mu,z) = 1$, $\vartheta \in [-T(\mu)/4, 0]$, $z \in \mathbb{C}$, $\mu \in [0,\widehat{\mu})$. Собственные числа $z \in \mathbb{C}$ краевой задачи (3.15)–(3.16) являются корнями характеристического уравнения

$$\det\left(I_2 - zJY(0,\mu,z)\right) = 0,\ z \in \mathbb{C},\ \mu \in [0,\widehat{\mu}).$$

Преобразуем это уравнение к виду

$$z^2 - 2zV(z,\mu) + 1 = 0,\ z \in \mathbb{C},\ \mu \in [0,\widehat{\mu}), \tag{3.19}$$

где

$$V(z,\mu) = \frac{1}{2}(y_{12}(0,\mu,z) - y_{21}(0,\mu,z)),\ z \in \mathbb{C},\ \mu \in [0,\widehat{\mu}). \tag{3.20}$$

Нашей дальнейшей задачей является изучение движений по комплексной плоскости корней характеристического уравнения (3.19) при изменении параметра μ.

4. Исследование бифуркаций корней характеристического уравнения

Справедливо тождество

$$\frac{dx_1(t,\mu)}{dt} \equiv f\Big(x_1(t,\mu), x_1\Big(t - \frac{T(\mu)}{4},\mu\Big)\Big),\ t \in \mathbb{R},\ \mu \in [0,\widehat{\mu}).$$

Дифференцируя его по t, получим

$$\frac{d^2x_1(t,\mu)}{dt^2} \equiv \frac{\partial f(x_1(t,\mu), x_1(t-T(\mu)/4,\mu))}{\partial x_1}\frac{dx_1(t,\mu)}{dt} +$$
$$+ \frac{\partial f(x_1(t,\mu), x_1(t-T(\mu)/4,\mu))}{\partial x_2}\frac{dx_1(t-T(\mu)/4,\mu)}{dt} \equiv$$
$$\equiv \frac{\partial f(x_1(t,\mu), -x_2(t,\mu))}{\partial x_1}\frac{dx_1(t,\mu)}{dt} + \frac{\partial f(x_1(t,\mu), -x_2(t,\mu))}{\partial x_2}\frac{dx_1(t-T(\mu)/4,\mu)}{dt},$$

где $t \in \mathbb{R}$, $\mu \in [0,\widehat{\mu})$. Следовательно, функция $y(t,\mu) = dx_1(t,\mu)/dt$, где $t \in \mathbb{R}$, $\mu \in [0,\widehat{\mu})$, является решением уравнения (3.3). Из тождества

$$x_1(T(\mu)/2+\vartheta,\mu) \equiv -x_1(\vartheta,\mu),\ \vartheta \in [-T(\mu)/2, 0],\ \mu \in [0,\widehat{\mu}),$$

следует тождество

$$y(T(\mu)/2+\vartheta,\mu) \equiv -y(\vartheta,\mu),\ \vartheta \in [-T(\mu)/2, 0],\ \mu \in [0,\widehat{\mu}).$$

Тогда оператор монодромии U имеет собственное число $\rho = -1$, а краевая задача (3.15)–(3.16) – собственные числа $z = \pm 1$. Отсюда следует, что $V(\pm 1,\mu) \equiv \pm 1$, $\mu \in [0,\widehat{\mu})$. Используя симметрии системы дифференциальных уравнений (3.15), можно показать, что $V(-z,\mu) = -V(z,\mu)$, $z \in \mathbb{C}$, $\mu \in [0,\widehat{\mu})$. Тогда корни характеристического уравнения (3.19) расположены на комплексной плоскости симметрично относительно мнимой оси. Следовательно, при изучении движений корней характеристического уравнения по комплексной плоскости при изменении параметра μ можно ограничиться рассмотрением правой полуплоскости.

Собственное число $\rho = -1$ оператора монодромии является мультипликатором уравнения (3.6), которому отвечает характеристический показатель $\lambda = i$ этого уравнения.

Лемма 4.1. *Пусть выполняются условия теоремы* 2.1. *Тогда для малых положительных значений μ характеристическое уравнение* (3.19) *не имеет корней* (*имеет два корня*) *в области* $\{z : |z| < 1, z \in \mathbb{C}\}$, *если* $d^2T(0)/d\mu^2 > 0$ (*соответственно* $d^2T(0)/d\mu^2 < 0$).

Доказательство. Все характеристические показатели уравнения (3.6), отличные от i и (3.12), имеют отрицательные действительные части при малых значениях μ. Характеристическому показателю $\lambda = i$ отвечают корни $z = \pm 1$ характеристического уравнения (3.19). Характеристическим показателям с отрицательной действительной частью отвечают корни характеристического уравнения по модулю больше единицы. Характеристическому показателю (3.12) уравнения (3.6) отвечает собственное число оператора монодромии

$\rho(\mu) = e^{\pi\lambda(\mu)} = -1 + \big(a\pi\mu^2/(4+\pi^2)\big)d^2T(0)/d\mu^2 + o(\mu^2)$. Этому собственному числу оператора монодромии отвечают два корня уравнения (3.19)

$$z_{1,2}(\mu) = \pm(-\rho(\mu))^{-\frac{1}{2}} = \pm\big(1 + (a\pi\mu^2/(8+2\pi^2))d^2T(0)/d\mu^2 + o(\mu^2)\big).$$

Откуда следует справедливость утверждения леммы.

Лемма 4.2. *Пусть выполнены условия теоремы* 2.1 *и условие* (3.18). *Тогда на комплексной плоскости переход через единичную окружность* $|z| = 1$ *корней характеристического уравнения* (3.19) *возможен только в точках* $z = \pm 1$ *при значениях параметра* μ, *удовлетворяющих уравнению*

$$\frac{\partial V(1,\mu)}{\partial z} = 0,\ \ \mu \in [0,\widehat{\mu}). \tag{4.1}$$

Доказательство. Краевая задача для системы обыкновенных дифференциальных уравнений

$$J\frac{dy}{d\vartheta} = (H_1(\vartheta,\mu) + \lambda H_2(\vartheta,\mu))y,$$
$$y\Big(-\frac{T(\mu)}{4}\Big) = zJy(0),\ \ |z| = 1,\ \ z \in \mathbb{C},\ \ \mu \in [0,\widehat{\mu}),$$

является самосопряженной [12, с. 175]. Следовательно, собственные числа λ этой задачи вещественны. Тогда в момент перехода через единичную окружность в правой полуплоскости собственное число краевой задачи (3.15)–(3.16) становится вещественным и равным 1. Это означает, что в момент перехода через единичную окружность корень $z = 1$ характеристического уравнения (3.19) становится кратным, а условие (4.1) является необходимым и достаточным условием его кратности. Лемма доказана.

Уравнение (4.1) определяет бифуркационные значения параметра μ, при которых корни характеристического уравнения пересекают единичную окружность. Для анализа этих бифуркаций требуется знать поведение функции V в малой окрестности значения $z = 1$. Фундаментальную матрицу Y системы (3.15) задаем асимптотическим разложением

$$Y(\vartheta,\mu,z) = Y^0(\vartheta,\mu) + Y^1(\vartheta,\mu)\tilde{z} + Y^2(\vartheta,\mu)\tilde{z}^2 + o(\tilde{z}^2),$$
$$\vartheta \in \Big[-\frac{T(\mu)}{4},0\Big],\ \ \tilde{z} = z - 1,\ \ z,\tilde{z} \in \mathbb{C},\ \ \mu \in [0,\widehat{\mu}), \tag{4.2}$$

в котором матричные коэффициенты являются решениями матричных дифференциальных уравнений с заданными начальными значениями:

$$J\frac{dY^0}{d\vartheta} = (H_1(\vartheta,\mu) + H_2(\vartheta,\mu))Y^0,\ \ Y^0\Big(-\frac{T(\mu)}{4},\mu\Big) = I_2, \tag{4.3}$$

$$J\frac{dY^1}{d\vartheta}=(H_1(\vartheta,\mu)+H_2(\vartheta,\mu))Y^1+H_2(\vartheta,\mu)Y^0,\ Y^1\Big(-\frac{T(\mu)}{4},\mu\Big)=0, \quad (4.4)$$

$$J\frac{dY^2}{d\vartheta}=(H_1(\vartheta,\mu)+H_2(\vartheta,\mu))Y^2+H_2(\vartheta,\mu)Y^1,\ Y^2\Big(-\frac{T(\mu)}{4},\mu\Big)=0. \quad (4.5)$$

Асимптотическому разложению (4.2) отвечает асимптотическое разложение функции

$$V(z,\mu)=1+V_1(\mu)\tilde z+V_2(\mu)\tilde z^2+o(\tilde z^2),\ z,\tilde z\in\mathbb{C},\ \mu\in[0,\widehat\mu), \quad (4.6)$$

в котором функции V_1 и V_2 определяются формулами

$$V_j(\mu)=\frac{1}{2}(y^j_{12}(0,\mu)-y^j_{21}(0,\mu)),\ j=1,2,\ \mu\in[0,\widehat\mu). \quad (4.7)$$

Здесь использованы обозначения: $Y^j(\vartheta,\mu)=||y^j_{km}(\vartheta,\mu)||^2_1$, $j=0,1,2$, $\vartheta\in[-T(\mu)/4,0]$, $\mu\in[0,\widehat\mu)$.

Лемма 4.3. *Пусть выполнены условия леммы* 4.2. *Тогда имеет место формула*

$$Y^0(0,\mu)=\begin{pmatrix}(-f(0,\mu)/4)\frac{dT(\mu)}{d\mu} & 1+(f(\mu,0)/4)\frac{dT(\mu)}{d\mu}\\ -1+(f(\mu,0)/4)\frac{dT(\mu)}{d\mu} & (f^2(\mu,0)/(4f(0,-\mu)))\frac{dT(\mu)}{d\mu}\end{pmatrix}, \quad (4.8)$$

где $\mu\in[0,\widehat\mu)$.

Доказательство. Запишем систему в вариациях для периодического решения $(x_1(t,\ \mu),\ x_2(t,\mu))^\top$, $t\in\mathbb{R}$, $\mu\in[0,\widehat\mu)$, системы дифференциальных уравнений (2.1)

$$\begin{aligned}\frac{dy_1}{dt}&=\frac{\partial f(x_1(t,\mu),-x_2(t,\mu))}{\partial x_1}y_1-\frac{\partial f(x_1(t,\mu),-x_2(t,\mu))}{\partial x_2}y_2,\\ \frac{dy_2}{dt}&=\frac{\partial f(x_2(t,\mu),x_1(t,\mu))}{\partial x_2}y_1+\frac{\partial f(x_2(t,\mu),x_1(t,\mu))}{\partial x_1}y_2.\end{aligned} \quad (4.9)$$

Система (4.9) имеет два линейно независимых решения

$$(\partial x_1(t,\mu)/\partial t,\ \partial x_1(t,\mu)/\partial t)^\top \ \text{ и } \ (\partial x_1(t,\mu)/\partial\mu,\ \partial x_1(t,\mu)/\partial\mu)^\top,$$

$t\in\mathbb{R}$, $\mu\in[0,\widehat\mu)$. С помощью этих решений строим нормированную фундаментальную матрицу $\widetilde Y$ ($\widetilde Y(0,\mu)=I_2$, $\mu\in[0,\widehat\mu)$) системы (4.9)

$$\widetilde Y(t,\mu)=\begin{pmatrix}(1/f(0,-\mu))\left(\frac{\partial x_1(t,\mu)}{\partial t}-f(\mu,0)\frac{\partial x_1(t,\mu)}{\partial\mu}\right) & \frac{\partial x_1(t,\mu)}{\partial\mu}\\ (1/f(0,-\mu))\left(\frac{\partial x_2(t,\mu)}{\partial t}-f(\mu,0)\frac{\partial x_2(t,\mu)}{\partial\mu}\right) & \frac{\partial x_2(t,\mu)}{\partial\mu}\end{pmatrix}, \quad (4.10)$$

где $t \in \mathbb{R}$, $\mu \in [0, \widehat{\mu})$. Проведя в системе (4.9) замену переменных

$$t = T(\mu)/4 + \vartheta,\ \widetilde{y}_1(\vartheta) = y_1(T(\mu)/4 + \vartheta),\ \widetilde{y}_2(\vartheta) = y_2(T(\mu)/4 + \vartheta),$$

получим систему дифференциальных уравнений

$$\begin{aligned} \frac{d\widetilde{y}_1}{d\vartheta} &= a_1\Big(\frac{T(\mu)}{4} + \vartheta, \mu\Big)\widetilde{y}_1 - a_2\Big(\frac{T(\mu)}{4} + \vartheta, \mu\Big)\widetilde{y}_2, \\ \frac{d\widetilde{y}_2}{d\vartheta} &= a_2\Big(\frac{T(\mu)}{2} + \vartheta, \mu\Big)\widetilde{y}_1 + a_1\Big(\frac{T(\mu)}{2} + \vartheta, \mu\Big)\widetilde{y}_2. \end{aligned} \tag{4.11}$$

Сравнивая систему (4.11) с (3.13) при $z = 1$, находим, что их решения связаны преобразованием $y = J\widetilde{y}$. Фундаментальная матрица системы дифференциальных уравнений (3.13) при $z = 1$ совпадает с матрицей Y^0. Тогда справедлива формула

$$Y^0(\vartheta, \mu) = J\widetilde{Y}\Big(\frac{T(\mu)}{4} + \vartheta, \mu\Big)J^{\top},\ \vartheta \in \Big[-\frac{T(\mu)}{4}, 0\Big],\ \mu \in [0, \widehat{\mu}).$$

Отсюда находим

$$Y^0(0, \mu) = \begin{pmatrix} \widetilde{y}_{22}(T(\mu)/4, \mu) & -\widetilde{y}_{21}(T(\mu)/4, \mu) \\ -\widetilde{y}_{12}(T(\mu)/4, \mu) & \widetilde{y}_{11}(T(\mu)/4, \mu) \end{pmatrix},$$

где $\widetilde{Y}(t, \mu) = ||\widetilde{y}_{km}(t, \mu)||_1^2$, $t \in \mathbb{R}$, $\mu \in [0, \widehat{\mu})$. Учитывая формулы

$$\frac{\partial x_1(t, \mu)}{\partial t}\Big|_{t=T(\mu)/4} = f(\mu, 0),\ \frac{\partial x_2(t, \mu)}{\partial t}\Big|_{t=T(\mu)/4} = f(0, \mu),$$

$$\frac{\partial x_1(t, \mu)}{\partial \mu}\Big|_{t=T(\mu)/4} = 1 - \frac{1}{4}f(\mu, 0)\frac{dT(\mu)}{d\mu},\ \frac{\partial x_2(t, \mu)}{\partial \mu}\Big|_{t=T(\mu)/4} = -\frac{1}{4}f(0, \mu)\frac{dT(\mu)}{d\mu},$$

имеем

$$\widetilde{y}_{11}\Big(\frac{T(\mu)}{4}, \mu\Big) = \frac{f^2(\mu, 0)}{4f(0, -\mu)}\frac{dT(\mu)}{d\mu},\ \widetilde{y}_{12}\Big(\frac{T(\mu)}{4}, \mu\Big) = 1 - \frac{1}{4}f(\mu, 0)\frac{T(\mu)}{d\mu},$$

$$\widetilde{y}_{21}\Big(\frac{T(\mu)}{4}, \mu\Big) = -1 - \frac{1}{4}f(\mu, 0)\frac{T(\mu)}{d\mu},\ \widetilde{y}_{22}\Big(\frac{T(\mu)}{4}, \mu\Big) = -\frac{1}{4}f(0, \mu)\frac{dT(\mu)}{d\mu},\ \mu \in [0, \mu),$$

и завершаем доказательство леммы.

Значения параметра $\mu \in [0, \widehat{\mu})$, удовлетворяющие уравнению (4.1), будем называть бифуркационными.

Лемма 4.4. *Пусть выполнены условия леммы* 4.2. *Тогда бифуркационные значения параметра* $\mu \in [0, \widehat{\mu})$ *и только они удовлетворяют уравнению*

$$\frac{dT(\mu)}{d\mu} = 0,\ \mu \in [0, \widehat{\mu}). \tag{4.12}$$

Доказательство. Находим решение матричного уравнения (4.4)

$$Y^1(\vartheta,\mu)=\int_{-T(\mu)/4}^{\vartheta} Y^0(\vartheta,\mu)(Y^0(s,\mu))^{-1}J^\top H_2(s,\mu)Y^0(s,\mu)ds,$$

где $\vartheta\in[-T(\mu)/4,0]$, $\mu\in[0,\widehat{\mu})$. Используя свойство фундаментальной матрицы канонической системы [12, с. 103]

$$Y^{0\top}(s,\mu)JY^0(s,\mu)=J,\ s\in\Big[-\frac{T(\mu)}{4},0\Big],\ \mu\in[0,\widehat{\mu}),$$

имеем

$$Y^1(\vartheta,\mu)=Y^0(\vartheta,\mu)J^\top\int_{-T(\mu)/4}^{\vartheta} Y^{0\top}(s,\mu)H_2(s,\mu)Y^0(s,\mu)ds, \tag{4.13}$$

где $\vartheta\in[-T(\mu)/4,0]$, $\mu\in[0,\widehat{\mu})$. Из (4.13) находим $Y^1(0,\mu)=Y^0(0,\mu)J^\top D(\mu)$, $\mu\in[0,\widehat{\mu})$, где значения матричной функции D являются симметрическими определенно положительными матрицами. Учитывая (4.6)–(4.8) и представление $D(\mu)=||d_{km}||_1^2$, $\mu\in[0,\widehat{\mu})$, находим

$$\frac{\partial V(1,\mu)}{\partial z}=V_1(\mu)=-\frac{1}{8f(0,\mu)}(d_{11}(\mu)f^2(\mu,0)+$$
$$+2d_{12}(\mu)f(\mu,0)f(0,\mu)+d_{22}(\mu)f^2(0,\mu))\frac{dT(\mu)}{d\mu},\ \mu\in[0,\widehat{\mu}). \tag{4.14}$$

Выражение в скобках принимает положительные значения, что завершает доказательство леммы.

Бифуркационное значение параметра $\mu_0\in[0,\widehat{\mu})$ назовем некритическим, если $d^2T(\mu_0)/d\mu^2\neq 0$.

Лемма 4.5. *Пусть выполнены условия леммы* 4.2. *Тогда при возрастании параметра μ в малой окрестности некритического положительного бифуркационного значения μ_0 корень характеристического уравнения* (3.19) *переходит на комплексной плоскости из внешности* (*внутренности*) *единичного круга во внутренность* (*внешность*) *единичного круга через точку $z=1$, если $d^2T(\mu_0)/d\mu^2<0$* (*соответственно если $d^2T(\mu_0)/d\mu^2>0$*).

Доказательство. В малой окрестности точки $z=1$ положим $z=1+\widetilde{z}$ и преобразуем характеристическое уравнение (3.19)

$$D(\widetilde{z},\mu)=(1-2V_1(\mu)-2V_2(\mu))\widetilde{z}-2V_1(\mu)+o(\widetilde{z})=0. \tag{4.15}$$

Достаточным условием разрешимости уравнения (4.15) в окрестности точки $(\widetilde{z},\mu) = (0,\mu_0)$, где μ_0 – некритическое бифуркационное значение параметра, является требование $\partial D(0,\mu_0)/\partial z = 1 - 2V_2(\mu_0) \neq 0$. Покажем, что оно выполняется. Находим решение матричного уравнения (4.5)

$$Y^2(\vartheta,\mu) = Y^0(\vartheta,\mu)J^\top \int_{-T(\mu)/4}^{\vartheta} Y^{0\top}(s,\mu)H_2(s,\mu)Y^1(s,\mu)ds,$$

$\vartheta \in \Big[-\frac{T(\mu)}{4}, 0\Big]$, $\mu \in [0,\widehat{\mu})$. Отсюда, учитывая формулу (4.13), находим

$$Y^2(0,\mu) = Y^0(0,\mu)J^\top K(\mu),\ \mu \in [0,\widehat{\mu}),$$

где

$$K(\mu) = \int_{-T(\mu)/4}^{0} C(s,\mu)J^\top \int_{-T(\mu)/4}^{0} C(s_1,\mu)ds_1 ds,$$
$$C(s,\mu) = Y^{0\top}(s,\mu)H_2(s,\mu)Y^0(s,\mu),\ \ s \in [-T(\mu)/4, 0],\ \ \mu \in [0,\widehat{\mu}).$$

Значения матричной функции C – симметрические определенно положительные матрицы. Учитывая (4.7) и вводя представление $K(\mu) = ||k_{ij}(\mu)||_1^2$, $\mu \in [0,\widehat{\mu})$, имеем

$$\begin{aligned}2V_2(\mu) &= y^0_{11}(0,\mu)k_{11}(\mu) + y^0_{12}(0,\mu)k_{21}(\mu) + \\ &+ y^0_{21}(0,\mu)k_{12}(\mu) + y^0_{22}(0,\mu)k_{22}(\mu),\ \mu \in [0,\widehat{\mu}).\end{aligned}$$

Отсюда, учитывая представления матриц $Y^0(0,\mu)$, $K(\mu)$ и матрицы $C(s,\mu) = ||c_{km}(s,\mu)||_1^2$, $s \in [-T(\mu)/4, 0]$, $\mu \in [0,\widehat{\mu})$, находим

$$\begin{aligned}2V_2(\mu_0) = k_{21}(\mu_0) - k_{12}(\mu_0) = &-\int_{-T(\mu_0)/4}^{0} c_{22}(s,\mu_0)\int_{-T(\mu_0)/4}^{s} c_{11}(s_1,\mu_0)ds_1 ds + \\ &+ 2\int_{-T(\mu_0)/4}^{0} c_{12}(s,\mu_0)\int_{-T(\mu_0)/4}^{s} c_{12}(s_1,\mu_0)ds_1 ds - \int_{-T(\mu_0)/4}^{0} c_{11}(s,\mu_0)\times \\ &\times \int_{-T(\mu_0)/4}^{s} c_{22}(s_1,\mu_0)ds_1 ds = \int_{-T(\mu_0)/4}^{0} \frac{d}{ds}\Big(\Big(\int_{-T(\mu_0)/4}^{s} c_{12}(s_1,\mu_0)ds_1\Big)^2 - \\ &- \int_{-T(\mu_0)/4}^{s} c_{11}(s_1,\mu_0)ds_1 \int_{-T(\mu_0)/4}^{s} c_{22}(s_1,\mu_0)ds_1\Big)ds = \\ &= \Big(\int_{-T(\mu_0)/4}^{0} c_{12}(s_1,\mu_0)ds_1\Big)^2 - \int_{-T(\mu_0)/4}^{0} c_{11}(s_1,\mu_0)ds_1 \int_{-T(\mu_0)/4}^{0} c_{22}(s_1,\mu_0)ds_1.\end{aligned}$$

Из определенной положительности матрицы $\int_{-T(\mu_0)/4}^{0} C(s_1, \mu_0)ds_1$ следует, что $\partial D(0,\, \mu_0)/\partial z = 1 - 2V_2(\mu_0) > 0$.

Решение уравнения (4.15) определяется асимптотической формулой

$$\widetilde{z} = \frac{2\widetilde{\mu}}{1 - 2V_2(\mu_0)} \frac{dV_1(\mu_0)}{d\mu} + o(\widetilde{\mu}).$$

При возрастании μ корень характеристического уравнения переходит на комплексной плоскости из внешности единичного круга во внутренность единичного круга (из внутренности единичного круга во внешность единичного круга) через точку $z = 1$, если $dV_1(\mu_0)/d\mu < 0$ (соответственно если $dV_1(\mu_0)/d\mu < 0$). Учитывая формулу (4.14), находим

$$\frac{dV_1(\mu_0)}{d\mu} = -\frac{1}{8f(0,\mu_0)}(d_{11}(\mu_0)f^2(0,\mu_0) + 2d_{12}(\mu_0)f(\mu_0,0)f(0,\mu_0) + \\ + d_{22}(\mu_0)f^2(0,\mu_0))\frac{d^2T(\mu_0)}{d\mu^2}.$$

Из (3.18) следует, что $f(0, \mu_0) < 0$. Выражение в скобках положительно и знак производной $dV_1(\mu_0)/d\mu$ совпадает со знаком производной $d^2T(\mu_0)/d\mu^2$.

Теорема 4.1. *Пусть выполнены условия леммы* 4.2 *и все бифуркационные значения параметра некритические. Тогда для значения параметра* $\widetilde{\mu} \in (0, \widehat{\mu})$*, отличного от бифуркационного, в области* $\{z : |z| < 1,\, z \in \mathbb{C}\}$ *нет корней* (*имеется два корня*) *характеристического уравнения* (3.19)*, если* $dT(\widetilde{\mu})/d\mu > > 0$ (*соответственно если* $dT(\widetilde{\mu})/d\mu < 0$)*.*

Доказательство. Рассмотрим для определенности случай $d^2T(0)/d\mu^2 > 0$. Обозначим через μ_0^1 наименьшее положительное бифуркационное значение параметра. Если положительных бифуркационных значений нет, то $\mu_0^1 = \widetilde{\mu}$. Тогда, используя результаты теоремы 2.2, получим

$$dT(\mu)/d\mu = (d^2T(0)/d\mu^2)\mu + o(\mu) > 0$$

для $\mu \in (0, \mu_0^1)$. При этих значениях параметра, согласно лемме 4.4, не происходит изменения количества корней характеристического уравнения (3.19) внутри единичного круга. Из леммы 4.1 следует, что при малых значениях μ внутри единичного круга отсутствуют корни характеристического уравнения. Тогда их нет внутри единичного круга для любого $0 < \mu < \mu_0^1$. Следовательно, теорема доказана, если $0 < \widetilde{\mu} < \mu_0^1$. Если процесс продолжается, то имеем $d^2T(\mu_0^1)/d\mu^2 < 0$ и на следующем интервале (μ_0^1, μ_0^2) производная $dT(\mu)/d\mu < 0$. Здесь μ_0^2 – наименьшее превосходящее μ_0^1 бифуркационное значение или $\widetilde{\mu}$. Согласно лемме 4.5 при переходе μ через μ_0^1 внутрь единичного круга заходят два корня характеристического уравнения и их количество там не меняется при $\mu_0^1 < \mu < \mu_0^2$. Если $\widetilde{\mu} \in (\mu_0^1, \mu_0^2)$, то теорема доказана. Если процесс продолжается, то имеем $d^2T(\mu_0^2)/d\mu^2 > 0$ и на следующем интервале (μ_0^2, μ_0^3) производная $dT(\mu)/d\mu > 0$. Здесь μ_0^3 – наименьшее превосходящее μ_0^2 бифуркационное значение или $\widetilde{\mu}$. Согласно лемме 4.5 при переходе μ через μ_0^2 два корня характеристического уравнения из внутренней области единичного круга переходят во внешнюю область. Тогда при $\mu_0^2 < \mu < \mu_0^3$ во внутренней области единичного круга отсутствуют корни характеристического уравнения. Если $\widetilde{\mu} \in (\mu_0^2, \mu_0^3)$, то теорема доказана. В противном случае необходимо повторить рассуждения. Случай $d^2T(0)/d\mu^2 < 0$ анализируется аналогично.

5. Устойчивость периодических решений

Полученные в разд. 4 результаты используем для нахождения условий устойчивости построенного в разд. 2 антисимметрического периодического решения x_* дифференциального уравнения с запаздыванием (1.1).

Теорема 5.1. *Пусть четная по первому и нечетная по второму аргументу функция f трижды непрерывно дифференцируема в области $(-a_1, a_1) \times \times (-a_2, a_2)$, ее производная $\partial f(x_1, x_2)/\partial x_2$ отрицательна в указанной области, выполняется условие* (2.3)*, все бифуркационные значения параметра являются некритическими и корни μ_* уравнения* (2.8) *не являются бифуркационными значениями параметра. Тогда периодическое решение дифференциального уравнения с запаздыванием* (1.1)*, отвечающее корню μ_*, устойчиво, если $dT(\mu_*)/d\mu > 0$, и неустойчиво, если $dT(\mu_*)/d\mu < 0$.*

Доказательство. Если $dT(\mu_*)/d\mu < 0$, то, согласно теореме 4.1, при $\mu = \mu_*$ два корня характеристического уравнения (3.19) по модулю меньше единицы. Следовательно, оператор монодромии дифференциального уравнения с запаздыванием (3.2) имеет собственное число ρ по модулю больше единицы. По теореме о неустойчивости [7] нулевого решения дифференциального уравнения с запаздыванием (3.1) периодическое решение x_* неустойчиво. Если $dT(\mu_*)/d\mu > 0$, то, согласно теореме 4.1, при $\mu = \mu_*$ характеристическое уравнение (3.19) имеет два корня $z = \pm 1$, остальные корни этого уравнения имеют модули больше единицы. Следовательно, оператор монодромии дифференциального уравнения с запаздыванием (3.2) имеет собственное число $\rho = -1$, остальные собственные числа этого оператора имеют модули меньше единицы. Покажем, что собственное число $\rho = -1$ простое. Используя характеристическое уравнение (3.19), запишем уравнение, определяющее ненулевое собственное число оператора монодромии при $\mu = \mu_*$

$$\widetilde{D}(\rho) = \rho^{-2} - 2\sqrt{-\rho^{-1}}V(\sqrt{-\rho^{-1}}, \mu_*) + 1, \ \rho \neq 0, \ \rho \in \mathbb{C}.$$

Учитывая нечетность функции V по первому аргументу, для функции $\sqrt{-\rho^{-1}}$, $\rho \neq 0$, $\rho \in \mathbb{C}$, полагаем $\sqrt{-\rho^{-1}} = 1$ при $\rho = -1$. Находим $d\widetilde{D}(-1)/d\rho = -dV(1,\mu_*)/dz \neq 0$, так как μ_* не является бифуркационным значением параметра. Выполнены условия аналога теоремы Андронова–Витта для систем с последействием [13, с. 233]. Поэтому периодическое решение x_* устойчиво.

Литература

1. Kaplan J. L., Yorke J. A. Ordinary differential equations which yield periodic solutions of differential delay equations // J. Math. Anal. and Appl. 1974. Vol. 48, № 2. P. 317–324.
2. Dormayer P. Smooth bifurcation of symmetric periodic solutions of functional differential equations // Nonlinear Analysis, Methods and Applications. 1990. Vol. 14, № 8. P. 701–715.
3. Долгий Ю. Ф., Николаев С. Г. Устойчивость периодического решения нелинейного дифференциального уравнения с запаздыванием // Дифференц. уравнения. 2001. Т. 37, № 5. С. 592–600.
4. Dormayer P., Ivanov A.F., Lani-Vayda B. Floquet multipliers of symmetric rapidly oscillating solutions of differential delay equations // Tohoku Math. J. 2002. Vol. 54, № 3. P. 419–441.
5. Малкин И. Г. Некоторые задачи теории нелинейных колебаний. М.: ГИТТЛ, 1956.
6. Эльсгольц Л. Э., Норкин С. Б. Введение в теорию дифференциальных уравнений с отклоняющимся аргументом. М.: Наука, 1971.
7. Шиманов С. Н. Об устойчивости квазигармонических систем с запаздыванием // Прикладная математика и механика. 1961. Т. 25, вып. 6. С. 992–1002.
8. Шиманов С. Н. О почти периодических решениях неоднородных линейных дифференциальных уравнений с запаздыванием // Изв. вузов. Математика. 1958. № 4. С. 270–274.
9. Красовский Н. Н. Некоторые задачи теории устойчивости движения. М.: Физматгиз, 1959.
10. Шиманов С. Н. К теории линейных дифференциальных уравнений с периодическими коэффициентами и запаздыванием времени // Прикладная математика и механика. 1963. Т. 27, вып. 3. С. 450–458.
11. Долгий Ю. Ф. Устойчивость периодических дифференциально-разностных уравнений. Екатеринбург: УрГУ, 1996.
12. Якубович В. А., Старжинский В. М. Линейные дифференциальные уравнения с периодическими коэффициентами и их приложения. М.: Наука, 1972.
13. Хейл Дж. Теория функционально-дифференциальных уравнений. М.: Мир, 1984.

Статья поступила 12.05.2003 г.
Окончательный вариант 28.04.2004 г.