

А. И. Короткий, И. А. Цепелев,
А. Т. Исмаил-заде, Б. М. Наймарк

ПАРАЛЛЕЛЬНЫЕ АЛГОРИТМЫ МОДЕЛИРОВАНИЯ ДВИЖЕНИЯ НЕОДНОРОДНОЙ ВЯЗКОЙ ЖИДКОСТИ *

1. Введение

В работе рассматривается задача численного моделирования движения неоднородной вязкой несжимаемой жидкости в поле силы тяжести. В последнее время подобные задачи довольно часто привлекаются в геофизике для моделирования различных процессов, происходящих в верхней мантии Земли [1]–[10]. Это относится к задачам моделирования фаз формирования и развития осадочных бассейнов, процессов эволюции соляных структур, к исследованию тепловой конвекции в мантии, изучению влияния континентов на структуру тепловых потоков в мантии и многим другим задачам. В частности, большой интерес представляет трехмерное моделирование процесса зарождения, развития и формирования плюма (диапира), вызванного внутренней гравитационной неустойчивостью неоднородной среды (неустойчивость такого рода может быть результатом температурного разуплотнения нижних слоев среды или понижения плотности вещества вследствие фазовых превращений). Численные примеры, выбранные для демонстрации результатов моделирования, относятся к этому случаю.

Работа продолжает исследования [11]–[14]. В [12]–[14] рассматривались алгоритмы численного моделирования задач, в которых вязкость обладала некоторой симметрией. Это позволяло разбить исходную задачу на несколько независимых подзадач меньшей размерности и решать их параллельно. В данной работе описываются алгоритмы, которые не используют симметрий. С математической точки зрения речь здесь идет о численном решении системы соотношений, состоящей из квазистационарных уравнений Навье–Стокса, эволюционных уравнений переноса плотности и вязкости, а также соответствующих граничных и начальных условий [15]–[17]. В работе описываются алгоритмы численного моделирования задачи, рассчитанные на использование многопроцессорной ЭВМ с распределенной памятью. Эти

*Работа поддержана РФФИ (№98-01-00046, 99-05-65050), Программой поддержки ведущих научных школ (№96-15-96116), Международным научно-техническим центром (№99-1293).

алгоритмы пригодны также и для моделирования некоторых обратных задач динамики вязкой жидкости. Они могут найти применение при решении обратных задач соляной тектоники и задач реконструкции динамики осадочных бассейнов. Приводятся результаты численных расчетов, которые демонстрируют эволюцию во времени вязкой двухслойной жидкости под действием гравитационных сил.

Численное решение задачи основано на введении векторного потенциала для скорости движения среды (это позволяет избавиться от условия несжимаемости и давления в уравнениях движения) и его аппроксимации трикубическими сплайнами. Аппроксимация находится методом Галеркина из соответствующего вариационного равенства, в которое преобразуется квазистационарное уравнение Навье–Стокса. Плотность и вязкость определяются из соответствующих уравнений с частными производными первого порядка (уравнений переноса) или из системы обыкновенных дифференциальных уравнений, определяющих характеристики, с последующим сносом начальных значений плотности и вязкости вдоль этих характеристик. Численное решение подобных задач довольно трудоемко из-за большой размерности соответствующих систем линейных уравнений. Определенных продвижений здесь удалось достичь, благодаря использованию специальных базисных элементов в методе Галеркина и благодаря разбиению исходной задачи на несколько независимых подзадач меньшей размерности, которые можно решать параллельно. Все это позволило получить приемлемые качественные и количественные результаты при сравнительно небольших размерностях дискретных задач.

2. Описание модели и схема ее численной реализации

В области $\Omega = (0, l_1) \times (0, l_2) \times (0, l_3) \subset R^3$ рассматривается медленное движение вязкой неоднородной несжимаемой жидкости в поле силы тяжести. Это движение в декартовых координатах описывается квазистационарными уравнениями Навье–Стокса [9],[13],[15]–[17]

$$\nabla p = \operatorname{div}(\mu e_{ij}) + \vec{F}, \quad x \in \Omega, \quad t \geq t_0, \quad (2.1)$$

или в развернутом виде

$$\begin{aligned} \frac{\partial p}{\partial x_1} &= \frac{\partial}{\partial x_1} \left(2\mu \frac{\partial u_1}{\partial x_1} \right) + \frac{\partial}{\partial x_2} \left(\mu \left(\frac{\partial u_1}{\partial x_2} + \frac{\partial u_2}{\partial x_1} \right) \right) + \frac{\partial}{\partial x_3} \left(\mu \left(\frac{\partial u_1}{\partial x_3} + \frac{\partial u_3}{\partial x_1} \right) \right), \\ \frac{\partial p}{\partial x_2} &= \frac{\partial}{\partial x_1} \left(\mu \left(\frac{\partial u_1}{\partial x_2} + \frac{\partial u_2}{\partial x_1} \right) \right) + \frac{\partial}{\partial x_2} \left(2\mu \frac{\partial u_2}{\partial x_2} \right) + \frac{\partial}{\partial x_3} \left(\mu \left(\frac{\partial u_2}{\partial x_3} + \frac{\partial u_3}{\partial x_2} \right) \right), \\ \frac{\partial p}{\partial x_3} &= \frac{\partial}{\partial x_1} \left(\mu \left(\frac{\partial u_1}{\partial x_3} + \frac{\partial u_3}{\partial x_1} \right) \right) + \frac{\partial}{\partial x_2} \left(\mu \left(\frac{\partial u_2}{\partial x_3} + \frac{\partial u_3}{\partial x_2} \right) \right) + \frac{\partial}{\partial x_3} \left(2\mu \frac{\partial u_3}{\partial x_3} \right) - \rho g, \end{aligned}$$

где $\vec{u} = (u_1, u_2, u_3)$ — вектор скорости жидкости в соответствующей точке x области Ω и в соответствующий момент времени $t \geq t_0$, $\vec{F} = (0, 0, -g\rho)$ — вектор внешних массовых сил, g — ускорение свободного падения, p — давление, ρ — плотность, μ — динамическая вязкость, $e_{ij} = \partial u_i / \partial x_j + \partial u_j / \partial x_i$ — тензор скоростей деформаций.

Уравнение несжимаемости задается в форме

$$\operatorname{div} \vec{u} = \frac{\partial u_1}{\partial x_1} + \frac{\partial u_2}{\partial x_2} + \frac{\partial u_3}{\partial x_3} = 0, \quad x \in \Omega, \quad t \geq t_0, \quad (2.2)$$

перенос плотности и вязкости описывается уравнениями

$$\frac{\partial \rho}{\partial t} + \sum_{i=1}^3 u_i \frac{\partial \rho}{\partial x_i} = 0, \quad p(t_0, x) = \rho_0(x), \quad x \in \Omega, \quad t \geq t_0, \quad (2.3)$$

$$\frac{\partial \mu}{\partial t} + \sum_{i=1}^3 u_i \frac{\partial \mu}{\partial x_i} = 0, \quad \mu(t_0, x) = \mu_0(x), \quad x \in \Omega, \quad t \geq t_0. \quad (2.4)$$

На границе Γ области Ω задается граничное условие прилипания

$$\vec{u} = 0, \quad x \in \Gamma, \quad t \geq t_0, \quad (2.5)$$

или граничное условие непротекания с идеальным скольжением

$$\langle \vec{u}, \vec{n} \rangle = 0, \quad \frac{\partial \vec{u}_\tau}{\partial \vec{n}} = 0, \quad x \in \Gamma, \quad t \geq t_0, \quad (2.6)$$

где \vec{n} — единичный вектор внешней нормали в точках $x \in \Gamma$; \vec{u}_τ — проекция вектора скорости \vec{u} на касательную плоскость к Γ в точках $x \in \Gamma$.

Таким образом, задача состоит в расчете функций

$$\vec{u} = \vec{u}(t, x), \quad p = p(t, x), \quad \rho = \rho(t, x), \quad \mu = \mu(t, x),$$

удовлетворяющих в области Ω при $t \geq t_0$ уравнениям (2.1)–(2.4), граничным условиям (2.5) или (2.6), начальным условиям из (2.3) и (2.4).

Преобразование задачи

Исключим из рассмотрения давление p и условие несжимаемости (2.2), введя векторный потенциал $\vec{\psi} = (\psi_1, \psi_2, \psi_3)$ по формуле

$$\vec{u} = \operatorname{rot} \vec{\psi}. \quad (2.7)$$

Выполним операцию rot над равенством (2.1). Тогда, учитывая равенство $\operatorname{rot}(\nabla p) = 0$ и равенство $\operatorname{div}(\operatorname{rot} \vec{\psi}) = 0$, получим систему уравнений для нахождения функций $\psi_1, \psi_2, \psi_3, \rho, \mu$:

$$\operatorname{rot} \operatorname{div}(\mu e_{ij}) + \operatorname{rot} \vec{F} = 0, \quad (2.8)$$

$$\frac{\partial \rho}{\partial t} + \langle \nabla \rho, \text{rot } \vec{\psi} \rangle = 0, \quad \frac{\partial \mu}{\partial t} + \langle \nabla \mu, \text{rot } \vec{\psi} \rangle = 0, \quad (2.9)$$

или в развернутой форме

$$\begin{aligned} & \frac{\partial^2}{\partial x_1 \partial x_2} \mu e_{13} + \frac{\partial^2}{\partial x_2^2} \mu e_{23} + \frac{\partial^2}{\partial x_3 \partial x_2} \mu e_{33} - \\ & - \frac{\partial^2}{\partial x_1 \partial x_3} \mu e_{12} - \frac{\partial^2}{\partial x_2 \partial x_3} \mu e_{22} - \frac{\partial^2}{\partial x_3^2} \mu e_{32} - g \frac{\partial \rho}{\partial x_2} = 0, \\ & \frac{\partial^2}{\partial x_1 \partial x_3} \mu e_{11} + \frac{\partial^2}{\partial x_2 \partial x_3} \mu e_{12} + \frac{\partial^2}{\partial x_3^2} \mu e_{13} - \\ & - \frac{\partial^2}{\partial x_1^2} \mu e_{13} - \frac{\partial^2}{\partial x_1 \partial x_2} \mu e_{23} - \frac{\partial^2}{\partial x_1 \partial x_3} \mu e_{33} + g \frac{\partial \rho}{\partial x_1} = 0, \\ & \frac{\partial^2}{\partial x_1^2} \mu e_{12} + \frac{\partial^2}{\partial x_1 \partial x_2} \mu e_{22} + \frac{\partial^2}{\partial x_1 \partial x_3} \mu e_{32} - \frac{\partial^2}{\partial x_1 \partial x_2} \mu e_{11} - \frac{\partial^2}{\partial x_2^2} \mu e_{12} - \frac{\partial^2}{\partial x_3 \partial x_2} \mu e_{13} = 0, \\ & e_{11} = 2 \cdot \left(\frac{\partial^2 \psi_3}{\partial x_1 \partial x_2} - \frac{\partial^2 \psi_2}{\partial x_1 \partial x_3} \right), \quad e_{22} = 2 \cdot \left(\frac{\partial^2 \psi_1}{\partial x_2 \partial x_3} - \frac{\partial^2 \psi_3}{\partial x_2 \partial x_1} \right), \\ & e_{33} = 2 \cdot \left(\frac{\partial^2 \psi_2}{\partial x_3 \partial x_1} - \frac{\partial^2 \psi_1}{\partial x_3 \partial x_2} \right), \\ & e_{12} = e_{21} = \frac{\partial^2 \psi_3}{\partial x_2^2} - \frac{\partial^2 \psi_2}{\partial x_2 \partial x_3} + \frac{\partial^2 \psi_1}{\partial x_1 \partial x_3} - \frac{\partial^2 \psi_3}{\partial x_1^2}, \\ & e_{13} = e_{31} = \frac{\partial^2 \psi_3}{\partial x_3 \partial x_2} - \frac{\partial^2 \psi_2}{\partial x_3^2} + \frac{\partial^2 \psi_2}{\partial x_1^2} - \frac{\partial^2 \psi_1}{\partial x_1 \partial x_2}, \\ & e_{23} = e_{32} = \frac{\partial^2 \psi_1}{\partial x_3^2} - \frac{\partial^2 \psi_3}{\partial x_3 \partial x_1} + \frac{\partial^2 \psi_2}{\partial x_2 \partial x_1} - \frac{\partial^2 \psi_1}{\partial x_2^2}, \\ & \frac{\partial \rho}{\partial t} + \frac{\partial \rho}{\partial x_1} \cdot u_1 + \frac{\partial \rho}{\partial x_2} \cdot u_2 + \frac{\partial \rho}{\partial x_3} \cdot u_3 = 0, \\ & \frac{\partial \mu}{\partial t} + \frac{\partial \mu}{\partial x_1} \cdot u_1 + \frac{\partial \mu}{\partial x_2} \cdot u_2 + \frac{\partial \mu}{\partial x_3} \cdot u_3 = 0, \\ & u_1 = \frac{\partial \psi_3}{\partial x_2} - \frac{\partial \psi_2}{\partial x_3}, \quad u_2 = \frac{\partial \psi_1}{\partial x_3} - \frac{\partial \psi_3}{\partial x_1}, \quad u_3 = \frac{\partial \psi_2}{\partial x_1} - \frac{\partial \psi_1}{\partial x_2}. \end{aligned}$$

Граничные условия для векторного потенциала

На каждой из граней $\Gamma(x_i = 0)$, $\Gamma(x_i = l_i)$, $i = 1, 2, 3$, параллелепипеда Ω будет рассматриваться одно из двух граничных условий: прилипание или идеальное скольжение с непроницаемостью. Отметим, что равенство (2.7)

выполняется с точностью до градиента произвольной дифференцируемой скалярной функции φ , т.е. $\vec{u} = \text{rot } \vec{\psi} = \text{rot}(\vec{\psi} + \nabla\varphi)$. Учитывая этот факт, для $\vec{\psi}$ можно так подобрать естественные граничные условия, чтобы обеспечить выполнимость граничных условий для функции \vec{u} .

а) Прилипание на какой-либо грани: $\vec{u} = 0$.

Соответствующие граничные условия для $\vec{\psi}$ имеют вид

$$\Gamma(x_i = 0 | x_i = l_i) : \psi_1 = \psi_2 = \psi_3 = 0, \quad \frac{\partial\psi_1}{\partial x_i} = \frac{\partial\psi_2}{\partial x_i} = \frac{\partial\psi_3}{\partial x_i} = 0, \quad i = 1, 2, 3.$$

б) Идеальное скольжение с непроницаемостью на какой-либо грани:

$$\frac{\partial\vec{u}_\tau}{\partial\vec{n}} = 0, \quad \langle \vec{u}, \vec{n} \rangle = 0.$$

Соответствующие граничные условия для $\vec{\psi}$ имеют вид

$$\Gamma(x_1 = 0) \cup \Gamma(x_1 = l_1) : \psi_2 = \psi_3 = 0, \quad \frac{\partial\psi_1}{\partial x_1} = 0, \quad \frac{\partial^2\psi_2}{\partial x_1^2} = \frac{\partial^2\psi_3}{\partial x_1^2} = 0;$$

$$\Gamma(x_2 = 0) \cup \Gamma(x_2 = l_2) : \psi_1 = \psi_3 = 0, \quad \frac{\partial\psi_2}{\partial x_2} = 0, \quad \frac{\partial^2\psi_1}{\partial x_2^2} = \frac{\partial^2\psi_3}{\partial x_2^2} = 0;$$

$$\Gamma(x_3 = 0) \cup \Gamma(x_3 = l_3) : \psi_1 = \psi_2 = 0, \quad \frac{\partial\psi_3}{\partial x_3} = 0, \quad \frac{\partial^2\psi_1}{\partial x_3^2} = \frac{\partial^2\psi_2}{\partial x_3^2} = 0.$$

Начальные условия для плотности и вязкости

Начальные условия имеют вид

$$\rho(t_0, x) = \rho_0(x), \quad \mu(t_0, x) = \mu_0(x), \quad x \in \Omega, \quad (2.10)$$

где ρ_0 и μ_0 — заданные функции в области Ω .

Аппроксимация преобразованной задачи

Введем в области Ω равномерную прямоугольную сетку с узлами

$$\Omega_{ijk} = (x_1^i, x_2^j, x_3^k), \quad 0 \leq i \leq n_1, \quad 0 \leq j \leq n_2, \quad 0 \leq k \leq n_3.$$

Каждому узлу сетки Ω_{ijk} поставим в соответствие трилинейный базисный элемент $\omega_{ijk} = \omega_{ijk}(x_1, x_2, x_3) = \omega_i^1(x_1)\omega_j^2(x_2)\omega_k^3(x_3)$, где ω_m^l — линейный базисный элемент ($l = 1, 2, 3$):

$$\omega_m^l(z) = \begin{cases} (z - x_l^{m-1})/(x_l^m - x_l^{m-1}), & z \in [x_l^{m-1}, x_l^m), \\ 1 - (z - x_l^m)/(x_l^{m+1} - x_l^m), & z \in [x_l^m, x_l^{m+1}), \\ 0, & z \notin [x_l^{m-1}, x_l^{m+1}). \end{cases}$$

Неизвестные функции ρ , μ будем искать в виде линейной комбинации трилинейных базисных элементов с неизвестными коэффициентами

$$\rho(t, x_1, x_2, x_3) \approx \sum_{i=0}^{n_1} \sum_{j=0}^{n_2} \sum_{k=0}^{n_3} \rho_{ijk}(t) \omega_{ijk}(x_1, x_2, x_3),$$

$$\mu(t, x_1, x_2, x_3) \approx \sum_{i=0}^{n_1} \sum_{j=0}^{n_2} \sum_{k=0}^{n_3} \mu_{ijk}(t) \omega_{ijk}(x_1, x_2, x_3).$$

Компоненты неизвестной функции $\vec{\psi} = (\psi_1, \psi_2, \psi_3)$ будем искать в виде линейной комбинации

$$\psi_q(t, x_1, x_2, x_3) \approx \sum_{i=0}^{n_1} \sum_{j=0}^{n_2} \sum_{k=0}^{n_3} v_{ijk}^q(t) s_i^{1q}(x_1) s_j^{2q}(x_2) s_k^{3q}(x_3), \quad q = 1, 2, 3,$$

трикубических базисных элементов [12],[14]

$$s_{ijk}^q = s_{ijk}^q(x_1, x_2, x_3) = s_i^{1q}(x_1) s_j^{2q}(x_2) s_k^{3q}(x_3),$$

где s_m^{lq} — некоторые подходящие кубические сплайны [12],[14].

Нахождение неизвестных коэффициентов v_{ijk}^p (в соответствующие дискретные моменты времени) сводится к решению системы линейных алгебраических уравнений

$$A\vec{v} = \vec{b}, \quad (2.11)$$

где A — симметричная положительно определенная матрица.

Уравнения (2.9) имеют характеристики, описываемые системой обыкновенных дифференциальных уравнений $dx(t)/dt = \vec{u}(t, x(t))$. Вдоль характеристик плотность и вязкость остаются постоянными:

$$\rho(t, x(t)) = \rho_0(x(t_0)), \quad \mu(t, x(t)) = \mu_0(x(t_0)), \quad t \geq t_0.$$

Расчет характеристик можно вести по формуле Эйлера

$$x(t + \Delta t) \approx x(t) + \Delta t \cdot \vec{u}(t, x(t)).$$

Отсюда получаем

$$\rho(t, x) \approx \rho(t - \Delta t, x - \Delta t \cdot \vec{u}(t, x)), \quad \mu(t, x) \approx \mu(t - \Delta t, x - \Delta t \cdot \vec{u}(t, x)).$$

Таким образом, полученные формулы позволяют определять плотность и вязкость в момент времени t по известным распределениям плотности и вязкости на предыдущем шаге по времени и по известному полю скоростей в момент времени t , которое должно быть рассчитано к этому моменту

времени. Благодаря применению трилинейных базисных элементов для аппроксимации плотности и вязкости удается организовать достаточное число независимых модулей, которые параллельно рассчитывают характеристики уравнений (2.9).

Схема расчета задачи

Начальные данные μ_0 и ρ_0 из (2.10) подставляются в краевую задачу (2.8) с соответствующими граничными условиями для расчета векторного потенциала $\vec{\psi}$ и поля скоростей \vec{u} в момент времени $t = t_0$, затем эти поля используются в задачах (2.9) для расчета вязкости μ и плотности ρ в области Ω в момент времени $t = t_0 + \Delta t$. Далее момент времени $t = t_0 + \Delta t$ принимается за начальный и схема расчетов повторяется. Поле векторного потенциала $\vec{\psi}$ рассчитывается методом Галеркина с базисом, состоящим из трикубических сплайнов, определенных на соответствующих кубических элементах [12],[14]. Вязкость и плотность могут вычисляться так, как указано выше (с помощью характеристик), или из уравнений переноса каким-либо методом, например, сдвигом вдоль поля скоростей \vec{u} и последующей интерполяцией на всю область. Шаг по времени Δt может выбираться автоматически так, чтобы максимальное смещение материальных точек среды не превосходило заданной достаточно малой величины h . Для этого отыскивается $u_{\max} = [u_1^2 + u_2^2 + u_3^2]^{1/2}$ в соответствующих узлах сетки, а затем полагается $\Delta t = h/u_{\max}$.

3. Метод решения линейной системы

Учитывая положительную определенность и симметрию матрицы в (2.11), для решения линейной системы алгебраических уравнений можно применить метод Холесского [18]. Некоторые варианты распараллеливания этого метода приведены и использовались в [11].

Опишем модификацию метода Холесского, пригодную для реализации на параллельных компьютерах с распределенной памятью для P процессоров. Матрицу линейной системы можно хранить по столбцам, однако, учитывая ее симметрию, достаточно хранить только ее нижний треугольник. Организовать распределение и хранение данных можно так, как указано на рис. 1 (в строке указаны номера столбцов, которые хранятся на соответствующем процессоре).

Процессор 0 :	0,	P ,	$2P$,	...	$(k-1)P$
Процессор 1 :	1,	$P+1$,	$2P+1$,	...	$(k-1)P+1$
				...	
Процессор $P-1$:	$P-1$,	$2P-1$,	$3P-1$,	...	$kP-1$

Рис. 1. Организация распределения и хранения данных

При способе хранения матрицы, приведенном на рис. 1, для разложения (факторизации) исходной матрицы на соответствующие треугольные матрицы необходимо произвести N пересылок от одного процессора всем остальным. Если скорости такой передачи малы, то время расчета возрастает по мере того, как пользователь увеличивает количество процессоров (подробно эти вопросы исследованы в работе [11]). Указанный способ распределения и хранения данных эффективен при малых P , при больших P он уже не эффективен. С учетом сказанного выше опишем один из возможных путей повышения эффективности работы метода при больших P . Выход состоит в том, чтобы заставить сам алгоритм регулировать нагрузку на процессоры и количество пересылок между ними. Пусть теперь исходная матрица хранится по столбцам так, как показано на рис. 2.

Процессор 0 :	$0 \dots i - 1,$	$(P + 1)i \dots (P + 1)i + i - 1,$...
Процессор 1 :	$i \dots 2i - 1,$	$(P + 2)i \dots (P + 2)i + i - 1,$...

Процессор $P - 1$:	$Pi \dots (P + 1)i - 1,$	$2P \dots (2P + 1)i - 1,$...

Рис. 2. Альтернативная организация распределения и хранения данных

При таком способе хранения данных каждый процессор будет хранить целый блок из i столбцов, номер блока кратен номеру процессора. Размер блока может быть изменен в алгоритме. Опишем более подробно алгоритм решения задачи в случае блочного хранения данных. Пусть блок столбцов $(A_{11} \ A_{21})^T$ исходной матрицы A полностью хранится на каком-либо процессоре. Тогда алгоритм декомпозиции матрицы A может быть представлен в следующем виде:

$$\begin{pmatrix} A_{11} & A_{21}^T \\ A_{21} & A_{22} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} L_{11} & 0 \\ L_{21} & A_{22} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} L_{11}^T & L_{21}^T \\ 0 & L_{22}^T \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} L_{11}L_{11}^T & L_{11}L_{21}^T \\ L_{21}L_{11}^T & L_{21}L_{21}^T + L_{22}L_{22}^T \end{pmatrix}.$$

Работа алгоритма декомпозиции сводится к следующим шагам:

- $A_{11} \rightarrow L_{11}L_{11}^T$ (факторизация матрицы A_{11}), $A_{21}(L_{11}^T)^{-1} \rightarrow L_{21}$ (факторизация матрицы A_{21});
- $A_{22} - L_{21}L_{21}^T \rightarrow \tilde{A}_{22}$ (пересчет матрицы A_{22}).

Шаг “а” делает тот процессор, которому принадлежит соответствующая порция данных. Далее он рассылает вычисленный блок фактор-матрицы всем процессорам, и после получения данных все процессоры вместе пересчитывают свои блоки матрицы A_{22} (шаг “б”). После завершения модификации клетки A_{22} шаги “а” и “б” применяются к подматрице A_{22} до тех пор, пока соответствующая подматрица A_{22} не будет исчерпана.

В таблице представлены времена работы алгоритмов с блоковой схемой хранения данных для случая $i = 3$. В этом варианте нагрузка на каждый

процессор возрастает в 3 раза и количество передач между процессорами уменьшается в 3 раза. Ускорение расчетов по сравнению с вариантом $i = 1$ указано в последнем столбце.

Время работы алгоритмов при блоковом хранении данных

P	$A = LL^T$ & $Ly = b$	Решение $L^T x = y$	Время $i = 3$	Время $i = 1$	Ускорение
4	208	13	237	245	1.034
6	182	14	220	238	1.082
8	160	15	203	273	1.345
12	162	19	204		
16	173	23	197	404	2.051
24	267	40	307		

4. Результаты расчетов модельных задач

В качестве первого модельного примера рассмотрим движение неоднородной вязкой несжимаемой жидкости в поле силы тяжести в области $\Omega = [0, 3] \times [0, 3] \times [0, 1]$. В начальный момент времени $t_0 = 0$ жидкость состояла из двух слоев — более легкого и менее вязкого внизу (в области $\Omega_2 = \Omega \setminus \Omega_1$) и тяжелого и более вязкого сверху (в области Ω_1), где

$$\Omega_1 = \{x \in \Omega : x_3 > 0.25 + 0.09 \cdot \exp[-180 \cdot [(x_1 - l_1/2)^2 + (x_2 - l_2/2)^2]]\}.$$

Плотность $\rho_0(x) = 1$ для $x \in \Omega_1$ и $\rho_0(x) = 0.85$ для $x \in \Omega_2$. Вязкость $\mu_0(x) = 100$ для $x \in \Omega_1$ и $\mu_0(x) = 1.0$ для $x \in \Omega_2$.

В центральной части поверхности, которая разделяет слои Ω_1 и Ω_2 , имеется небольшая выпуклость (возмущение поверхности раздела двух сред). Это возмущение будет начальной фазой зарождающегося диапира, который будет развиваться во времени вследствие внутренней гравитационной неустойчивости двухслойной жидкости с более тяжелой жидкостью наверху.

Для расчета задачи выбиралась сетка $20 \times 20 \times 20$ при аппроксимации векторного потенциала и вязкости и сетка $58 \times 58 \times 58$ при аппроксимации плотности. Время счета на 30 процессорах одной итерации по времени в среднем составило 3 часа (расчет векторного потенциала, поля скоростей, пересчет плотности и вязкости).

На рис.3 показана эволюция во времени двухслойной жидкости. Изображена поверхность, которая представляет собой границу раздела между легкой нижней и верхней, более тяжелой, жидкостью.

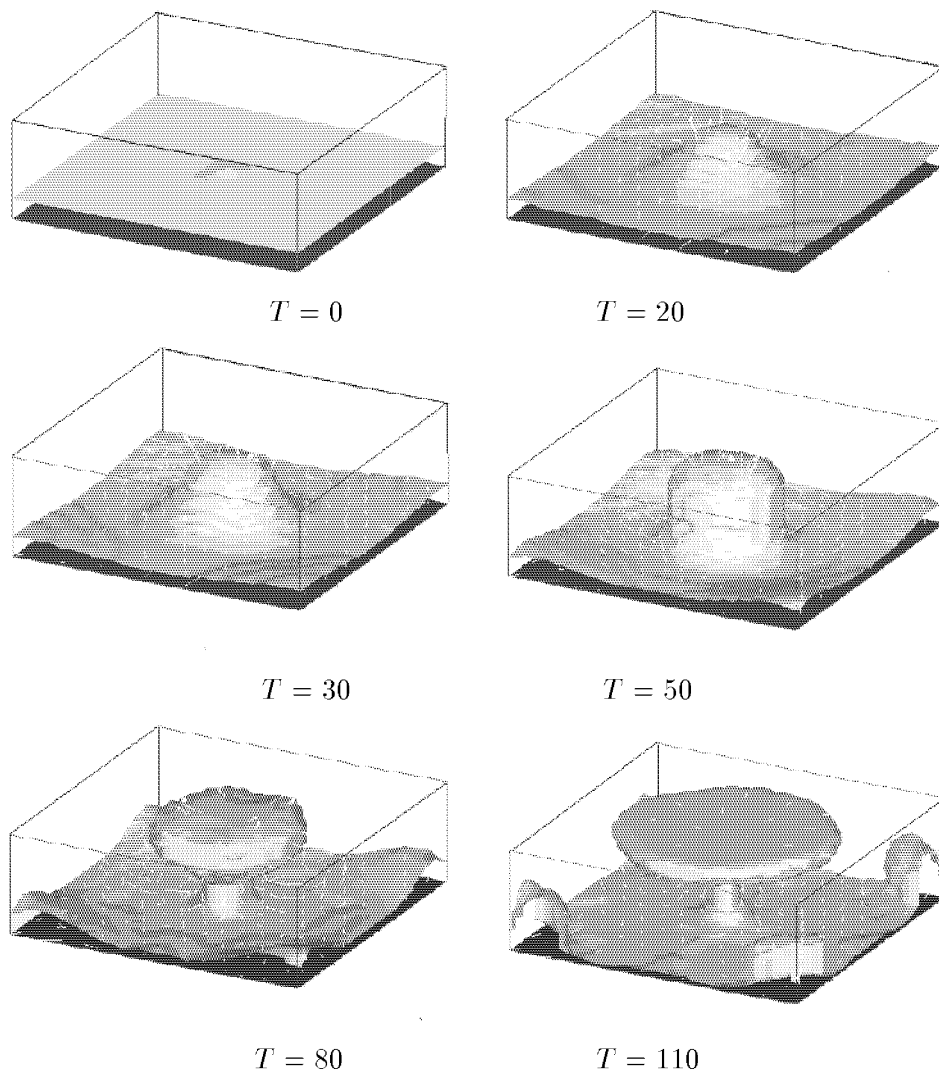


Рис. 3. Первый пример: начальное состояние жидкости и состояние жидкости после 20, 30, 50, 80 и 110 итераций по времени.

Во втором примере жидкость движется в поле силы тяжести в той же области $\Omega = [0, 3] \times [0, 3] \times [0, 1]$. В начальный момент времени $t_0 = 0$ жидкость также состояла из двух слоев Ω_1 и Ω_2 , где

$$\Omega_1 = \{x \in \Omega : x_3 > 0.25 + 0.09 \cdot \sin(x_1) * \sin(x_2)\}.$$

Для расчета задачи выбиралась сетка $25 \times 25 \times 25$ при аппроксимации векторного потенциала и вязкости и сетка $73 \times 73 \times 73$ при аппроксимации плотности.

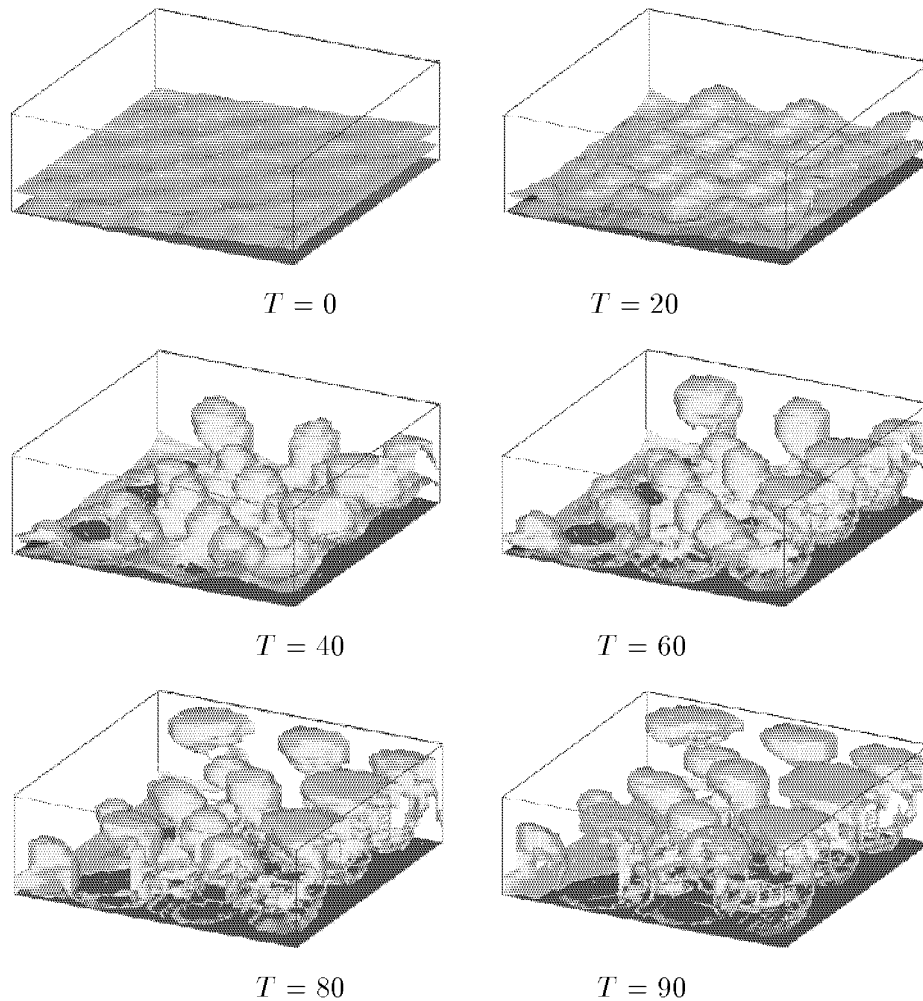


Рис. 4. Второй пример: начальное состояние жидкости и состояние жидкости после 20, 40, 60, 80 и 90 итераций по времени

Литература

1. MCKENZIE D.P. Some remarks on the development of sedimentary basins // Earth and Planetary Science Letters. 1978. V.40, №1. P.25–32.
2. CHANDRASEKHAR S. Hydrodynamic and hydromagnetic stability. Oxford: Clarendon Press, 1961.
3. MCKENZIE D.P., ROBERTS J.M., WEISS N.O. Convection in the Earth's mantle: towards a numerical simulation // J. Fluid Mechanics. 1974. V.62. P.465–538.
4. АРТЮШКОВ Е.В. Геодинамика. М.:Наука, 1979.

5. Туркотт Д., Шуберт Дж. Геодинамика. М.:Мир, 1985.
6. Наймарк Б.М., Малевский А.В. Приближенный метод решения задачи о гравитационной и тепловой устойчивости и расчет полей смещений и напряжений для моделей верхней мантии Земли // Вычисл. сейсмология. М.:Наука, 1987. Вып.20. С.33–52.
7. Малевский А.В. Механика процесса образования астеносферного диапира // Вычисл. сейсмология. М.:Наука, 1987. Вып.20. С.52–60.
8. Наймарк Б.М., Исмаил-заде А.Т. Гравитационная устойчивость вертикально-неоднородной среды с максвелловской реологией // Вычисл. сейсмология. М.:Наука, 1989. Вып.22. С.71–80.
9. Наймарк Б.М., Исмаил-заде А.Т. Усовершенствованная модель погружения тяжелых тел в астеносфере // Вычисл. сейсмология. М.:Наука, 1994. Вып.27. С.56–69.
10. Трубицын В.П., Бобров А.М. Структура мантийной конвекции под неподвижными континентами // Вычисл. сейсмология. М.:Наука, 1996. Вып.28. С.22–31.
11. Цепелев И.А., Короткий А.И., Исмаил-заде А.Т. и др. Параллельные алгоритмы решения задач моделирования высоковязких течений в верхней мантии Земли // Алгоритмы и программные средства параллельных вычислений: Сб. науч. тр. Екатеринбург: ИММ УрО РАН, 1998. Вып.2. С.301–317.
12. Исмаил-заде А.Т., Короткий А.И., Наймарк Б.М. и др. Реализация трехмерной гидродинамической модели эволюции осадочных бассейнов // ЖВМ и МФ. 1998. №7. С.1190–1203.
13. Наймарк Б.М., Исмаил-заде А.Т., Короткий А.И. и др. Моделирование трехмерных вязких течений в верхней слоях мантии // Вычисл. сейсмология. М.:Геос, 1998. Вып.30. С.3–15.
14. Наймарк Б.М., Исмаил-заде А.Т., Короткий А.И. и др. Численная реализация гидродинамической модели эволюции осадочных бассейнов // Тр. ИММ УрО РАН, 1998. Т.5. С.142–172.
15. Ландау Л.Д., Лифшиц Е.М. Гидродинамика. М.:Наука, 1986.
16. Ладыженская О.А. Математические вопросы динамики вязкой несжимаемой жидкости. М.:Наука, 1970.
17. Антонцев С.Н., Кажихов А.В., Монахов В.Н. Краевые задачи механики неоднородных жидкостей. Новосибирск:Наука, 1983.
18. Ортега Дж. Введение в параллельные и векторные методы решения линейных систем. М.:Мир, 1991.

Статья поступила 19.05.1999 г.