УДК 512.519.4

Ю. В. Нагребецкая

О ГРАНИЦЕ РАЗРЕШИМОСТИ БЕСКОНЕЧНОЙ СИММЕТРИЧЕСКОЙ ГРУППЫ

Пусть S — произвольная бесконечная симметрическая группа, рассматриваемая в сигнатуре $\langle \cdot, ^{-1}, 1\rangle$. В [1] анонсирован следующий результат: теории языков $\forall\neg\vee$ и $\exists\neg\wedge$ относительно иерархии SA [2] (определения приводятся ниже) группы S являются критическими, а теории языков $\forall\exists\forall$, $\exists\forall\exists$ этой же группы неразрешимы. Следующее утверждение, анонсированное в [3], продолжает изучение проблемы описания границы разрешимости группы S.

Теорема. *Теория* $\exists\forall\wedge\vee S$ *разрешима.*

Заметим, что для группы S возможен один из трех случаев: теория $\forall\exists\wedge\vee S$ разрешима; теория $\forall\exists S$ неразрешима; и наконец, существуют такие $s, t \in \{0,1\}$, $s+t \neq 0$, что теория $\forall\exists\wedge^s\vee^t S$ неразрешима, а все теории, покрываемые ею в схемно-альтернативной иерархии группы S, разрешимы. Таким образом, из разрешимости теории $\exists\forall\wedge\vee S$ с использованием основной теоремы из [2] и учетом полноты элементарной теории $\mathcal{E}S$ будет следовать, что в первом случае $\mathcal{B}(S) = \{\forall\neg\vee,\ \exists\neg\wedge,\ \forall\exists\forall,\ \exists\forall\exists\}$, во втором $\mathcal{B}(S) = \{\forall\neg\vee,\ \exists\neg\wedge,\ \forall\exists,\ \exists\forall\neg\}$, а в третьем $\mathcal{B}(S) = \{\forall\neg\vee,\ \exists\neg\wedge,\ \forall\exists\forall,\ \exists\forall\exists,\ \forall\exists\wedge^s\vee^t\}$.

Напомним кратко необходимые определения из [2]. Пусть $\mathcal{E}$ — множество всех формул логики первого порядка некоторой сигнатуры σ, записанных в предваренной нормальной форме [4]. Пусть $Q_i \in \{\forall,\exists\}$, $Q_i \neq Q_{i+1}$ для $i \in \{1,\ldots,p-1\}$ и пусть $r,s,t \in \{0,1\}$. Определим язык $Q_1\ldots Q_p\neg^r\wedge^s\vee^t$ из $\mathcal{E}$, где $z^1 = z$ и z^0 — пустой символ для $z \in \{\neg,\wedge,\vee\}$, следующим образом. Во-первых, блочная схема кванторной приставки каждой из формул $Q_1\ldots Q_p\neg^r\wedge^s\vee^t$ является подсловом слова $Q_1\ldots Q_p$. Во-вторых, связка $\neg$, $\wedge$, $\vee$ допускается в бескванторной части этих формул, если соответственно $r=1$, $s=1$, $t=1$, и не допускается, если соответственно $r=0$, $s=0$, $t=0$. Обозначим, кроме того, через $\neg^r\wedge^s\vee^t$ бескванторный подъязык языка $\forall\neg^r\wedge^s\vee^t$, через $\varpi\neg^r\wedge^s\vee^t$ — объединение $\bigcup\limits_{p\in\omega} Q_1\ldots Q_p\neg^r\wedge^s\vee^t$. В теореме, сформулированной выше, фигурирует язык $\exists\forall\neg^0\wedge^1\vee^1 = \exists\forall\wedge\vee$ первого вида.

Семейство SA всех языков вида $Q_1\ldots Q_p\neg^r\wedge^s\vee^t$, $\neg^r\wedge^s\vee^t$ и $\varpi\neg^r\wedge^s\vee^t$ упорядочивается включением и называется *схемно-альтернативной иерархией* *языков.* Для языка $L \in SA$ и класса K алгебраических систем сигнатуры σ через LK обозначим теорию языка L класса K, т.е. совокупность всех предложений из L, истинных на K. *Схемно-альтернативной иерархией теорий* класса K называется частично упорядоченное множество

$$SAK = \langle \{LK \mid L \in SA\}; \subseteq \rangle.$$

Теория $LK \in SAK$ называется *критической*, если она является минимальной в SAK неразрешимой теорией. *Границей разрешимости* класса K называется множество

$$\mathcal{B}(K) = \{L \in SA \mid LK \text{ — критическая теория}\}.$$

Нахождение границы разрешимости класса K означает установление полной в рамках иерархии SA алгоритмической картины для K, поскольку теория $LK \in SAK$ будет разрешимой тогда и только тогда, когда $L \not\supseteq L_1$ для любого языка $L_1 \in \mathcal{B}(K)$.

Введем следующие обозначения: S — бесконечная симметрическая группа над множеством M; для $\alpha \in S$ полагаем $\operatorname{supp} \alpha \rightleftharpoons \{a \in M \mid a\alpha \neq a\}$; $S_{fin} \rightleftharpoons \{\alpha \in S \mid \operatorname{supp} \alpha \text{ конечно}\}$; ε_N — тождественное преобразование подмножества N множества M, $\varepsilon \rightleftharpoons \varepsilon_M$; $\mathcal{F}(x_1, \ldots, x_n)$ — свободная группа над алфавитом $\{x_1, \ldots, x_n\}$. Кроме того, для $\alpha \in S$ и $N \subseteq M$ через $\alpha|N$ будем обозначать ограничение биекции α на множество N, а через $N\alpha$ — множество $\{a\alpha \mid a \in N\}$. Так как множество S_{fin} является, очевидно, нормальной подгруппой группы S, то можно рассматривать фактор-группу $\bar{S} \rightleftharpoons S/S_{fin}$. Для всякой биекции $\alpha \in S$ через $\bar{\alpha}$ мы будем обозначать множество $\alpha \cdot S_{fin}$. Везде ниже под $\vec{a}$ мы будем подразумевать кортеж $a_1 \ldots a_n$, а под $\vec{x}$ — кортеж $x_1 \ldots x_n$.

Доказательству разрешимости теории $\exists\forall \wedge \vee S$ предпошлем ряд лемм.

Лемма 1. *Пусть*

$$w_i(\vec{a}, x) \rightleftharpoons a_{i_1} x^{m_{i1}} a_{i_2} x^{m_{i2}} \ldots a_{i_{n_i}} x^{m_{i n_i}}$$

— слово из $\mathcal{F}(a_1 \ldots a_n, x)$*, где* $m_{ij} \in \{\pm 1\}$*,* $i \in \mathbb{N}$ *и* $\{i_1, \ldots, i_{n_i}\} \subseteq \{1, \ldots, n\}$*. Тогда для любого кортежа* $\vec{\alpha} \in [S \backslash S_{fin}]^n$ *и любого* $m \in \mathbb{N}$ *существует такая биекция* $\xi \in S$*, что* $\bar{S} \not\models \varphi(\bar{\xi})$*, где* $\varphi(x) \rightleftharpoons \bigvee_{i=1}^{m} w_i(\vec{\bar{\alpha}}, x) = \bar{\varepsilon}$ *и элемент* $\bar{\xi}$ *в группе* $\bar{S}$ *имеет бесконечный порядок.*

Доказательство. Пусть $\vec{\alpha} \rightleftharpoons \alpha_1 \ldots \alpha_n$ — произвольный кортеж из $[S \backslash S_{fin}]^n$. Докажем сначала, что существует такое бесконечное подмножество $N \subseteq M$, что множество $\operatorname{supp}\alpha_i\backslash(N\cup N\alpha_i^{-1})$ бесконечно для любого $i\in\{1,\dots,n\}$. Зададим рекуррентно последовательность $\{N_i \mid i\in\{0,\dots n\}\}$ подмножеств множества M таких, что $\operatorname{supp}\alpha_i\backslash(N_i\cup N_i\alpha_i^{-1})$ бесконечно для любого $i\in\{1,\dots,n\}$. Пусть $N_0\rightleftharpoons M$. Допустим, что N_{i-1} уже построено. Если $L\rightleftharpoons N_{i-1}\cap\operatorname{supp}\alpha_i$ пусто или конечно, то полагаем $N_i\rightleftharpoons N_{i-1}$. Пусть L бесконечно, тогда $L=L_1\dot\cup L_2\dot\cup L_3$ для некоторых бесконечных множеств L_1, L_2 и L_3. Если множество $L'\rightleftharpoons L\backslash(L_1\cup L_1\alpha_i^{-1})$ бесконечно, то, полагая $N_i\rightleftharpoons L_1$, имеем бесконечность множества $\operatorname{supp}\alpha_i\backslash(N_i\cup N_i\alpha_i^{-1})$. Пусть множество L' пусто или конечно. Из $L_2\alpha_i^{-1}=L\backslash(L_1\alpha_i^{-1}\cup L_3\alpha_i^{-1})\subseteq L\backslash L_1\alpha_i^{-1}\subseteq L_1\dot\cup L'$ следует, что $L\backslash(L_2\cup L_2\alpha_i^{-1})\supseteq L\backslash(L_1\dot\cup L_2)\backslash L'=L_3\backslash L'$. Ввиду бесконечности множества $L_3\backslash L'$ имеем бесконечность множества $L\backslash(L_2\cup L_2\alpha_i^{-1})$, а значит, и бесконечность множества $\operatorname{supp}\alpha_i\backslash(N_i\cup N_i\alpha_i^{-1})$ для $N_i\rightleftharpoons L_2$. Покажем, что бесконечное множество N_n является искомым. Коль скоро множество $\operatorname{supp}\alpha_i\backslash(N_i\cup N_i\alpha_i^{-1})$ бесконечно, в силу включений $N_n\subseteq N_{n-1}\subseteq\ldots\subseteq N_i$ множество $\operatorname{supp}\alpha_i\backslash(N_n\cup N_n\alpha_i^{-1})$ бесконечно, что и требовалось.

Теперь докажем следующее утверждение. Пусть A_i — бесконечное подмножество множества $\operatorname{supp}\alpha_i$ для $i\in\{1,\dots,n\}$. Тогда существуют такие элементы $a_1,a_2,\dots,a_n$ множеств $A_1,A_2,\dots,A_n$ соответственно, что множество $C_n\rightleftharpoons\{a_i,a_i\alpha_i^{-1}\mid i\in\{1,\dots,n\}\}$ состоит из $2n$ элементов. Доказательство проведем индукцией по n. Пусть $n=1$. Выберем a_1 из A_1. Так как $A_1\subseteq\operatorname{supp}\alpha_1$, то $a_1\neq a_1\alpha_1$ и поэтому множество $C_1\rightleftharpoons\{a_1,a_1\alpha_1^{-1}\}$ двухэлементно. Допустим, что найдены такие элементы $a_1,a_2,\dots,a_{n-1}$ из множеств $A_1,A_2,\dots,A_{n-1}$, что множество $C_{n-1}\rightleftharpoons\{a_i,a_i\alpha_i^{-1}\mid i\in\{1,\dots,n-1\}\}$ состоит из $2(n-1)$ элементов. Так как множество A_n бесконечно, а множество C_{n-1} конечно, то можно выбрать элемент $a_n\in A_n\backslash(C_{n-1}\cup C_{n-1}\alpha_n^{-1})$. Учитывая включение $A_n\subseteq\operatorname{supp}\alpha_n$, заключаем, что мощность множества $C_n\rightleftharpoons C_{n-1}\cup\{a_n,a_n\alpha_n\}$ равна $2n$.

Далее, будем строить последовательность $\{a^{(i)}\mid i\in\mathbb{N}\}$ элементов из $M\backslash N$ и последовательность $\{\zeta_i\mid i\in\omega\}$ инволюций из S_{fin} со следующими свойствами:

(1) $a^{(i)}\neq a^{(j)}$ для любых $i,j\in\mathbb{N}$, $i\neq j$;

(2) $\operatorname{supp}\zeta_i\cap\operatorname{supp}\zeta_{i-1}=\emptyset$ и $\operatorname{supp}\zeta_i\cap N=\emptyset$ для любого $i\in\mathbb{N}$;

(3) $a^{(i)}w_i(\vec{\alpha},\zeta_i)\neq a^{(i)}$ для любого $i\in\mathbb{N}$.

Пусть $\zeta_0=\varepsilon$ и пусть $\zeta_0,\zeta_1,\dots,\zeta_{i-1}$ и $a^{(1)},a^{(2)},\dots,a^{(i-1)}$ уже построены. Так как множество $\operatorname{supp}\alpha_{i_j}\backslash(N\cup N\alpha_{i_j}^{-1})$ бесконечно и $\zeta_{i-1}\in S_{fin}$, имеем бесконечность множества $A_j\rightleftharpoons\operatorname{supp}\alpha_{i_j}\backslash\left[N\cup\operatorname{supp}\zeta_{i-1}\cup(N\cup\operatorname{supp}\zeta_{i-1})\alpha_{i_j}^{-1}\right]$ для каждого $j\in\{1,\dots,n_i\}$. Применим ко множествам $A_{i_1},A_{i_2},\dots,A_{i_{n_i}}$ утверждение, доказанное выше: существуют такие попарно различные элементы $a_1,a_2,\dots,a_{n_i}$ из $A_{i_1},A_{i_2},\dots,A_{i_{n_i}}$ соответственно, что все элементы множества $C\rightleftharpoons\{a_j,a_j\alpha_{i_j}^{-1}\mid j\in\{1,\dots,n_i\}\}$ также попарно различны. Положим

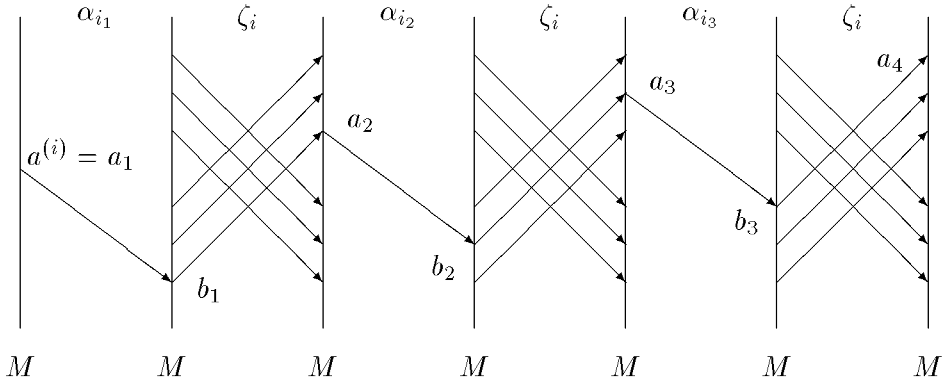
$b_j \rightleftharpoons a_j\alpha_{i_j}$. Выберем $a_{n_i+1} \in A_{i_1} \backslash C$ и определим инволюцию ζ_i так:

$$\begin{array}{ll} b_j\zeta_i = a_{j+1},\ a_{j+1}\zeta_i = b_j & \text{для всех } j \in \{1,\ldots,n_i\}, \\ c\zeta_i = c & \text{для любых } c \in M\backslash\{a_1,\ldots,a_{n_i+1},b_1,\ldots,b_{n_i}\}. \end{array}$$

Так как среди элементов $a_1,\ldots,a_{n_i+1}$,$b_1,\ldots,b_{n_i}$ нет равных, инволюция ζ_i определена корректно. Из определения множеств A_{i_j} и выбора элементов $a_j \in A_{i_j}$ следует свойство (2). Полагаем $a^{(i)} \rightleftharpoons a_1$. Тогда

$$a^{(i)}w(\vec{\alpha},\zeta_i) = a_1\alpha_{i_1}\zeta_i^{m_{i1}}\alpha_{i_2}\zeta_i^{m_{i2}}\ldots\alpha_{i_{n_i}}\zeta_i^{m_{in_i}} = a_1\alpha_{i_1}\zeta_i\alpha_{i_2}\zeta_i\ldots\alpha_{i_{n_i}}\zeta_i = \\ = b_1\zeta_i\alpha_{i_2}\zeta_i\ldots\alpha_{i_{n_i}}\zeta_i = a_2\alpha_{i_2}\zeta_i\ldots\alpha_{i_{n_i}}\zeta_i = \ldots = b_{n_i}\zeta_i = a_{n_i+1} \neq a_1$$

и свойства (1) и (3) доказаны. На рисунке проиллюстрировано то, что $a^{(i)}w_i(\vec{\alpha},\zeta_i) \neq a^{(i)}$, на примере $n_i = 3$.



Пусть K — счетное подмножество ранее построенного множества N. Пусть также η — биекция множества K на K такая, что единственной орбитой биекции η является само множество K, в частности $\operatorname{supp}\eta = K$. Обозначим через η' биекцию из S, определенную следующим образом: $\eta'|K = \eta$ и $\eta'|(M\backslash K) = \varepsilon_{M\backslash K}$. В силу свойства (2) имеет смысл биекция $\zeta \rightleftharpoons$ $\rightleftharpoons \eta' \cdot \prod\limits_{i\in\omega} \operatorname{supp}\zeta_i$. Очевидно, $\operatorname{supp}\zeta = \left(\dot{\bigcup\limits_{i\in\omega}} \operatorname{supp}\zeta_i\right) \dot{\cup} K$ и $\zeta|K = \eta$. Кроме того, из построения биекций $\zeta_i \in S$ и элементов $a^{(i)} \in M$ следует, что $a^{(i)}w_i(\vec{\alpha},\zeta) = a^{(i)}w_i(\vec{\alpha},\zeta_i) \neq a^{(i)}$. Легко понять, что бесконечное множество K является одной из орбит биекции ζ. Это значит, что $\zeta^k \notin S_{fin}$ ни для какого $k \in \mathbb{N}$.

Итак, по кортежу $\vec{\alpha} \in [S\backslash S_{fin}]^n$ и последовательности $\{w_i(\vec{a},x), i \in \mathbb{N}\}$ мы построили биекцию $\zeta \in S$ и последовательность $\{a^{(i)} \mid i \in \mathbb{N}\}$ попарно различных элементов из $M\backslash N$ так, что, во-первых, $a^{(i)}w_i(\vec{\alpha},\zeta) \neq a^{(i)}$ для любого $i \in \mathbb{N}$, а во-вторых, элемент $\bar{\zeta}$ имеет в группе $\bar{S}$ бесконечный порядок.

Применим это к доказательству утверждения леммы. Возьмем произвольное m. Для каждого $i \in \mathbb{N}$ введем слова $u_i(\vec{a}, x) \rightleftharpoons w_{i(\mathrm{mod}\, m)+1}(\vec{a}, x)$. Для произвольного кортежа $\vec{\alpha} \in [S \backslash S_{fin}]^n$ существуют биекция $\xi \in S$ и последовательность $\{b^{(i)} \mid i \in \mathbb{N}\}$ попарно различных элементов из $M \backslash N$ такие, что $b^{(i)} u_i(\vec{\alpha}, \xi) \neq b^{(i)}$ для любого $i \in \mathbb{N}$. Зафиксируем $i \in \{1, \ldots, m\}$. Тогда $b^{(i+km)} w_i(\vec{\alpha}, \xi) = b^{(i+km)} u_{i+\mathbf{N}m}(\vec{\alpha}, \xi) \neq b^{(i+km)}$ для любого $k \in \mathbb{N}$. Следовательно, $\operatorname{supp} w_i(\vec{\alpha}, \xi)$ содержит бесконечное множество $\{b^{(i+km)} \mid k \in \mathbb{N}\}$ и поэтому $w_i(\bar{\vec{\alpha}}, \bar{\xi}) \neq \bar{\varepsilon}$ в $\bar{S}$. Таким образом, мы доказали, что $\bar{S} \not\models \varphi(\bar{\xi})$ и, кроме того, $\bar{\xi}$ имеет в $\bar{S}$ бесконечный порядок.

Лемма 1 доказана.

Лемма 2. *Пусть*

$$w_i(\vec{a}, x) \rightleftharpoons a_{i_1} x^{m_{i1}} a_{i_2} x^{m_{i2}} \ldots a_{i_{n_i}} x^{m_{in_i}}$$

— слово из $\mathcal{F}(a_1 \ldots a_n, x)$, где $m_{ij} \in \mathbb{Z} \backslash \{0\}$, $i \in \{1, \ldots, m\}$ и $\{i_1, \ldots, i_{n_i}\} \subseteq$ $\subseteq \{1, \ldots, n\}$. Тогда для любого кортежа $\vec{\alpha} \in [S \backslash S_{fin}]^n$ и любого $m_0 \in \mathbb{N}$ существует такая биекция $\xi \in S$, что $\bar{S} \not\models \varphi(\bar{\xi})$, где $\varphi(x) \rightleftharpoons \bigvee\limits_{j=1}^{m} w_i(\bar{\vec{\alpha}}, x) = \bar{\varepsilon}$, и элемент $\bar{\xi}$ имеет в группе $\bar{S}$ порядок, не менее чем m_0.

Доказательство. Обозначим через $W(\mathcal{A}, b)$ набор $\{b, b^{-1}, b^{-1}ab, ab, b^{-1}a \mid a \in \mathcal{A}\}$ групповых слов над алфавитом $\mathcal{A} \cup \{b\}$. Пусть $\vec{\alpha} \rightleftharpoons \alpha_1 \ldots \alpha_n$ — произвольный кортеж биекций из $S \backslash S_{fin}$ и $\mathcal{A} \rightleftharpoons \{\alpha_1, \ldots, \alpha_n, \alpha_1^{-1}, \ldots, \alpha_n^{-1}\}$. Так как множество $\mathcal{A}$ конечно и группа $\bar{S}$ бесконечна, существует биекция $\beta \in S \backslash (\mathcal{A} S_{fin} \cup S_{fin})$. Ввиду того что S_{fin} — нормальная подгруппа в S, имеем $W(\mathcal{A}, \beta) \cap S_{fin} = \emptyset$. Нетрудно заметить, что для каждого $i \in \{1, \ldots, m\}$ равенство $w_i(\bar{\vec{\alpha}}, \bar{\beta} y) = \bar{\varepsilon}$ равносильно в $\bar{S}$ равенству $u_i(\bar{\vec{\gamma}}, y) = \bar{\varepsilon}$, где $u_i(\bar{\vec{\gamma}}, y) = c_{j_1} y^{l_{j1}} c_{j_2} y^{l_{j2}} \ldots c_{j_{k_j}} y^{l_{jk_j}}$, $\{j_1, \ldots, j_{k_j}\} \subseteq \{1, \ldots, d\}$, $\vec{c} \rightleftharpoons c_1 \ldots c_d$, $\gamma_1, \ldots, \gamma_d$ — некоторые биекции из $W(\mathcal{A}, \beta)$ и $l_{jt} \in \{\pm 1\}$. При этом существенно, что $\gamma_j \in S \backslash S_{fin}$. Лемма 1 гарантирует существование биекции $\eta \in S$ такой, что

$$\bar{S} \not\models \left[\left(\bigvee_{i=1}^{m} u_i(\bar{\vec{\gamma}}, \bar{\eta}) = \bar{\varepsilon} \right) \vee \left(\bigvee_{j=1}^{m_0} (\bar{\gamma}\bar{\eta})^j = \bar{\varepsilon} \right) \right].$$

Следовательно, для $\xi \rightleftharpoons \beta\eta$ имеем $\bar{S} \not\models \varphi(\bar{\xi})$, и, кроме того, элемент $\bar{\xi}$ имеет в группе $\bar{S}$ порядок, не менее чем m_0.

Лемма 2 доказана.

Лемма 3. *Пусть*

$$w(\vec{a}, \vec{x}) \rightleftharpoons a_1 v_1(\vec{x}) \ldots a_n v_n(\vec{x})$$

— несократимое в $\mathcal{F}(a_1,\ldots,a_n,x_1,\ldots,x_n)$ слово, где $v_i(\vec{x})$ — несократимое неединичное в $\mathcal{F}(x_1,\ldots,x_n)$ слово для $i \in \{1,\ldots,n\}$ и $v_1(\vec{x})\ldots v_n(\vec{x}) \neq 1$ в $\mathcal{F}(x_1,\ldots,x_n)$. Тогда для произвольного кортежа $\vec{\alpha} \in S^n$ равенство $w(\bar{\vec{\alpha}},\vec{x}) = \bar{\varepsilon}$ равносильно в $\bar{S}$ либо равенству $w_1(\vec{x}) = \bar{\varepsilon}$ для некоторого несократимого неединичного слова $w_1(\vec{x}) \in \mathcal{F}(x_1,\ldots,x_n)$, либо равенству $w_2(\bar{\vec{\beta}},\vec{x}) = \bar{\varepsilon}$ для некоторого несократимого в $\mathcal{F}(a_1,\ldots,a_n,x_1,\ldots,x_n)$ слова $w_2(\vec{a},\vec{x}) \rightleftharpoons a_1u_1(\vec{x})\ldots a_lu_l(\vec{x})$ и кортежа $\vec{\beta} \in [S\backslash S_{fin}]^l$. При этом $l \leq n$ и $u_1(\vec{x})\ldots u_l(\vec{x}) \neq 1$ в $\mathcal{F}(x_1,\ldots,x_n)$.

Доказательство проведем индукцией по n. Пусть $n = 1$, тогда можно считать, что $w(\vec{a},x) = a_1w(\vec{x})$ для некоторого неединичного несократимого слова $w_1(\vec{x}) \in \mathcal{F}(x_1,\ldots,x_n)$. Для произвольного $\alpha_1 \in S$ если $\alpha_1 \in S_{fin}$, то равенство $w(\bar{\alpha}_1,\vec{x}) = \bar{\varepsilon}$ равносильно в $\bar{S}$ равенству $w_1(\vec{x}) = \bar{\varepsilon}$, в противном случае в качестве $w_2(\vec{a},\vec{x})$ можно взять само слово $w(\vec{a},\vec{x})$, а в качестве β_1 — биекцию α_1. Предположим, мы доказали утверждение для всех $m < n$. Если $\bar{\alpha}_i \neq \bar{\varepsilon}$ для любого $i \in \{1,\ldots,n\}$, то все доказано. В противном случае заменим в слове $w(\vec{a},\vec{x})$ вхождение всех букв a_i пустым словом, если и только если $\bar{\alpha}_i = \bar{\varepsilon}$ для каждого $i \in \{1,\ldots,n\}$. Полученное слово заменим равным ему циклически несократимым [5] в $\mathcal{F}(a_1,\ldots,a_n,x_1,\ldots,x_n)$ словом $w'(\vec{a},\vec{x})$. Очевидно, равенства $w(\bar{\vec{\alpha}},\vec{x}) = \bar{\varepsilon}$ и $w'(\bar{\vec{\alpha}},\vec{x}) = \bar{\varepsilon}$ равносильны в $\bar{S}$. Если $w'(\vec{a},\vec{x}) = w_1(\vec{x})$ в $\mathcal{F}(x_1,\ldots,x_n)$ для некоторого $w_1(\vec{x}) \in \mathcal{F}(x_1,\ldots,x_n)$, то все доказано. В противном случае $w'(\vec{a},\vec{x}) \rightleftharpoons z_1(\vec{a})v_1'(\vec{x})\ldots z_m(\vec{a})v_m'(\vec{x})$ для некоторых несократимых и неединичных $z_i \in \mathcal{F}(a_1,\ldots,a_n)$ и $v_i' \in \mathcal{F}(x_1,\ldots,x_n)$, причем $m < n$. Полагаем $\gamma_i \rightleftharpoons z_i(\vec{\alpha})$ и $w''(\vec{a},\vec{x}) \rightleftharpoons a_1v_1'(\vec{x})\ldots a_mv_m'(\vec{x})$. Легко понять, что слово $v_1'(\vec{x})\ldots v_m'(\vec{x})$ является циклической перестановкой слова $v_1(\vec{x})\ldots v_n(\vec{x})$ и поэтому не равно пустому слову. Значит, к слову $w''(\vec{a},\vec{x})$ и кортежу $\vec{\gamma}$ применимо предположение индукции. А так как в $\bar{S}$ $w''(\bar{\vec{\gamma}},\vec{x}) = w'(\bar{\vec{\gamma}},\vec{x})$, имеем требуемое. Лемма 3 доказана.

Следующая лемма показывает, в частности, разрешимость теории $\exists\forall\vee S$.

Лемма 4. *Пусть $\nu \rightleftharpoons \exists\,\vec{a}\,\forall\,\vec{x} \bigvee\limits_{i=1}^{k} \varphi_i(\vec{a},\vec{x}) = 1$ — произвольное предложение языка $\exists\forall\vee$ сигнатуры $\langle\cdot,^{-1},1\rangle$, где*

$$\varphi_i(\vec{a},\vec{x}) \rightleftharpoons u_1^{(i)}(\vec{a})v_1^{(i)}(\vec{x})\ldots u_{n_i}^{(i)}(\vec{a})v_{n_i}^{(i)}(\vec{x})u_{n_i+1}^{(i)}(\vec{a})$$

— несократимое неединичное слово из $\mathcal{F}(a_1,\ldots,a_n,x_1,\ldots,x_n)$, $u_j^{(i)}(\vec{a})$, $v_j^{(i)}(\vec{x})$ для $i \in \{1,\ldots,k\}$, $j \in \{1,\ldots,n_i\}$ — неединичные слова из $\mathcal{F}(a_1,\ldots,a_n)$, $\mathcal{F}(x_1,\ldots,x_n)$ соответственно. Тогда $S \models \nu$ тогда и только тогда, когда существует $i \in \{1,\ldots,k\}$ такое, что $v_1^{(i)}(\vec{x})\ldots v_{n_i}^{(i)}(\vec{x}) = 1$ в $\mathcal{F}(x_1,\ldots,x_n)$.

Доказательство. Не ограничивая общности, можно считать, что $u_1^{(i)}(\vec{a}) \neq 1$ и $u_{n_i+1}^{(i)}(\vec{a}) = 1$ для всех $i \in \{1, \ldots, k\}$, ибо всегда можно взять циклически несократимую перестановку слова $\varphi_i(\vec{a}, \vec{x})$ с таким свойством. Пусть для некоторого $i \in \{1, \ldots, k\}$ слово $v_1^{(i)}(\vec{x}) \ldots v_{n_i}^{(i)}(\vec{x}) = 1$ в $\mathcal{F}(x_1, \ldots, x_n)$. Тогда, очевидно, $S \models \nu$; для этого достаточно положить $\vec{a} \rightleftharpoons \varepsilon \ldots \varepsilon$. Обратно, пусть $S \models \nu$, т.е. есть такой кортеж $\vec{\alpha} \in S^n$, что $S \models \forall\, \vec{x} \bigvee\limits_{i=1}^{k} \varphi_i(\vec{\alpha}, \vec{x}) = 1$. Положим $\beta_j^{(i)} \rightleftharpoons u_j^{(i)}(\vec{\alpha})$ для всех $i \in \{1, \ldots, k\}$, $j \in \{1, \ldots, n_i\}$. Тогда $\bar{S} \models \forall\, \vec{x} \bigvee\limits_{i=1}^{k} w_i(\vec{\bar{\beta}}, \vec{x}) = \bar{\varepsilon}$, где $w_i(\vec{b}, \vec{x}) \rightleftharpoons b_1^{(i)} v_1^{(i)}(\vec{x}) \ldots b_{n_i}^{(i)} v_{n_i}^{(i)}(\vec{x})$ и $\vec{b} \rightleftharpoons$ $\rightleftharpoons b_1^{(1)} \ldots b_{n_1}^{(1)} \ldots b_1^{(k)} \ldots b_{n_k}^{(k)}$. Ясно, что слова $w_i(\vec{b}, \vec{x})$ циклически несократимы в $\mathcal{F}(b_1^{(1)} \ldots b_{n_k}^{(k)}, x_1, \ldots, x_n)$. Мы находимся в условиях леммы 3, поэтому без ограничения общности можно считать, что

$$\bar{S} \models \forall\, \vec{x} \left[\left(\bigvee_{i=1}^{l} w_i(\vec{\bar{\beta}}, \vec{x}) = \bar{\varepsilon} \right) \vee \left(\bigvee_{i=l+1}^{k} w_i(\vec{x}) = \bar{\varepsilon} \right) \right]$$

для некоторого $l \leq k$, несократимых неединичных слов $w_{l+1}(\vec{x}), \ldots, w_k(\vec{x})$ из $\mathcal{F}(x_1, \ldots, x_n)$ и биекций $\beta_1^{(1)}, \ldots, \beta_{n_1}^{(1)}, \ldots, \beta_1^{(l)}, \ldots, \beta_{n_l}^{(l)} \in S \backslash S_{fin}$. С этого места для простоты будем считать, что $k = 1$. Все рассуждения, приводимые ниже, легко распространяются на случай произвольного k. Итак,

$$\bar{S} \models \forall\, \vec{x}\, w(\vec{\bar{\beta}}, \vec{x}) = \bar{\varepsilon}, \tag{1}$$

где $w(\vec{b}, \vec{x})$ — неединичное слово из $\mathcal{F}(b_1, \ldots, b_n, x_1, \ldots, x_n)$, $\vec{b} \rightleftharpoons b_1 \ldots b_n$ и $\vec{\beta} \rightleftharpoons \beta_1 \ldots \beta_n \in [S \backslash S_{fin}]^n$. При этом слово $w(\vec{b}, \vec{x})$ либо принадлежит $\mathcal{F}(x_1, \ldots, x_n)$, либо графически равно слову $b_1 v_1(\vec{x}) \ldots b_n v_n(\vec{x})$ для некоторых неединичных несократимых слов $v_1(\vec{x}), \ldots, v_n(\vec{x})$ из $\mathcal{F}(x_1, \ldots, x_n)$ таких, что $v_1(\vec{x}) \ldots v_n(\vec{x}) \neq 1$ в $\mathcal{F}(x_1, \ldots, x_n)$. Ограничимся рассмотрением второго, более сложного случая.

Пусть слово $w(\vec{b}, \vec{x})$ графически равно слову

$$b_1 x_{i_1}^{s_1} \ldots x_{j_1}^{t_1} b_2 x_{i_2}^{s_2} \ldots x_{j_2}^{t_2} \ldots b_n x_{i_n}^{s_n} \ldots x_{j_n}^{t_n},$$

где $s_1, \ldots, t_1, s_2, \ldots, t_2, \ldots, s_n, \ldots, t_n \in \mathbb{Z} \backslash \{0\}$, и $I \subseteq \{1, \ldots, n\}$ для $I \rightleftharpoons$ $\rightleftharpoons \{i_1, \ldots, j_1, i_2, \ldots, j_2, \ldots, i_n, \ldots, j_n\}$. Опишем алгоритм, который путем последовательного применения леммы 2 получает из утверждения (1) цепочку вытекающих друг из друга следствий, последнее из которых противоречит лемме 2.

На первом шаге алгоритма фиксируем x_1. Если $x_1 \notin I$, то переходим ко второму шагу алгоритма и фиксируем x_2. Если снова $x_2 \notin I$, то рассматриваем x_3 и т.д. Не ограничивая общности, считаем, что $x_1 \in I$. Если $I = \{x_1\}$, то, воспользовавшись леммой 2, сразу же приходим к противоречию. Пусть $|I| \geq 2$. Кроме того, можно считать, что $j_n \neq 1$, ибо всегда можно взять циклически несократимую перестановку $\tilde{w}(\vec{b}, \vec{x}) \rightleftharpoons x_{j_n}^{t_n} w(\vec{b}, \vec{x}) x_{j_n}^{-t_n}$ слова $w(\vec{b}, \vec{x})$ так, чтобы при этом равенства $w(\vec{b}, \vec{x}) = 1$ и $\tilde{w}(\vec{b}, \vec{x}) = 1$ были равносильны в $\mathcal{F}(b_1, \ldots, b_n, x_1, \ldots, x_n)$. Просматриваем слово $w(\vec{b}, \vec{x})$ слева направо и выписываем так называемые x_1-*чередующиеся* слова, т.е. слова вида

$$z_{m,d}(\vec{b}, x_1) \rightleftharpoons c_1 x_1^{r_1} c_2 x_1^{r_2} \ldots c_d x_1^{r_d} c_{d+1},$$

где $m \in \{1, \ldots, n\}$, $d \in \{0, \ldots, n-m\}$, $r_i \in \{\pm 1\}$, $c_i = b_{m+i-1}$, $i \in \{2, \ldots, d\}$; $c_1 \in \{1, b_m\}$, $c_{d+1} \in \{1, b_{m+d}\}$. При этом будем рассматривать только такие слова указанного вида, которые являются максимальными подсловами слова $w(\vec{b}, \vec{x})$. Заменим в слове $z_{m,d}(\vec{b}, x_1)$ буквы c_{d+1} на b_m^{-1}, если $\bar{\beta}_{m+d} = \bar{\beta}_m^{-1}$, c_d — на b_{m-1}^{-1}, если $\bar{\beta}_{m+d-1} = \bar{\beta}_{m+1}^{-1}$, c_{d-1} — на b_{m-2}^{-1}, если $\bar{\beta}_{m+d-2} = \bar{\beta}_{m+2}^{-1}$, и т.д. Наконец, заменим c_{d-p} на b_{m-p-1}^{-1}, если $\bar{\beta}_{m+d-p-1} = \bar{\beta}_{m+p+1}^{-1}$. Так как слово $z_{m,d}(\vec{b}, x_1) \neq 1$ в $\mathcal{F}(b_1, \ldots, b_n, x_1)$, то $p \leq \left[\frac{d}{2}\right]$. Обозначим через $z'_{m,d}(\vec{b}, x_1)$ слово, полученное из слова $z_{m,d}(\vec{b}, x_1)$ после этих преобразований. Пусть $z''_{m,d}(\vec{b}, x_1)$ — циклически несократимое слово, равное слову $z'_{m,d}(\vec{b}, x_1)$. Для слова $z''_{m,d}(\vec{b}, x_1)$ возможен один из трех случаев:

(а) $z''_{m,d}(\vec{b}, x_1) = x_1^r$ в $\mathcal{F}(b_1, \ldots, b_n, x_1)$ для некоторого $r \in \mathbb{Z} \backslash \{0\}$;

(б) $z''_{m,d}(\vec{b}, x_1) = b_{m+q}$ в $\mathcal{F}(b_1, \ldots, b_n, x_1)$ для некоторого $q \in \{0, \ldots, d\}$;

(в) $z''_{m,d}(\vec{b}, x_1)$ является циклической перестановкой слова $g_1 x_1^{r_1} g_2 x_1^{r_2} \ldots g_l x_1^{r_l}$, где $r_1, \ldots, r_l \in \mathbb{Z} \backslash \{0\}$, $g_1, \ldots, g_l \in \left\{b_i, b_i^{-1}, b_i b_j^{-1} \mid \bar{\beta}_i \bar{\beta}_j^{-1} \neq \bar{\varepsilon},\ i, j \in \{1, \ldots, n\}\right\}$.

Заметим, что для слова $w(\vec{b}, \vec{x}) = w(\vec{x}) \in \mathcal{F}(b_1, \ldots, b_n, x_1, \ldots, x_n)$ x_1-чередующиеся слова исчерпываются случаем (а). В каждом из случаев (а)–(в) мы находимся в условиях леммы 2. Следовательно, существует такая биекция $\xi \in S$, что каждое x_1-чередующееся слово $z_{m,d}(\vec{\bar{\beta}}, \bar{\xi}) \neq \bar{\varepsilon}$. Это значит, что в силу сделанного предположения в $\bar{S}$ истинна формула $\forall x_2 \ldots x_n (w'(\vec{\bar{\gamma}}, \vec{y}) = \bar{\varepsilon})$ для некоторого набора $\vec{\gamma} \in [S \backslash S_{fin}]^{k_1}$, $k_1 \in \mathbb{N}$, где

$$w'(\vec{b}', \vec{y}) \rightleftharpoons b'_1 v'_1(\vec{y}) b'_2 v'_2(\vec{y}) \ldots b'_{k_1} v'_{k_1}(\vec{y}),$$

$\vec{b}' = b'_1 \ldots b'_{k_1}$, $v'_1(\vec{y})$ — несократимое неединичное слово из $\mathcal{F}(x_2, \ldots, x_n)$, $\vec{y} \rightleftharpoons x_2 \ldots x_n$.

Таким образом, нам удалось избавиться от переменной x_1 в исходной формуле. Если $|I| > 2$, то переходим ко второму шагу алгоритма, а именно фиксируем x_2 и выделяем x_2-*чередующиеся* слова — подслова слова

$w'(\vec{b}', \vec{y})$ и т.д. Продолжаем до тех пор, пока не дойдем до последней переменной, например x_n. Тогда получим, что в силу сделанного предположения в $\bar{S}$ истинна формула $\forall x_n(w^{(n)}(\vec{\bar{\delta}}, x_n) = \bar{\varepsilon})$ для некоторого набора $\vec{\delta} \in [S \backslash S_{fin}]^{k_n}$, $k_n \in \mathbb{N}$, где $w^{(n)}(\vec{b}^{(n)}, x_n) \rightleftharpoons b_1^{(n)} x_n^{p_1} b_2^{(n)} x_n^{p_2} \dots b_{k_n}^{(n)} x_n^{p_{k_n}}$, $\vec{b}^{(n)} = b_1^{(n)} \dots b_{k_n}^{(n)}$, $p_j \in \mathbb{Z} \backslash \{0\}$, причем $p_1 + p_2 + \dots + p_{k_n} \neq 0$. Это противоречит лемме 2. Следовательно, предположение о том, что $v_1(\vec{x}) \dots v_k(\vec{x}) \neq 1$ в $\mathcal{F}(x_1 \dots x_n)$, неверно.

Лемма 4 доказана.

Доказательство теоремы. Покажем разрешимость теории $\exists\forall \wedge \vee S$. Пусть $\nu \rightleftharpoons \exists\, \vec{a} \,\forall\, \vec{x} \bigwedge\limits_{i=1}^{n} \bigvee\limits_{j=1}^{m_i} w_{ij}(\vec{a}, \vec{x}) = 1$ — произвольное предложение языка $\exists\forall \wedge \vee$ сигнатуры $\langle \cdot, ^{-1}, 1 \rangle$, представленное в конъюнктивной нормальной форме, где $w_{ij}(\vec{a}, \vec{x}) \rightleftharpoons u_1^{(ij)}(\vec{a}) v_1^{(ij)}(\vec{x}) \dots u_{k_{ij}}^{(ij)}(\vec{a}) v_{k_{ij}}^{(ij)}(\vec{x}) u_{k_{ij}+1}^{(ij)}(\vec{a})$ — несократимое неединичное слово из $\mathcal{F}(a_1, \dots, a_n, x_1, \dots, x_n)$, причем $u_l^{(ij)}(\vec{a}) \neq 1$ и $v_d^{(ij)}(\vec{x}) \neq 1$ для $l \in \{1, \dots, n\}$, $d \in \{1, \dots, k_{ij}\}$. Докажем, что $S \models \nu$ тогда и только тогда, когда для любого $l \in \{1, \dots, n\}$ существует такое $i_j \in \{1, \dots, m_i\}$, что в $\mathcal{F}(x_1, \dots, x_n)$ истинно равенство

$$v_1^{(i,j_i)}(\vec{x}) v_2^{(i,j_i)}(\vec{x}) \dots v_{k_{i,j_i}}^{(i,j_i)}(\vec{x}) = 1. \tag{2}$$

Заметим вначале, что в силу полноты элементарной теории $\mathcal{E}S$

$$[S \models \nu] \Leftrightarrow \left[\exists\, \vec{a} \bigwedge_{i=1}^{n} \forall\, \vec{x} \bigvee_{j=1}^{m_i} w_{ij}(\vec{a}, \vec{x}) = 1 \right].$$

Пусть $S \models \nu$, т.е. существует кортеж $\vec{\alpha} \in S^n$ такой, что для любого i истинно в $\bar{S}$ предложение $\forall\, \vec{x} \bigvee\limits_{j=1}^{m_i} w_{ij}(\vec{\bar{\alpha}}, \vec{x}) = \bar{\varepsilon}$. Применяя лемму 4, приходим к выводу, что найдется такое $i_j \in \{1, \dots, m_i\}$, что в $\mathcal{F}(x_1, \dots, x_n)$ справедливо равенство (2). Обратно, пусть справедливо равенство (2). Тогда, взяв в качестве $\vec{a}$ кортеж $\varepsilon \dots \varepsilon$, имеем $S \models \nu$. Так как проблема равенства слов в свободной группе $\mathcal{F}(x_1, \dots, x_n)$ разрешима [5], то таким образом доказана разрешимость теории $\exists\forall \wedge \vee S$.

Теорема доказана.

Автор выражает признательность научному руководителю Ю.М.Важенину за постановку задачи и ряд полезных замечаний при оформлении статьи.

Литература

1. Маевский В.В. Об ограниченных теориях бесконечных групп и полугрупп // Тез. докл. Международ. конф. по алгебре, посвященной памяти А.И.Мальцева, Новосибирск, 21–26 авг. 1989 г. Новосибирск, 1989. С.73.

2. Важенин Ю.М. Критические теории // Сиб. матем. журн. 1986. Т.29, №1. С.23–31.

3. Важенин Ю.М., Нагребецкая Ю.В. О границах разрешимости групп и полугрупп преобразований бесконечного множества // Тез. докл. Международ. конф. "Комбинаторные и вычислительные методы в математике", Омск, 28–31 авг. 1998 г. Омск, 1998. С.43.

4. Ершов Ю.Л., Палютин Е.А. Математическая логика. М.:Наука, 1979.

5. Магнус В., Каррас А., Солитэр Д. Комбинаторная теория групп. М.:Наука, 1974.

Статья поступила 04.03.1999 г.;
окончательный вариант 16.08.1999 г.