УДК 512.552

Г. В. Танана

О e-МНОГООБРАЗИЯХ ПРИСОЕДИНЕННО ВПОЛНЕ РЕГУЛЯРНЫХ КОЛЕЦ*

Слово «кольцо» в данной работе всегда означает ассоциативное кольцо.

Понятие регулярного кольца было введено фон Нейманом [1] в 1936 г. Напомним, что кольцо R называется *регулярным*, если для любого $a \in R$ найдется такой элемент $b \in R$, что $aba = a$. Так как определение регулярности использует только умножение, оно приложимо не только к кольцам, но и к полугруппам. Изучение регулярных полугрупп составляет одно из основных направлений современной теории полугрупп (см., например, монографии [2, 3]). Напомним определения некоторых важных типов регулярных полугрупп, которые играют основную роль в данной работе. Регулярная полугруппа S называется *ортодоксальной*, если множество $E(S)$ всех ее идемпотентов образует подполугруппу; *инверсной*, если $E(S)$ – коммутативная подполугруппа, и *правоинверсной* (*левоинверсной*), если подполугруппа $E(S)$ удовлетворяет тождеству $xy = yxy$ (соответственно $xy = xyx$). Полугруппа называется *вполне регулярной* или *объединением групп*, если ее можно представить в виде объединения ее подгрупп.

Весьма плодотворный подход к классификации регулярных полугрупп был предложен в [4] и [5]. Он основан на понятии *e-многообразия*, т. е. класса регулярных полугрупп, замкнутого относительно взятия регулярных подполугрупп, прямых произведений и гомоморфных образов. Отметим, что регулярные полугруппы каждого из перечисленных выше типов составляют e-многообразия. Таким образом, можно говорить о e-многообразии ортодоксальных, о e-многообразии вполне регулярных полугрупп и т. д. Ясно, что e-многообразия образуют полную решетку по включению, и оказалось, что различные взаимосвязи между классами регулярных полугрупп допускают удобную интерпретацию в терминах этой решетки.

Как упомянуто выше, понятие регулярности пришло в теорию полугрупп из теории колец. После того как были выделены упомянутые выше важные классы регулярных полугрупп, естественно было попытаться приложить соответствующие условия к кольцам. Однако довольно быстро выяснилось, что

*Работа выполнена при поддержке межвузовской научной программы «Университеты России» (проект № 04.01.437) и президентской программы поддержки ведущих научных школ Российской Федерации (проект НШ-2227.2003.1).

для мультипликативных полугрупп колец все эти условия оказываются эквивалентными весьма сильному условию строгой регулярности (см. [6, 7]). (Напомним, что кольцо R называется *строго регулярным*, если $a \in a^2R$ для всех $a \in R$.)

Больше возможностей возникает, если накладывать ограничения типа регулярности на присоединенную полугруппу кольца. Напомним, что в любом кольце $\langle R, +, \cdot\rangle$ можно определить *присоединенное умножение* $\circ$ по правилу $a \circ b = a + b - ab$ для любых $a, b \in R$. Легко проверяется, что присоединенное умножение ассоциативно, и таким образом кольцу $\langle R, +, \cdot\rangle$ сопоставляется его *присоединенная полугруппа* $\langle R, \circ\rangle$. Если Θ – некоторое свойство полугрупп, то будем называть *присоединенно* Θ*-кольцом* кольцо, присоединенная полугруппа которого обладает свойством Θ. Именно в таком смысле мы будем говорить о присоединенно регулярных, присоединенно ортодоксальных, присоединенно инверсных кольцах и т. п. Отметим, что класс присоединенно регулярных колец уже весьма обширен. Он включает, например, как все регулярные кольца (см. [8, 9]), так и все кольца, радикальные в смысле Джекобсона.

Можно дать определение e-многообразия присоединенно регулярных колец, аналогичное понятию e-многообразия регулярных полугрупп. А именно, *e-многообразием присоединенно регулярных колец* называется класс присоединенно регулярных колец, замкнутый относительно взятия присоединенно регулярных подколец, прямых произведений и гомоморфных образов. Легко понять, что если $\mathbf{V}$ – e-многообразие регулярных полугрупп, то класс всех колец, присоединенные полугруппы которых лежат в $\mathbf{V}$, образует e-многообразие присоединенно регулярных колец.

В серии работ Ду Ксиянкуна [8,10,11] исследован ряд e-многообразий присоединенно регулярных колец и установлены связи между ними. Например, показано, что присоединенно ортодоксальные кольца являются присоединенно вполне регулярными (см. [11, теорема 14]), а обратное, вообще говоря, не верно (см. [11, пример 16]). Кроме того, изучено строение присоединенно ортодоксальных и присоединенно правоинверсных колец. Для формулировки соответствующих результатов введем два обозначения, которые будут использованы и в доказательстве нашей основной теоремы. А именно, для кольца R через $\mathcal{I}(R)$ обозначим идеал в R, порожденный всеми идемпотентами кольца R, а через $\mathcal{J}(R)$ – радикал Джекобсона кольца R.

Предложение 1. *Пусть R – кольцо, $I = \mathcal{I}(R)$, $K = \mathcal{J}(I)$.*

а) [11, теорема 14] *Для того чтобы кольцо R было присоединенно ортодоксальным, необходимо и достаточно, чтобы фактор-кольцо R/I было радикальным, фактор-кольцо I/K – строго регулярным и $IKI = KIK = 0$.*

б) [11, теорема 19] *Для того чтобы кольцо R было присоединенно правоинверсным, необходимо и достаточно, чтобы фактор-кольцо R/I было радикальным, фактор-кольцо I/K – строго регулярным и $IK = 0$.*

Нам представляется перспективным подход к классификации e-многообразий присоединенно регулярных колец в терминах решетки, которую они образуют относительно включения классов. (В этой решетке операция пересечения совпадает с их теоретико-множественным пересечением, а объединением $\mathbf{A}\vee\mathbf{B}$ двух e-многообразий $\mathbf{A}$ и $\mathbf{B}$ является наименьшее e-многообразие, содержащее как $\mathbf{A}$, так и $\mathbf{B}$.) В частности, основной результат данной статьи показывает, что структурные результаты Ду Ксиянкуна допускают очень прозрачную теоретико-решеточную интерпретацию.

Теорема. *Пусть $\mathbf{O}$ – e-многообразие присоединенно ортодоксальных колец, $\mathbf{LI}$ – e-многообразие присоединенно левоинверсных колец и $\mathbf{RI}$ – e-многообразие присоединенно правоинверсных колец. Тогда $\mathbf{O} = \mathbf{LI} \vee \mathbf{RI}$.*

Доказательство. Так как e-многообразие $\mathbf{O}$, очевидно, содержит каждое из многообразий $\mathbf{LI}$ и $\mathbf{RI}$, оно содержит и их решеточное объединение.

Обратно, пусть R – присоединенно ортодоксальное кольцо. Покажем, что R есть подпрямое произведение некоторых присоединенно правоинверсного и присоединенно левоинверсного колец. Отсюда сразу будет следовать, что $\mathbf{O}$ содержится в $\mathbf{LI} \vee \mathbf{RI}$. Чтобы доказать это, необходимо и достаточно указать в R два идеала A и B такие, что $A \cap B = 0$ и R/A – присоединенно правоинверсное, а R/B – присоединенно левоинверсное кольцо.

Пусть $I = \mathcal{I}(R)$, а $K = \mathcal{J}(I)$. Возьмем в качестве A и B идеалы IK и KI соответственно. Введем следующие обозначения для фактор-колец по идеалу IK: пусть $\overline{R} = R/A = R/IK$, $\overline{I} = I/IK$, $\overline{K} = K/IK$. Тогда справедливы следующие утверждения.

Лемма 1. $\overline{I} = \mathcal{I}(\overline{R})$.

Доказательство. Пусть $N = \mathcal{I}(\overline{R})$. Так как образ идемпотента при каноническом гомоморфизме $\varphi : R \to \overline{R}$ является идемпотентом, то $\overline{I} \subseteq N$. Обратно, пусть $\overline{x} \in N$, тогда $\overline{x} = \sum_\gamma \overline{\ell}_\gamma \overline{e}_\gamma \overline{r}_\gamma$, где $\overline{\ell}_\gamma, \overline{e}_\gamma, \overline{r}_\gamma \in \overline{R}$ и $\overline{e}_\gamma = \overline{e}_\gamma^2$. Гомоморфизм φ является также гомоморфизмом присоединенной полугруппы $\langle R, \circ\rangle$ на $\langle\overline{R}, \circ\rangle$. Очевидно, что полугруппы $\langle R, \circ\rangle$ и $\langle R, \cdot\rangle$ (соответственно $\langle\overline{R}, \circ\rangle$ и $\langle\overline{R}, \cdot\rangle$) имеют одни и те же идемпотенты. По лемме Лаллемана (см. [12]) прообраз любого идемпотента при гомоморфизме одной регулярной полугруппы на другую всегда содержит идемпотент. Поэтому для каждого γ в R есть такой идемпотент e_γ, что $\varphi(e_\gamma) = \overline{e}_\gamma$. Возьмем еще произвольные прообразы ℓ_γ и r_γ для элементов $\overline{\ell}_\gamma$ и $\overline{r}_\gamma$ соответственно. Тогда элемент $x = \sum_\gamma \ell_\gamma e_\gamma r_\gamma$ принадлежит идеалу I, а потому $\overline{x} = \varphi(x) \in \overline{I}$. Отсюда $N \subseteq \overline{I}$.

Лемма 2. $\overline{K} = \mathcal{J}(\overline{I})$.

Доказательство. Пусть $J = \mathcal{J}(\overline{I})$. Так как J – наибольший радикальный идеал в $\overline{I}$, то $\overline{K} \subseteq J$. Обратно, кольцо $\overline{I}/\overline{K} = {}^{I/IK}\big/_{K/IK} \simeq I/K$ является строго регулярным, в частности полупростым в смысле Джекобсона. Поэтому $J \subseteq \overline{K}$, так как J – наименьший идеал в $\overline{I}$, фактор по которому полупрост.

Согласно леммам 1 и 2 фактор-кольцо кольца $\overline{R}$ по идеалу, порожденному его идемпотентами, есть $\overline{R}/\overline{I} \simeq R/I$, а фактор-кольцо идеала, порожденного идемпотентами, по его радикалу есть $\overline{I}/\overline{K} \simeq I/K$. По п. «а» предложения 1 первое из них является радикальным, а второе, как уже отмечалось, строго регулярным. Наконец, $\overline{I}\overline{K} = \overline{IK} = IK/IK = 0$, и, согласно п. «б» предложения 1, кольцо $\overline{R} = R/A$ оказывается присоединенно правоинверсным. Аналогично, кольцо $R/B = R/KI$ будет присоединенно левоинверсным. Осталось проверить, что $IK \cap KI = 0$.

Возьмем произвольный элемент a из пересечения $IK \cap KI = 0$. Поскольку элемент a принадлежит идеалу IK, он может быть представлен в виде суммы произведений вида $i_\alpha k_\alpha$, где $i_\alpha \in I$, $k_\alpha \in K$. С другой стороны, элемент a равен сумме произведений вида $k_\beta i_\beta$. Покажем, что элемент с такими свойствами равен нулю. Имеем

$$\sum_\alpha i_\alpha k_\alpha = \sum_\beta k_\beta i_\beta. \tag{1}$$

Произвольный элемент $i \in I$ представим в виде $i = \sum_\gamma \ell_\gamma e_\gamma r_\gamma$, где $\ell_\gamma, r_\gamma \in R$, $e_\gamma = e_\gamma^2$. Учтем это и перепишем равенство (1) следующим образом:

$$\sum_\alpha \ell_\alpha e_\alpha k'_\alpha = \sum_\beta k'_\beta e_\beta r_\beta. \tag{2}$$

Заметим, что разность $e_\beta r_\beta - r_\beta e_\beta$ принадлежит радикалу K идеала I. Действительно, хорошо известно, что в строго регулярном кольце идемпотенты лежат в центре, и потому, согласно предложению 1, идемпотенты перестановочны со всеми элементами идеала I по модулю радикала K. Отсюда имеем $e_\beta r_\beta = e_\beta e_\beta r_\beta = e_\beta r_\beta e_\beta + k_\beta^{(1)}$ и $r_\beta e_\beta = r_\beta e_\beta e_\beta = e_\beta r_\beta e_\beta + k_\beta^{(2)}$, где $k_\beta^{(1)}, k_\beta^{(2)} \in K$. Вычитая второе равенство из первого, получаем $e_\beta r_\beta - r_\beta e_\beta = \tilde{k}_\beta \in K$.

Таким образом, $k'_\beta e_\beta r_\beta = k'_\beta e_\beta e_\beta r_\beta = k'_\beta e_\beta r_\beta e_\beta + k'_\beta e_\beta \tilde{k}_\beta$. Так как произведение $k'_\beta e_\beta r_\beta$ принадлежит K, первое слагаемое можно записать в виде $k''_\beta e_\beta$, а второе слагаемое равно нулю в силу условия $KIK = 0$. Проделывая аналогичные преобразования со слагаемыми в левой части равенства (2), преобразуем его к виду

$$\sum_\alpha e_\alpha k''_\alpha = \sum_\beta k''_\beta e_\beta. \tag{3}$$

Индукцией по числу слагаемых в правой части равенства (3) покажем, что в R существует идемпотент g, являющийся правой единицей для всех слагаемых $k'_\beta e_\beta$. База индукции очевидна, так как для одного слагаемого $k''_\beta e_\beta$ нужным идемпотентом будет e_β. Пусть теперь f – идемпотент, являющийся правой единицей для всех, кроме одного, слагаемых вида $k''_\beta e_\beta$. Возьмем слагаемое $k''_\delta e_\delta$, для которого f не является правой единицей, и рассмотрим элемент $g = e_\delta \circ f$. Так как кольцо R присоединенно ортодоксально, g является идемпотентом. Очевидно, $e_\delta g = e_\delta(e_\delta + f - e_\delta f) = e_\delta + e_\delta f - e_\delta f = e_\delta$, т. е. g – правая единица для e_δ. С другой стороны,

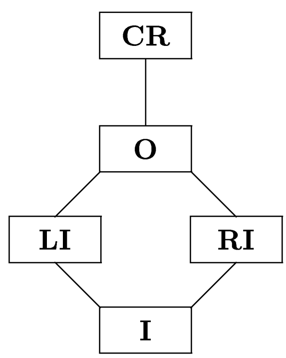
$$fg = f(e_\delta + f - e_\delta f) = fe_\delta + f - fe_\delta f = fe_\delta + f - fe_\delta + f(fe_\delta - e_\delta f) = f + fk,$$

где k – элемент идеала K. Поэтому идемпотент g является правой единицей для левого идеала Kf (действительно, $Kfg = Kf + Kfk = Kf$), а значит, и для всех слагаемых вида $k''_\beta e_\beta$, для которых f служил правой единицей.

Умножим равенство (3) справа на g:

$$\sum_\alpha e_\alpha k''_\alpha g = \sum_\beta k''_\beta e_\beta g.$$

Левая часть равенства равна нулю в силу условия $IKI = 0$, а правая часть равенства не изменится, поскольку g – правая единица для всех $k''_\beta e_\beta$. Отсюда элемент a равен нулю и требуемое доказано.



Фрагмент решетки e-многообразий присоединенно вполне регулярных колец

С учетом нашей теоремы и обсуждавшихся выше результатов Ду Ксиянкуна в решетке e-многообразий присоединенно вполне регулярных колец можно выделить фрагмент, представленный на рисунке. На рисунке, кроме введенных ранее, использованы следующие обозначения: $\mathbf{I}$ – e-многообразие присоединенно инверсных колец, $\mathbf{CR}$ – e-многообразие присоединенно вполне регулярных колец.

Отметим, что полугрупповой аналог теоремы не имеет места: e-многообразие ортодоксальных полугрупп не является решеточным объединением e-многообразий левоинверсных и правоинверсных полугрупп.

Литература

1. Neumann J. On regular rings // Proc. Nat. Acad. Sci. 1936. Vol. 22. P. 707–713.
2. Petrich M. Inverse semigroups. N. Y.: John Wiley & Sons, 1984.
3. Petrich M., Reilly N. R. Completely regular semigroups. N. Y.: John Wiley & Sons, 1999.
4. Hall T. E. Identities for existence varieties of regular semigroups // Bull. Austral. Math. Soc. 1989. Vol. 40, № 1. P. 59–77.
5. Kadourek J., Szendrei M. B. A new approach in the theory of orthodox semigroups // Semigroup Forum. 1990. Vol. 40, № 3. P. 257–296.
6. Zeleznikow J. Orthodox semirings and rings // J. Austral. Math. Soc. Ser. A. 1980. Vol. 30, № 1. P. 50–54.
7. Loyola J. O. E-free objects in e-varieties of inverse rings // Semigroup Forum. 1997. Vol. 54, № 3. P. 375–380.
8. Du Xiankun. The structure of generalized radical rings // Northeast. Math. J. 1988. Vol. 4, № 1. P. 101–114.
9. Heatherly H. E., Tucci R. P. Adjoint regular rings // Int. J. Math. Math. Sci. 2002. Vol. 30, № 8. P. 459–466.
10. Du Xiankun. The rings with regular adjoint semigroups // Notheast. Math. J. 1988. Vol. 4, №4. P. 483–488.
11. Du Xiankun. The adjoint semigroup of a ring // Comm. Algebra. 2002. Vol.30, № 9. P. 4507–4525.
12. Lallement G. Congruences et équivalences de Green sur un demigroupe régulier // C. R. Acad. Sci. Paris. Sér. A. 1966. T. 262. P. 613–616.

Статья поступила 11.04.2005 г.