УДК 517.518.8

Е. М. Скориков

ПРИБЛИЖЕНИЕ НЕПРЕРЫВНЫХ ФУНКЦИЙ МОДУЛЯМИ ПОЛИНОМОВ

1. Введение

Теория приближения индивидуальных функций берет начало со знаменитых работ П. Л. Чебышева второй половины XIX в. Пусть $\mathcal{P}_n$ есть множество алгебраических полиномов с вещественными коэффициентами, степени, не превосходящей n; $C[a,b]$ – пространство непрерывных функций с нормой

$$\|f\| = \|f\|_{C[a,b]} = \max_{x\in[a,b]} |f(x)|.$$

П. Л. Чебышев [1] рассмотрел задачу о приближении непрерывной на отрезке функции многочленами из подпространства $\mathcal{P}_n$ в пространстве $C[a,b]$ и охарактеризовал полином, доставляющий $E_n(f) = \inf_{P\in\mathcal{P}_n} \|f - P\|_{C[a,b]}$. Для этого он ввел понятие альтернанса. Пусть $\|f - P\| = \Delta$; точки $x_1 < \cdots < x_k$ из $[a,b]$ называются точками альтернанса полинома P для функции f, если существует такое число α, равное 1 или -1, что для любого $j = 1,\ldots,k$ выполняются равенства $f(x_j) - P(x_j) = \alpha(-1)^j\Delta$. Используя это понятие, Чебышев доказал следующий критерий: P является полиномом наилучшего приближения функции f тогда и только тогда, когда существует набор из $n+2$ точек альтернанса полинома P для функции f.

В данной работе рассматривается задача о наилучшем приближении неотрицательной непрерывной функции модулями полиномов из множества $\mathcal{P}_n$ в пространстве $C[a,b]$, т. е. делается попытка характеризации полинома, доставляющего $\inf_{P\in\mathcal{P}_n} \|f - |P|\|_{C[a,b]}$. Эта задача возникла из проблемы амплитудно-фазового синтеза антенн в физике. Математическая формулировка предложена Н. И. Черных.

Для описания данной задачи вводится понятие набора точек модуль-альтернанса. На основе этого определения доказываются необходимые условия и достаточные условия на данный полином, чтобы он являлся полиномом наилучшего приближения. Показывается, что сформулированные необходимое условие и достаточное условие являются не улучшаемыми во введенных терминах. Также доказываются результаты, демонстрирующие, что задача приближения неотрицательной функции модулями полиномов существенно отличается от классической задачи приближения функции полиномами.

2. Некоторые свойства задачи

Введем обозначения. Здесь и везде ниже норма понимается как норма в пространстве $C[a,b]$. Через $E_n^*(f) = \inf_{P\in\mathcal{P}_n} \|f - |P|\|$ обозначим величину наилучшего приближения функции f модулями полиномов.

Определение. Для любой неотрицательной функции f множество

$$\mathcal{P}_n^*(f) = \{P^* \in \mathcal{P}_n : \ \|f - |P^*|\| = E_n^*(f)\}$$

будем называть *множеством полиномов наилучшего приближения функции* f модулями полиномов $P \in \mathcal{P}_n$.

Теорема 1. *Для любой неотрицательной функции $f \in C[a,b]$ полином наилучшего приближения существует, т. е. $\mathcal{P}_n^*(f) \neq \varnothing$.*

Доказательство несложно получить из непрерывности отображений взятия модуля и нормы.

Теорема 2. *Пусть для любой точки $x \in [a,b]$ выполняется неравенство $f(x) > E_n^*(f)$. Тогда полином наилучшего приближения единственен с точностью до знака, т. е. $\mathcal{P}_n^*(f) = \{P^*, -P^*\}$. Более того, существует число α, равное 1 или -1, что верна цепочка равенств*

$$\|f - |P^*|\| = \inf_{P\in\mathcal{P}_n} \|f - |P|\| = \inf_{P\in\mathcal{P}_n} \|f - P\| = \|f - \alpha P^*\|.$$

Доказательство становится очевидным, если сделать график.

Заметим, что из неравенства треугольника следует неравенство

$$\||f| - |Q|\| \leqslant \|f - Q\|,$$

где Q – произвольный полином. В силу полноты полиномов в пространстве $C[a,b]$ следует полнота модулей полиномов в метрическом пространстве $\{f \in C[a,b] \ : \ \forall x \in [a,b] \ f(x) \geqslant 0\}$ с равномерной метрикой.

3. Теорема о необходимых условиях

Договоримся под обозначением $f \geqslant 0$ понимать, что функция f принадлежит пространству $C[a,b]$, и для любой точки $x \in [a,b]$ верно неравенство $f(x) \geqslant 0$.

Определение. Пусть $f \geqslant 0$, $P_n \in \mathcal{P}_n$ такой, что $\|f - |P|\| = \Delta$. Полином P_n называется *полиномом без особых точек для функции f*, если из того, что y – корень полинома P_n на отрезке $[a, b]$ нечетной кратности, следует, что $f(y) < \Delta$.

Переопределим стандартную функцию $\operatorname{sgn} P_n(x)$ в устранимых точках разрыва (т. е. в корнях полинома $P_n(x)$ четной кратности) по непрерывности. Будем обозначать эту переопределенную функцию так: $\operatorname{Sign} P_n(x)$.

Следующее определение является ключевым.

Определение. Любой упорядоченный набор точек $x_1 < \cdots < x_k$ из $[a, b]$ называется *набором точек модуль-альтернанса*, если

1) никакая точка x_j не является корнем полинома P_n нечетной кратности;

2) существует число α, равное 1 или -1 такое, что для любого $j = 1, \ldots, k$ выполняются равенства $f(x_j) - |P_n(x_j)| = \alpha(-1)^j \Delta \operatorname{Sign} P_n(x_j)$.

Далее вместо термина «точки модуль-альтернанса» используется термин «точки альтернанса» – как более короткий. Точки альтернанса, которые ввел П. Л. Чебышев [1], будем называть точками чебышевского альтернанса.

Теорема 3. *Пусть $f \geqslant 0$, $P_n \in \mathcal{P}_n^*(f)$. Если полином P_n без особых точек, то существует $n + 2$ точки альтернанса полинома P_n.*

Доказательство. Рассмотрим произвольный полином $P_n \in \mathcal{P}_n^*(f)$ без особых точек. Пусть $x_1^* < \ldots < x_m^*$ – все корни полинома P_n из отрезка $[a, b]$ нечетной кратности, тогда, поскольку P_n не имеет особых точек,

$$\forall x_j^* \quad f(x_j^*) < E_n^*(f).$$

Из непрерывности функции f следует, что

$$\exists \gamma > 0 \; \exists \delta_1 > 0 \; \forall j = 1, 2, \ldots, m \; \forall x \in [x_j^* - \delta_1, x_j^* + \delta_1] \quad f(x) < \gamma < E_n^*(f). \tag{1}$$

Так как для любого j выполняется $P_n(x_j^*) - E_n^*(f) = -E_n^*(f) < 0$ и функция $P_n - E_n^*(f)$ непрерывна, то

$$\exists \delta_2 > 0 \; \forall j \; \forall x \in [x_j^* - \delta_2, x_j^* + \delta_2] \quad P_n(x) - E_n^*(f) < 0.$$

Положим $\delta = \min\{\delta_1, \delta_2\}$ и определим функцию

$$g(x) = \begin{cases} \dfrac{|x - x_j^*|}{\delta} f(x), & \text{если} \quad \exists j : \; x \in (x_j^* - \delta, x_j^* + \delta); \\ f(x) & \text{в остальных случаях.} \end{cases} \tag{2}$$

Заметим, что $g \geqslant 0$ на отрезке $[a, b]$.

Из определения функции g нетрудно вывести следующие равенства:

$$\inf_{Q\in\mathcal{P}_n} \|g - |Q|\| = \|g - |P_n|\| = E_n^*(f). \tag{3}$$

Ввиду того что функция g непрерывна по построению и для любого корня y полинома P_n нечетной кратности выполняется равенство $g(y) = 0$, функция $g \operatorname{Sign} P_n$ непрерывна.

Нетрудно заметить, что выполнена цепочка равенств

$$\|g \operatorname{Sign} P_n - P_n\| = \|g - P_n \operatorname{Sign} P_n\| = \|g - |P_n|\| = \inf_{Q\in\mathcal{P}_n} \|g - |Q|\|. \tag{4}$$

По неравенству треугольника для любого полинома $Q \in \mathcal{P}_n$ имеем

$$\|g \operatorname{Sign} P_n - Q\| \geqslant \|\,|g| - |Q|\| = \|g - |Q|\|.$$

Поэтому последний член равенств (4) оценивается так:

$$\inf_{Q\in\mathcal{P}_n} \|g - |Q|\| \leqslant \inf_{Q\in\mathcal{P}_n} \|g \operatorname{Sign} P_n - Q\|.$$

Легко заметить, что $\inf_{Q\in\mathcal{P}_n} \|g \operatorname{Sign} P_n - Q\| \leqslant \|g \operatorname{Sign} P_n - P_n\|$, поэтому равенства (4) оцениваем сверху следующим образом:

$$\begin{aligned} \|g \operatorname{Sign} P_n - P_n\| = \|g - |P_n|\| = \inf_{Q\in\mathcal{P}_n} \|g - |Q|\| \leqslant \\ \leqslant \inf_{Q\in\mathcal{P}_n} \|g \operatorname{Sign} P_n - Q\| \leqslant \|g \operatorname{Sign} P_n - P_n\|. \end{aligned}$$

Цепочка неравенств «замкнулась», поэтому везде вместо неравенств стоят равенства, т. е.

$$\|g \operatorname{Sign} P_n - P_n\| = \|g - |P_n|\| = \inf_{Q\in\mathcal{P}_n} \|g \operatorname{Sign} P_n - Q\| = E_n(g \operatorname{Sign} P_n).$$

Поэтому P_n – полином наилучшего приближения функции $g \operatorname{Sign} P_n$ подпространством $\mathcal{P}_n$, следовательно, по теореме Чебышева [1], существует упорядоченный набор точек чебышевского альтернанса $x_1 < \dots < x_{n+2}$ полинома P_n для функции $g \operatorname{Sign} P_n$, т. е. существует число α, равное 1 или -1, такое, что для любого $j = 1, \dots, n+2$ верно

$$g(x_j) \operatorname{Sign} P_n(x_j) - P_n(x_j) = \alpha(-1)^j E_n(g \operatorname{Sign} P_n).$$

Отсюда с учетом (3) получаем

$$g(x_j) \operatorname{Sign} P_n(x_j) - P_n(x_j) = \alpha(-1)^j E_n^*(f).$$

Умножая это равенство на $\operatorname{Sign} P_n(x_j)$, получаем равенство

$$g(x_j) - |P_n(x_j)| = \alpha(-1)^j E_n^*(f) \operatorname{Sign} P_n(x_j). \tag{5}$$

По построению функции g никакая точка x_k не может принадлежать интервалу вида $(x_j^* - \delta, x_j^* + \delta)$, следовательно,

$$f(x_j) - |P_n(x_j)| = g(x_j) - |P_n(x_j)| = \alpha(-1)^j E_n^*(f) \operatorname{Sign} P_n(x_j).$$

Теорема доказана.

Замечание. Данная теорема легко переносится на случай произвольного компакта на числовой прямой.

Пример 1. Если в теореме не требовать того, чтобы полином P был без особых точек, то точек альтернанса у полинома наилучшего приближения может и не быть.

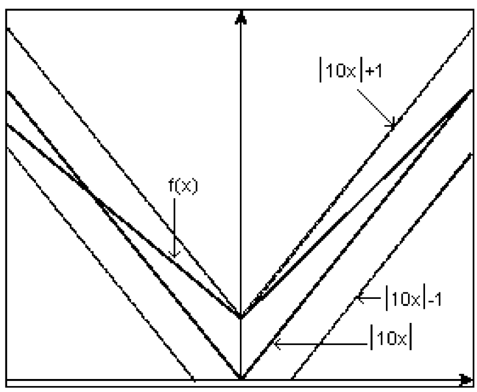

Рис. 1

Возьмем (рис. 1)

$$f(x) = \begin{cases} 1 + 9\,x, & \text{если} \quad x \in [0,1], \\ 1 - 8{,}5\,x & \text{в остальных случаях;} \end{cases} \qquad P(x) = 10\,x; \qquad n = 1.$$

Покажем, что $\inf_{P\in\mathcal{P}_n} \|f - |P|\| = 1$. От противного, пусть существует полином Q такой, что $\|f - |Q|\| < 1$. Если корень y полинома Q лежит в отрезке $[-1,1]$, то, поскольку $|f(y) - |Q(y)|| < 1$, имеем $f(y) < 1$, что неверно по построению. Если корень полинома Q не попал на отрезок $[-1,1]$ или его нет, то функция $\operatorname{Sign} Q$ непрерывна и равна константе β, поэтому $\|f - |Q|\| = \|f - \beta Q\| < 1$. Возьмем полином $P^* \equiv 4$. Заметим, что

$$f(-1) - P^*(-1) = 5{,}5, \qquad f(0) - P^*(0) = -3, \qquad f(1) - P^*(1) = 6.$$

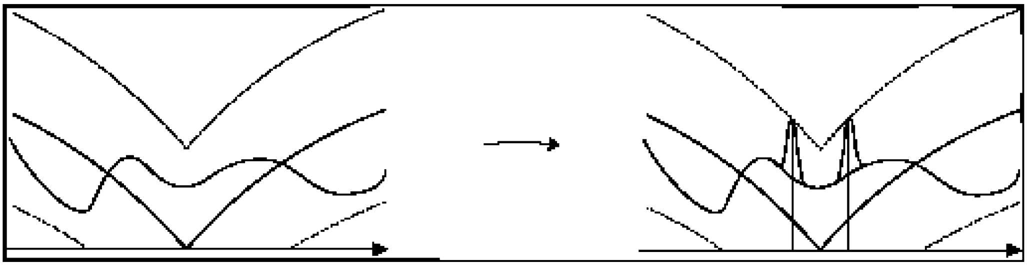

Рис. 2

Поэтому по теореме Валле-Пуссена имеем $\inf\limits_{P\in\mathcal{P}_n} \|f-P\| \geqslant \min\{4{,}5;\ 3;\ 5\} = 3$, что противоречит исходному предположению.

Таким образом, $10\,x \in \mathcal{P}_n^*(f)$. Заметим, что у этого полинома нет ни одной точки альтернанса.

В этом примере разрешается вопрос о единственности полинома наилучшего приближения. Действительно, нетрудно убедиться в том, что полиномы $(10+\varepsilon)x$ при $\varepsilon \in [-0{,}5,\ 0{,}5]$ тоже являются полиномами наилучшего приближения. Таким образом, множество полиномов наилучшего приближения может быть несчетно.

4. Теорема о достаточных условиях

Пусть $f \in C^1[a,b]$, $f \geqslant 0$, $P \in \mathcal{P}_n$, $\|f - |P|\| = \Delta$. Пусть $y \in (a,b)$ – корень полинома P нечетной кратности. Определим преобразование $M^{\delta}_{y,P}[f]$ следующим образом.

Фиксируем точки ξ, η в малой окрестности y. Проделаем преобразование для точки ξ (для точки η аналогично). Возьмем малое число $\gamma > 0$ такое, чтобы отрезок $[\xi-\gamma, \xi+\gamma]$ не содержал y. Построим двухзвенный кубический сплайн по узлам $\xi-\gamma, \xi, \xi+\gamma$ со следующими краевыми условиями: в точках $\xi-\gamma, \xi+\gamma$ он совпадает с f вместе с первой производной, а в точке ξ он совпадает с $|P|\ +\Delta$ вместе с первой производной. За счет малости γ можно добиться того, чтобы измененная функция попала в Δ-окрестность $|P|$.

Геометрическая интерпретация преобразования $M^{\delta}_{y,P}[f]$ состоит в том, что оно изменяет функцию f в δ-окрестности точки y так, как показано на рис. 2, сохраняя при этом непрерывную дифференцируемость функции.

Нетрудно заметить, что есть δ-окрестность точки y, не содержащая точек альтернанса данного набора. Применим преобразование $M^{\delta}_{y,P}[f]$, при этом к данному набору точек альтернанса могут добавиться еще две точки ξ и η и верно равенство $\|f - |P|\| = \|M^{\delta}_{y,P}[f] - |P|\|$.

Лемма 1. *Пусть $f \geqslant 0$ и полиномы $P, Q \in \mathcal{P}_n$ таковы, что $\|f - |P|\| = \Delta$, $\|f - |Q|\| \leqslant \Delta$. Пусть $y \in (a, b)$ – корень полинома P нечетной кратности, $Q(y) > 0$ и выбраны точки альтернанса полинома P. Тогда найдется такое число δ, что применение преобразования $M^{\delta}_{y,P}[f]$ дает функцию g такую, что $\|g - |Q|\| \leqslant \Delta$, и выбранные точки альтернанса полинома P для функции f будут точками альтернанса полинома P для функции g.*

Доказательство становится очевидным, если сделать рисунок.

Определение. Пусть $f \geqslant 0$, $P \in \mathcal{P}_n$, $\|f - |P|\| = \Delta$. Пусть есть некий фиксированный набор точек альтернанса полинома P. Применим преобразование $M^{\delta}_{y,P}[f]$ к каждому корню y нечетной кратности в окрестности, не содержащей точек альтернанса этого набора. Если после этих действий добавится еще m точек альтернанса, то будем говорить, что полином P *дополняем m точками альтернанса* для данного набора точек.

Определение. Пусть $P, Q \in \mathcal{P}_n$. Определим *ранг точки x*:

$$r_{P,Q}(x) = r(x) = \begin{cases} 0, & \text{если } |P(x)| \neq |Q(x)|, \\ 1, & \text{если } |P(x)| = |Q(x)| \neq 0, \\ 2, & \text{если } |P(x)| = |Q(x)| \neq 0,\ |P(x)|' = |Q(x)|' \\ & \qquad \text{или } P(x) = Q(x) = 0. \end{cases}$$

Лемма 2. *Если для полиномов $P, Q \in \mathcal{P}_n$ найдутся m точек $z_1, \dots, z_m$ таких, что $\sum_{j=1}^{m} r(z_j) \geqslant 2n + 1$, то $|P| \equiv |Q|$.*

Доказательство. По определению ранга точки все множество $\{z_1, \dots, z_m\}$ можно представить в виде объединения двух непересекающихся множеств $\{x_1, \dots, x_k\}$ и $\{y_1, \dots, y_w\}$ таких, что для любого $j = 1, \dots, k$ выполняется

$$P(x_j) = Q(x_j) = 0$$

и для любого $j = 1, \dots, w$ выполняется

$$|P(y_j)| = |Q(y_j)| \neq 0.$$

Среди последних есть $\widetilde{w}$ точек $y_1, \dots, y_{\widetilde{w}}$ со свойством $|P(y_j)|' = |Q(y_j)|'$. Тогда из условия леммы имеем $w + \widetilde{w} + 2k \geqslant 2n + 1$.

Зададим множества

$$A = \{x \in [a, b] \,:\, \operatorname{Sign} P(x) = \operatorname{Sign} Q(x)\},$$
$$B = \{x \in [a, b] \,:\, \operatorname{Sign} P(x) = -\operatorname{Sign} Q(x)\}.$$

Нетрудно заметить, что либо на A полином P пересекается с Q в $n+1$ точке (с учетом кратности), либо на B он пересекается с $-Q$ в $n+1$ точке (с учетом кратности). Лемма доказана.

Для доказательства следующей теоремы понадобится техническая лемма.

Лемма 3. *Пусть $f \in C^1[a,b]$, $f \geqslant 0$, полиномы $P, Q \in \mathcal{P}_n$ удовлетворяют условиям $\|f - |P|\| = \Delta$, $\|f - |Q|\| \leqslant \Delta$. Пусть $x \in (a,b)$ – точка альтернанса полинома P для функции f, т. е. существует число α, равное* 1 *или* -1 *такое, что $f(x) - |P(x)| = \alpha\Delta \operatorname{Sign} P(x)$. Если $|P(x)| = |Q(x)|$ и существует число $\delta_0 > 0$ такое, что для любого $\Delta x \in (0, \delta_0)$ верно неравенство*

$$\alpha \operatorname{Sign} P(x+\Delta x)\bigl(f(x+\Delta x) - |Q(x+\Delta x)|\bigr) \geqslant \\ \geqslant \alpha \operatorname{Sign} P(x+\Delta x)\bigl(f(x+\Delta x) - |P(x+\Delta x)|\bigr)$$

(т. е. график функции $\alpha \operatorname{Sign} P(x+\Delta x)|Q(x+\Delta x)|$ лежит ниже графика $\alpha \operatorname{Sign} P(x+\Delta x)|P(x+\Delta x)|$ и касается его в точке x), то $r(x) = 2$.

Доказательство. Так как точка x, как точка альтернанса, отделена от любого корня полинома P нечетной кратности, то существует δ_1-окрестность точки x такая, что знак полинома P в ней не меняется. Следовательно, функция $|P|$ непрерывно дифференцируема в этой окрестности. Положим $\delta = \min\{\delta_0, \delta_1\}$.

Так как функция $f - |P|$ дифференцируема в δ-окрестности точки x и имеет в точке x экстремум, то

$$f'(x) - |P(x)|' = 0. \tag{6}$$

По условию точка x – точка альтернанса, значит,

$$f(x) - |P(x)| = \alpha\Delta \operatorname{Sign} P(x),$$
$$\alpha \operatorname{Sign} P(x)\bigl(f(x) - |P(x)|\bigr) = \Delta. \tag{7}$$

По условию леммы $|P(x)| = |Q(x)|$, поэтому из предыдущего равенства следует, что

$$\alpha \operatorname{Sign} P(x)\bigl(f(x) - |Q(x)|\bigr) = \Delta. \tag{8}$$

Из условия леммы $\|f - |Q|\| \leqslant \Delta$ заключаем, что для любого $\Delta x \in (0, \delta)$ верно

$$\Delta \geqslant f(x+\Delta x) - |Q(x+\Delta x)|,$$
$$\Delta \geqslant \operatorname{Sign} P(x+\Delta x)\bigl(f(x+\Delta x) - |Q(x+\Delta x)|\bigr).$$

По условию

$$\alpha \operatorname{Sign} P(x+\Delta x)\bigl(f(x+\Delta x) - |Q(x+\Delta x)|\bigr) \geqslant \\ \geqslant \alpha \operatorname{Sign} P(x+\Delta x)\bigl(f(x+\Delta x) - |P(x+\Delta x)|\bigr).$$

Объединяя эти две оценки, получаем

$$0 \geqslant \alpha \operatorname{Sign} P(x+\Delta x)\bigl(f(x+\Delta x) - |Q(x+\Delta x)|\bigr) - \Delta \geqslant \\ \geqslant \alpha \operatorname{Sign} P(x+\Delta x)\bigl(f(x+\Delta x) - |P(x+\Delta x)|\bigr) - \Delta.$$

Как уже отмечалось в начале доказательства, $\operatorname{Sign} P(x+\Delta x) = \operatorname{Sign} P(x)$, поэтому неравенства можно переписать так:

$$0 \geqslant \alpha \operatorname{Sign} P(x)\bigl(f(x+\Delta x) - |Q(x+\Delta x)|\bigr) - \Delta \geqslant \\ \geqslant \alpha \operatorname{Sign} P(x)\bigl(f(x+\Delta x) - |P(x+\Delta x)|\bigr) - \Delta.$$

Заменяя Δ с учетом равенств (7) и (8), получаем

$$0 \geqslant \alpha \operatorname{Sign} P(x)\bigl((f(x+\Delta x) - |Q(x+\Delta x)|) - (f(x) - |Q(x)|)\bigr) \geqslant \\ \geqslant \alpha \operatorname{Sign} P(x)\bigl((f(x+\Delta x) - |P(x+\Delta x)|) - (f(x) - |P(x)|)\bigr),$$

$$0 \geqslant \alpha \operatorname{Sign} P(x)\bigl((f(x+\Delta x) - |Q(x+\Delta x)|) - (f(x) - |Q(x)|)\bigr)\frac{1}{\Delta x} \geqslant \\ \geqslant \alpha \operatorname{Sign} P(x)\bigl((f(x+\Delta x) - |P(x+\Delta x)|) - (f(x) - |P(x)|)\bigr)\frac{1}{\Delta x}.$$

Если $Q(x) = 0$, то по условию $P(x) = Q(x) = 0$, а значит $r(x) = 2$. Пусть $Q(x) \neq 0$, тогда функция $|Q|$ дифференцируема в точке x, поэтому в неравенстве можно перейти к пределу при $\Delta x \to 0$.

$$0 \geqslant \alpha \operatorname{Sign} P(x)(f'(x) - |Q(x)|') \geqslant \alpha \operatorname{Sign} P(x)(f'(x) - |P(x)|').$$

Как уже отмечалось в (6), $f'(x) - |P(x)|' = 0$, а значит

$$0 = \alpha \operatorname{Sign} P(x)(f'(x) - |Q(x)|') = \alpha \operatorname{Sign} P(x)(f'(x) - |P(x)|').$$

Поэтому $|P(x)|' = |Q(x)|'$, т. е. $r(x) = 2$. Лемма доказана.

В следующей теореме приводятся достаточные условия на полином наилучшего приближения.

Теорема 4. *Пусть $f \in C^1[a,b]$, $f \geqslant 0$, полином $P \in \mathcal{P}_n$ удовлетворяет условию $\|f - |P|\| = \Delta$ и существует K точек альтернанса P для f. Пусть также полином P дополняем S точками. Если $K + S \geqslant 2n + \ell + 2$, где ℓ – количество корней P нечетной кратности на (a,b), то*

$$P \in \mathcal{P}_n^*(f), \qquad \mathcal{P}_n^*(f) = \{P, -P\}.$$

Доказательство. Пусть $\{y_1, \dots, y_\ell\}$ – все корни полинома P на (a,b) нечетной кратности. Положим $y_0 = a$, $y_{\ell+1} = b$. Возьмем любой полином $Q \in \mathcal{P}_n^*(f)$.

Докажем, что $|P| \equiv |Q|$. Рассмотрим y_k, $k = 1, \dots, \ell$. Возможны два случая:

1) $Q(y_k) = 0$, тогда $r(y_k) = 2$;

2) $|Q(y_k)| > 0$, тогда по лемме 1 можно в достаточно малой окрестности y_k применить преобразование $M^\delta_{y_k,P}[f]$ так, чтобы переопределенная функция f_1 осталась в Δ окрестности $|Q|$. Обозначим f_1 – результат всех преобразований $M^\delta_{y_k,P}[f]$, сделанных в случае 2. Заметим, что к данному набору точек альтернанса для f добавилось S_1 точек альтернанса, причем $S_1 \leqslant S$. Но $\sum_{k=1}^{\ell} r(y_k) + S_1 \geqslant S$, так как в случае 1, не применяя преобразование $M^\delta_{y_k,P}[f]$ к y_k, мы теряем не более двух добавочных точек альтернанса. Таким образом, в силу задания f_1 имеем $\|f_1 - |Q|\| \leqslant \Delta$, поэтому будем далее работать с функцией f_1, обозначая ее просто f.

Рассмотрим отрезок $[y_k, y_{k+1}]$, $k = 0, \dots, \ell$. Пусть $x_1^k < \dots < x_{j_k}^k$ – точки альтернанса полинома P на $[y_k, y_{k+1}]$.

Будем для каждого отрезка $[x_j^k, x_{j+1}^k] =: d_j^k$ искать точку $t \in d_j^k$ такую, что $r(t) > 0$. При этом мы получим, что если $r(t) = 1$, то точка t лежит в интервале (x_j^k, x_{j+1}^k), т. е. «обслуживает» только его. Если же $r(t) = 2$, то t совпадает либо с точкой x_j^k, либо с точкой x_{j+1}^k, тогда точка t «обслуживает» два соседних с ней интервала, при этом других таких точек $(r(\cdot) > 0)$ на этих интервалах может и не быть. То есть ранг говорит о точке, сколько интервалов она «обслуживает». При этом мы получим, что каждый интервал вида (x_j^k, x_{j+1}^k) «обслуживается» какой-то точкой.

Рассмотрим точку x_j^k при $j = 1, \dots, j_k - 1$. По определению точек альтернанса существует число α, равное 1 или -1, что

$$f(x_j^k) - |P(x_j^k)| = \Delta(-1)^j \alpha \operatorname{Sign} P(x_j^k). \tag{9}$$

Тогда, умножая обе части равенства на $(-1)^j \alpha \operatorname{Sign} P(x_j^k)$, получим

$$(-1)^j \alpha \operatorname{Sign} P(x_j^k)(f(x_j^k) - |P(x_j^k)|) = \Delta.$$

А так как $\|f - |Q|\| \leqslant \Delta$, то

$$(-1)^j \alpha \operatorname{Sign} P(x_j^k)(f(x_j^k) - |P(x_j^k)|) = \Delta \geqslant \\ \geqslant (-1)^j \alpha \operatorname{Sign} P(x_j^k)(f(x_j^k) - |Q(x_j^k)|). \quad (10)$$

Следовательно, перенеся все в правую часть, получим

$$(-1)^j \alpha \operatorname{Sign} P(x_j^k)(|P(x_j^k)| - |Q(x_j^k)|) \leqslant 0. \quad (11)$$

Из этого неравенства заменой j на $j+1$ выводим

$$(-1)^{j+1} \alpha \operatorname{Sign} P(x_{j+1}^k)(|P(x_{j+1}^k)| - |Q(x_{j+1}^k)|) \leqslant 0.$$

Умножая на -1, получаем

$$(-1)^j \alpha \operatorname{Sign} P(x_{j+1}^k)(|P(x_{j+1}^k)| - |Q(x_{j+1}^k)|) \geqslant 0.$$

Функция $\operatorname{Sign} P$ равна константе на интервале (y_k, y_{k+1}), поэтому имеем $\operatorname{Sign} P(x_{j+1}^k) = \operatorname{Sign} P(x_j^k)$. С учетом этого

$$(-1)^j \alpha \operatorname{Sign} P(x_j^k)(|P(x_{j+1}^k)| - |Q(x_{j+1}^k)|) \geqslant 0. \quad (12)$$

Так как функция $(-1)^j \alpha \operatorname{Sign} P(x_j^k)(|P(x)| - |Q(x)|)$ непрерывна на $[x_j^k, x_{j+1}^k]$, то из неравенств (11) и (12) следует, что

$$\forall j = 1, 2, \ldots, j_k - 1 \quad \exists t \in [x_j^k, x_{j+1}^k] \quad |Q(t)| = |P(t)|.$$

Возможны следующие три случая:

1) найдется точка $t \in (x_j^k, x_{j+1}^k)$ такая, что $|Q(t)| = |P(t)|$;

2) верно равенство $|Q(x_j^k)| = |P(x_j^k)|$;

3) верно равенство $|Q(x_{j+1}^k)| = |P(x_{j+1}^k)|$.

В случае 1 можно гарантировать, что $r(t) \geqslant 1$ (как мы видим, эта точка «обслуживает» интервал (x_j^k, x_{j+1}^k)).

Случай 3 сводится к случаю 2, если мы сделаем замену переменных:

$$f_2(t) = f(x_{j+1}^k + x_j^k - t) \quad P_2(t) = P(x_{j+1}^k + x_j^k - t) \quad Q_2(t) = Q(x_{j+1}^k + x_j^k - t).$$

Нетрудно убедиться в том, что если $r_{P_2,Q_2}(x_{j+1}^k + x_j^k - t) = s$, то $r_{P,Q}(t) = s$.

Случай 2 решается с помощью леммы 3.

Итак, мы получили набор точек, «обслуживающих» все интервалы (ξ, η), где ξ, η – последовательные точки альтернанса такие, что (ξ, η) не содержит корней полинома P нечетной кратности. Всего точек альтернанса ровно $S_1 + K$, корней нечетной кратности ровно ℓ. Таким образом, набор точек может «обслужить» $S_1 + K - \ell - 1$ таких интервалов. Следовательно, существует набор точек $\{t_1, \ldots, t_q\}$ такой, что $\sum_{j=1}^{q} r(t_j) \geqslant S_1 + K - \ell - 1$. В начале доказательства теоремы мы отмечали, что $\sum_{j=1}^{\ell} r(y_j) + S_1 \geqslant S$. Поэтому

$$\sum_{j=1}^{\ell} r(y_j) + \sum_{j=1}^{q} r(t_j) \geqslant S + K - \ell - 1.$$

По условию теоремы $S + K \geqslant 2n + 2 + \ell$, значит

$$\sum_{j=1}^{l} r(y_j) + \sum_{j=1}^{q} r(t_j) \geqslant S + K - \ell - 1 \geqslant 2n + 2 + \ell - \ell - 1 = 2n + 1.$$

Применяя лемму 2, мы получаем $|P| \equiv |Q|$. Теорема доказана.

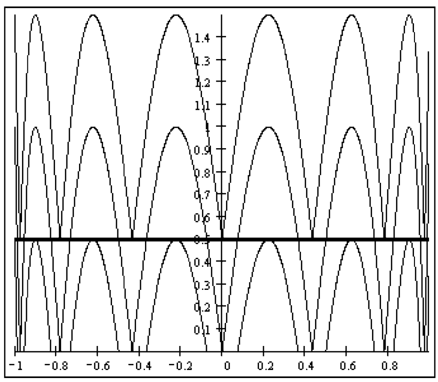

Рис. 3

Пример 2. В условиях предыдущей теоремы нельзя ни при каком натуральном n уменьшить число точек альтернанса, достаточное для того, чтобы данный полином был полиномом наилучшего приближения. Покажем это.

Рассмотрим произвольное натуральное число n. Зададим $P = T_n$ – полином Чебышева степени n. Положим $f(x) \equiv 0{,}5$, $[a, b] = [-1, 1]$. Тогда $\|f - |P|\| = 0{,}5$ (рис. 3). Нетрудно убедиться, что у полинома P для функции f существует $n+1$ точка альтернанса и P дополняем $2n$ точками. Таким образом, $K + S = 3n + 1$ (напомним, что $\ell = n$ и в теореме требуется $3n + 2$ точки) и полином P явно не наилучший в классе $\mathcal{P}_n$.

5. Некоторые дополнительные теоремы

Покажем, что для данного полинома можно указать множество полиномов, среди которых он является наименее уклоняющимся от данной функции.

Теорема 5. *Пусть $f \geqslant 0$, полиномы $P, Q \in \mathcal{P}_n$ такие, что $\|f - |P|\| = \Delta$; существует набор $\{x_1, \ldots, x_{n+2}\}$ точек альтернанса полинома P для функции f и никакая точка x_j не является корнем Q. Если в каждом интервале (x_j, x_{j+1}) у P и Q количества корней нечетной кратности k_P, k_Q имеют одинаковую четность, т. е. $k_P \equiv k_Q \pmod 2$, то $\|f - |P|\| \leqslant \|f - |Q|\|$ и равенство достигается лишь при $|P| \equiv |Q|$.*

Доказательство. Пусть $\|f - |Q|\| \leqslant \Delta$. Не ограничивая общности, можно считать, что $\operatorname{Sign} P(x_1) = \operatorname{Sign} Q(x_1)$ (если же $\operatorname{Sign} P(x_1) = -\operatorname{Sign} Q(x_1)$, то докажем теорему для полинома $-Q$).

Тогда, в силу выбора Q, интервал (x_j, x_{j+1}) содержит количество корней полиномов P и Q нечетной кратности одинаковой четности, поэтому по индукции можно проверить истинность равенств

$$\forall j \in 1, \ldots, n \qquad \operatorname{Sign} P(x_j) = \operatorname{Sign} Q(x_j). \tag{13}$$

По определению набора точек альтернанса существует число $\alpha = 1$ или -1 такое, что выполнены равенства

$$\begin{gathered} f(x_j) - |P(x_j)| = \alpha(-1)^j \Delta \operatorname{Sign} P(x_j), \\ \alpha(-1)^j \operatorname{Sign} P(x_j)(f(x_j) - |P(x_j)|) = \Delta. \end{gathered} \tag{14}$$

По предположению $\|f - |Q|\| \leqslant \Delta$, следовательно

$$\Delta \geqslant \alpha(-1)^j \operatorname{Sign} Q(x_j)\big(f(x_j) - |Q(x_j)|\big).$$

С учетом (14) получаем

$$\alpha(-1)^j \operatorname{Sign} P(x_j)\big(f(x_j) - |P(x_j)|\big) = \Delta \geqslant \alpha(-1)^j \operatorname{Sign} Q(x_j)\big(f(x_j) - |Q(x_j)|\big).$$

Отсюда, с учетом (13), получаем

$$\alpha(-1)^j \operatorname{Sign} P(x_j)\big(f(x_j) - |P(x_j)|\big) = \Delta \geqslant \alpha(-1)^j \operatorname{Sign} P(x_j)\big(f(x_j) - |Q(x_j)|\big).$$

Преобразуем, используя (13),

$$\begin{gathered} \alpha(-1)^j \operatorname{Sign} P(x_j)|P(x_j)| \leqslant \alpha(-1)^j \operatorname{Sign} P(x_j)|Q(x_j)|, \\ \alpha(-1)^j \operatorname{Sign} P(x_j)|P(x_j)| \leqslant \alpha(-1)^j \operatorname{Sign} Q(x_j)|Q(x_j)|. \end{gathered}$$

Из определения функции $\operatorname{Sign} P$ видно, что для любой точки x верно равенство $\operatorname{Sign} P(x)|P(x)| = P(x)$, следовательно, предыдущее неравенство преобразуется:

$$\alpha(-1)^j P(x_j) \leqslant \alpha(-1)^j Q(x_j), \qquad \alpha(-1)^j (P(x_j) - Q(x_j)) \leqslant 0.$$

Несложно показать, используя основную теорему алгебры, что последнее возможно, только если $P \equiv Q$.

Теорема доказана.

Чебышев показал, что для любой функции $f \in C[a,b]$ существует $n+2$ точки $x_1, \dots, x_{n+2}$ такие, что

$$\inf_{P \in \mathcal{P}_n} \|f - P\|_{C[a,b]} = \inf_{P \in \mathcal{P}_n} \max_{x \in \{x_1, \dots, x_{n+2}\}} |f(x) - P(x)|.$$

Следующий пример показывает, что необходимо не менее счетного числа точек для выполнения подобного равенства в случае приближения модулями полиномов $(n = 1)$.

Теорема 6. *Существует функция $f \geqslant 0$ такая, что для любого конечного набора точек $\{x_1, \dots, x_s\}$ верно неравенство*

$$\inf_{P \in \mathcal{P}_1} \|f - |P|\|_{C[a,b]} > \inf_{P \in \mathcal{P}_1} \max_{x \in \{x_1, \dots, x_s\}} |\, f(x) - |P(x)||.$$

Доказательство. Положим $[a,b] = [-1,1]$. Введем в рассмотрение полиномы

$$P_n(x) = \Big(x - \frac{1}{n}\Big)\frac{10n}{n-1}, \quad P_0(x) = 10x,$$

зависящие от натурального параметра n. Заметим, что $P_n \rightrightarrows P_0$, поэтому существует число N $(N = 13)$ такое, что для любого $n \geqslant N$ все полиномы P_n лежат в 1-окрестности P_0.

Введем числа $\alpha_n = \frac{1}{10n(n-1)}$, тогда нетрудно заметить, что интервалы $\big(\frac{1}{n} - \alpha_n, \frac{1}{n} + \alpha_n\big)$ и $\Big(\frac{1}{n+1} - \alpha_{n+1}, \frac{1}{n+1} + \alpha_{n+1}\Big)$ не пересекаются. Обозначим

$$A_n = \left|P_n\Big(\frac{1}{n} - \alpha_n\Big)\right| = \left|P_n\Big(\frac{1}{n} + \alpha_n\Big)\right| = \frac{1}{(n-1)^2}.$$

Заметим, что $A_n \to 0$ при $n \to \infty$.

Зададим f (рис. 4). Для $n \geqslant N$ на $[1/n - \alpha_n, 1/n]$ определим функцию f линейно с условиями:

$$f\left(\frac{1}{n} - \alpha_n\right) = 1 + A_n, \qquad f\left(\frac{1}{n}\right) = 1 - A_n.$$

На $[1/n, 1/n + \alpha_n]$ определим функцию f линейно с условиями:

$$f\left(\frac{1}{n} + \alpha_n\right) = 1 + A_n, \qquad \left(\frac{1}{n}\right) = 1 - A_n.$$

На $[1/(n+1)+\alpha_{n+1}, 1/n-\alpha_n]$ определим функцию f линейно (условия на концах отрезка уже заданы).

На $[1/N+\alpha_N, 1]$ зададим линейно функцию f с оставшимся условием $f(1)=9$. Наконец, на $[-1,0]$ положим $f(x)=1-9x$.

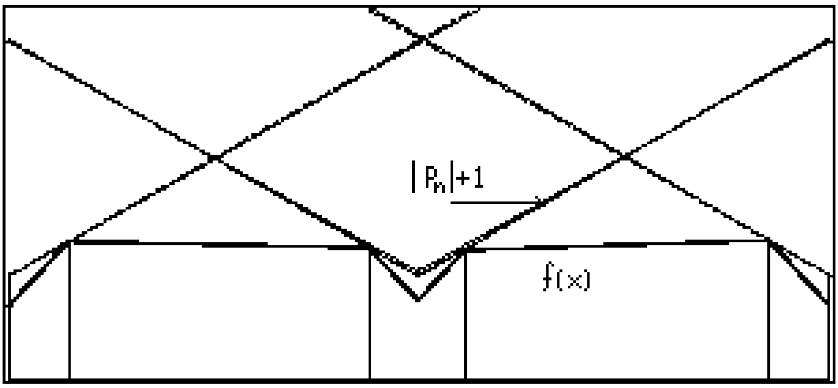

Рис. 4

Заметим, что функция f непрерывна в точке 0, так как для любого $x \in$ $\in \left[\frac{1}{n}, \frac{1}{n+1}\right]$ значение функции $f(x)$ принадлежит отрезку $[1-A_{n-1}, 1+A_{n-1}]$. Следовательно, функция f непрерывна на всем отрезке.

Отметим также, что f лежит в 1-окрестности P_0, P_n, $n \geqslant N$ и при $n \geqslant N$ у полинома P_n для f есть три точки альтернанса $(1, \frac{1}{n}+\alpha_n, \frac{1}{n}-\alpha_n)$.

Из построения f следует, что $E_1^*(f) \leqslant 1$. Покажем $E_1^*(f)=1$, действуя методом от противного.

Пусть полином $Q \in \mathcal{P}_1$ такой, что

$$\|f-|Q|\| < 1. \tag{15}$$

Предположим, у полинома Q существует корень y на отрезке $[-1,1]$. Тогда в точке y равенство (15) примет вид $f(y)=f(y)-Q(y)<1$, следовательно, для какого-то n выполнено $y \in (\frac{1}{n}-\alpha_n, \frac{1}{n}+\alpha_n)$. Но тогда, согласно теореме 5, получаем $|P_n| \equiv |Q|$.

Если же корень полинома Q не попал на отрезок $[-1,1]$ или его нет, то Q не меняет знак на этом отрезке. Пусть для определенности $Q(x)>0$ при $x \in [-1,1]$. Тогда из неравенства (15) следует

$$\|f-Q\| < 1. \tag{16}$$

Рассмотрим полином $P^* \equiv 4$. Имеем

$$f(-1)-P^*(-1)=6, \quad f(0)-P^*(0)=-3, \quad f(1)-P^*(1)=5.$$

Применяя теорему Валле-Пуссена, мы получаем $E_n(f) \geqslant \min\{6,3,5\} = 3$, что противоречит (16).

Возьмем произвольное множество точек $\{x_1, \ldots, x_s\}$ на $[-1,1]$. В это множество не попадут какие-то точки альтернанса некоторого полинома P_n. Тогда, поскольку у полинома P_n нет особых точек для функции f на компакте $\{x_1, \ldots, x_s\}$, по теореме 3 и замечанию к ней P_n не является наилучшим для f на этом компакте. Следовательно, существует малая поправка – полином Q такой, что

$$\max_{x \in \{x_1, \ldots, x_s\}} |f(x) - |P_n(x) + Q(x)|| < 1.$$

Теорема доказана.

Литература

1. Чебышев П. Л. Полное собрание сочинений: В 5 т. М.; Л.: Изд-во АН СССР, 1947. Т. 3.

2. Колмогоров А. Н., Фомин С. В. Элементы теории функций и функционального анализа. М.: Наука, 1976.

3. Ахиезер Н. И. Лекции по теории аппроксимации. М.: Наука, 1961.

Статья поступила 25.12.2003 г.