УДК 519.1

А. К. Кисляков

О МНОГОКРИТЕРИАЛЬНОЙ ЗАДАЧЕ ПОИСКА ОПТИМАЛЬНЫХ ИСТОЧНИКОВ В ГРАФЕ

Настоящая статья посвящена проблеме поиска паретовского множества многокритериальной задачи оптимизации [1] в ситуации, когда множеством допустимых решений является совокупность вершин некоторого дерева. В общем случае эта проблема может быть разрешена единственным способом — перебором вариантов. Мы, однако, укажем некоторые условия, выполнение которых для целевой функции позволяет избежать перебора, и явно опишем соответствующий непереборный алгоритм. Кроме того, мы покажем, что найденные условия выполняются, если в качестве частных критериев оптимальности используются те функционалы, минимизация которых составляет цель решения задач поиска медиан и центров дерева. Наконец, в статье оценивается временная сложность предложенного алгоритма.

1. Основные определения

Пусть на множестве вершин связного обыкновенного графа $G = (V, E)$ задана векторная целевая функция $\mathbf{F}(v) = (\mathrm{F}_1(v), \ldots, \mathrm{F}_N(v))$ такая, что $\operatorname{Im} \mathrm{F}_i \subset \mathbf{R}^*$ для каждого $i \in \{1, \ldots, N\}$. Компоненты F_i этой функции мы будем называть *критериями оптимальности размещения.* Решение $v^* \in V$ такое, что $\mathrm{F}_i(v^*) = \min_{v \in V} \mathrm{F}_i(v)$ для некоторого $i \in \{1, \ldots, N\}$, назовем *оптимальным по критерию* F_i. Будем полагать, что для произвольно выбранной пары вершин $v \in V$ и $w \in V$ соотношение $\mathbf{F}(v) \leq \mathbf{F}(w)$ имеет место тогда и только тогда, когда $\mathrm{F}_i(v) \leq \mathrm{F}_i(w)$ для каждого $i \in \{1, \ldots, N\}$. Решение $v^* \in V$ называется *парето-оптимальным* или *паретовским оптимумом,* если не существует такой вершины $v \in V$, что выполняются неравенства

$$\mathbf{F}(v) \leq \mathbf{F}(v^*) \text{ и } \mathbf{F}(v) \neq \mathbf{F}(v^*).$$

Через $U(G)$ обозначим *паретовское множество,* состоящее из всех парето-оптимальных вершин графа G. Суть *многокритериальной задачи размещения* в графе G состоит в отыскании паретовского множества $U(G)$.

Пусть $\mathrm{F}(v)$ — это функционал, определенный на множестве V, и пусть $\{v, w\} \in E$. Определим *вариацию* функционала F при переходе от вершины v к вершине w как $\Delta\mathrm{F}(v, w) = \mathrm{F}(v) - \mathrm{F}(w)$.

Чередующаяся последовательность

$$v_1, e_1, v_2, e_2, \ldots, e_p, v_{p+1}$$

вершин и ребер графа G такая, что $e_i = \{v_i, v_{i+1}\}$ $(i = 1, \ldots, p)$, называется *маршрутом,* соединяющим вершины v_1 и v_{p+1}. Маршрут можно задать последовательностью его вершин $v_1, v_2, \ldots, v_{p+1}$, а также последовательностью его ребер $e_1, e_2, \ldots, e_p$. Маршрут, все вершины которого, возможно за исключением вершин v_1 и v_{p+1}, различны, будем называть *простой цепью.*

Если рассматриваемый граф является деревом, то договоримся обозначать его буквой T. Будем говорить, что критерий F_k $(k \in \{1, \ldots, N\})$ удовлетворяет *условию монотонности,* если для любой простой цепи $v_1, v_2, \ldots, v_{p+1}$ дерева T из справедливости неравенств $1 \le i < j \le p$ и $\Delta\mathrm{F}_k(v_i, v_{i+1}) \le 0$ вытекает справедливость неравенства $\Delta\mathrm{F}_k(v_j, v_{j+1}) < 0$.

2. Алгоритм построения паретовского множества для деревьев

Даже для деревьев в общем случае паретовское множество может быть найдено только с помощью полного перебора вариантов [1]. Оказывается, что перебора можно избежать, если все компоненты векторной целевой функции удовлетворяют условию монотонности. В такой ситуации для поиска паретовского множества $U(T)$ может быть применен непереборный алгоритм, состоящий в выполнении следующих действий:

1. Для каждого из компонентов F_i $(i \in \{1, \ldots, N\})$ векторной целевой функции найти и пометить все оптимальные по критерию F_i вершины дерева T.

2. Построить минимальный связный подграф $T' = (V', E')$ дерева T, содержащий все найденные при выполнении действия 1 вершины.

3. Если $|V'| \le 2$ и все вершины дерева T' оптимальны по каждому из критериев F_i $(i \in \{1, \ldots, N\})$, то завершить выполнение алгоритма: множество $U(T)$ совпадает с множеством V'. В противном случае перейти к действию 4.

4. Удалить из дерева T' все вершины v такие, что $\deg_{T'} v = 1$ и единственная смежная с v вершина u дерева T' оптимальна по тем же критериям, что и v. Указанные два условия должны выполняться для каждой из удаляемых вершин.

5. Оставшиеся в дереве T' вершины образуют множество $U(T)$.

Для анализа предложенного алгоритма потребуется следующая лемма.

Лемма 1. *Пусть на множестве вершин дерева* $T = (V, E)$ *определена векторная целевая функция* $\mathbf{F}(v) = (\mathrm{F}_1(v), \ldots, \mathrm{F}_N(v))$ *и пусть некоторый критерий* F_i $(i \in \{1, \ldots, N\})$ *удовлетворяет условию монотонности. Тогда в дереве* T *имеется не более двух оптимальных по критерию* F_i *вершин, и если их две, то они смежны.*

Доказательство. Предположим, что в дереве T имеются несмежные вершины u и w, оптимальные по критерию F_i. Рассмотрим простую цепь

$$u = v_1, v_2, \ldots, v_{p+1} = w.$$

Так как u и w оптимальны по критерию F_i, имеют место неравенства

$$\Delta\mathrm{F}_i(v_1, v_2) \leq 0 \text{ и } \Delta\mathrm{F}_i(v_p, v_{p+1}) \geq 0.$$

Следовательно, критерий F_i не удовлетворяет условию монотонности. Противоречие с условием леммы доказывает, что наше предположение неверно, т.е. в дереве T все оптимальные по критерию F_i вершины должны быть попарно смежны между собой. Таким образом, их число не может быть больше чем 2, поскольку в противном случае имело бы место противоречие с ацикличностью деревьев. Это наблюдение завершает доказательство леммы.

Перейдем непосредственно к исследованию предложенного алгоритма.

Теорема 1. *Пусть* $T = (V, E)$ *— дерево, на множестве вершин которого определена векторная целевая функция* $\mathbf{F}(v) = (\mathrm{F}_1(v), \ldots, \mathrm{F}_N(v))$*. Если каждый из критериев* $\mathrm{F}_i (i \in \{1, \ldots, N\})$ *удовлетворяет условию монотонности, то множество вершин, найденных с помощью предложенного алгоритма, совпадает с множеством* $U(T)$*.*

Доказательство. Пусть дерево $T' = (V', E')$ — это подграф дерева T, построенный при выполнении действия 2.

Если $v \in V \backslash V'$, то существует единственная простая цепь

$$v_1, v_2, \ldots, v_{p+1}$$

такая, что $v = v_1$, $v_i \notin V'$ $(i = 1, \ldots, p)$ и $v_{p+1} \in V'$. Так как все критерии F_i $(i \in \{1, \ldots, N\})$ удовлетворяют условию монотонности, справедливы неравенства

$$\mathbf{F}(v_{p+1}) \leq \mathbf{F}(v) \text{ и } \mathbf{F}(v_{p+1}) \neq \mathbf{F}(v).$$

Таким образом, вершины множества $V \backslash V'$ не являются парето-оптимальными. Рассмотрим вершины множества V'.

Если $|V'| \leq 2$ и все вершины дерева T' оптимальны по каждому из критериев, то выполнение алгоритма заканчивается действием 3. В этом случае $U(T) = V'$. Действительно, при данных условиях для любых вершин $v \in V'$ и $w \in V'$ справедливо равенство $\mathbf{F}(v) = \mathbf{F}(w)$. А для любой вершины $v \in V \backslash V'$, как уже было показано, существует такая вершина $w \in V'$, что выполняются неравенства

$$\mathbf{F}(w) \leq \mathbf{F}(v) \text{ и } \mathbf{F}(w) \neq \mathbf{F}(v).$$

Предположим теперь, что имеет место альтернативная ситуация и выполнение алгоритма не закончилось действием 3.

Пусть v — висячая вершина дерева T', т.е. $\deg_{T'} v = 1$. По построению дерева T' вершина v оптимальна по одному или по нескольким критериям. Зафиксируем единственную смежную с v вершину u дерева T'. Если вершина u оптимальна по тем же критериям, что и v, то, поскольку все критерии удовлетворяют условию монотонности, выполняются неравенства

$$\mathbf{F}(u) \leq \mathbf{F}(v) \text{ и } \mathbf{F}(u) \neq \mathbf{F}(v).$$

Следовательно, такая вершина v не является паретовским оптимумом. Если же существует критерий F_i ($i \in \{1, \ldots, N\}$) такой, что вершина v оптимальна по данному критерию, а вершина u не оптимальна, то v, согласно лемме 1, является единственной оптимальной по критерию F_i вершиной дерева T. Таким образом, для любой вершины $w \in V \backslash \{v\}$ справедливо неравенство $\mathrm{F}_i(v) < \mathrm{F}_i(w)$. Это означает, что ни для какой вершины $w \in V \backslash \{v\}$ соотношение $\mathbf{F}(w) \leq \mathbf{F}(v)$ не может быть справедливым, т.е. что $v \in U(T)$.

Далее, пусть $v \in V'$ и $\deg_{T'} v > 1$. Рассмотрим произвольную вершину $w \in V \backslash \{v\}$. Поскольку $\deg_{T'} v > 1$, существует простая цепь

$$v_1, v_2, \ldots, v_{p+1}$$

такая, что $v_1 \in V'$, $\deg_{T'} v_1 = 1$, $v_{p+1} = w$ и $v \in \{v_2, \ldots, v_p\}$. По построению дерева T' вершина v_1 оптимальна по некоторому критерию F_i ($i \in \{1, \ldots, N\}$). Так как критерий F_i удовлетворяет условию монотонности, справедливо соотношение

$$\mathrm{F}_i(v) < \mathrm{F}_i(v_{p+1}) = \mathrm{F}_i(w).$$

Следовательно, неравенство $\mathbf{F}(w) \leq \mathbf{F}(v)$ выполняться не может и $v \in U(T)$. Теорема 1 доказана.

3. Функционалы, удовлетворяющие условию монотонности

В этом разделе статьи будет показано, что условию монотонности удовлетворяют функционалы, минимизация которых является целью при решении некоторых хорошо известных однокритериальных задач дискретной оптимизации.

3.1. О задаче поиска оптимальных источников (медиан)

Рассмотрим дерево $T = (V, E)$. Пусть вершинам $v \in V$ поставлены в соответствие положительные веса q_v, а ребрам $e \in E$ приписаны неотрицательные строго возрастающие функции $\varphi_e(x)$, $x \in \mathbf{R}$, $x \geq 0$. Известно, что в дереве для любых вершин u и v существует единственная соединяющая их простая цепь $C(u, v)$. Определим множество

$$V_{e,u} = \{v \in V | e \in C(u, v)\}$$

для каждого ребра e и каждой вершины u дерева T. Величину

$$\alpha_u(e) = \sum_{v \in V_{e,u}} q_v$$

мы будем называть *потоком по ребру e для вершины u*. Введем функционал

$$Cost_T(u) = \sum_{e \in E} \varphi_e(\alpha_u(e)).$$

Вершину $v^* \in V$ назовем *оптимальным источником,* если выполняется соотношение

$$Cost_T(v^*) = \min_{u \in V} Cost_T(u).$$

Задача размещения оптимальных источников в дереве T заключается в отыскании вершин данного графа, являющихся оптимальными источниками. Если все функции $\varphi_e(x)$, $e \in E$, имеют вид $\varphi_e(x) = l_e \cdot x$, где l_e — это приписанная ребру e положительная длина, то будем называть соответствующие оптимальные источники *медианами,* а решаемую задачу — *задачей поиска медиан* в дереве T.

Следующие два предложения, идея которых заимствована в [2], описывают интересующие нас свойства функционала $Cost_T(u)$.

Предложение 1. *Пусть $T = (V, E)$ — дерево, на множестве вершин которого определен функционал $Cost_T(u)$. Тогда вариация $\Delta Cost_T(v, w)$ этого функционала при переходе от вершины v к смежной вершине w равна*

$$\varphi_{\{v,w\}}(\alpha_v(\{v, w\})) - \varphi_{\{v,w\}}(\alpha_w(\{v, w\})).$$

Доказательство. Обозначим через $T_1 = (V_1, E_1)$ и $T_2 = (V_2, E_2)$ компоненты связности леса $T - \{v, w\}$. Будем считать, что $v \in V_1$, $w \in V_2$. Тогда

$$\begin{aligned}
\Delta Cost_T(v,w) &= Cost_T(v) - Cost_T(w) = \sum_{e\in E}\varphi_e(\alpha_v(e)) - \sum_{e\in E}\varphi_e(\alpha_w(e)) = \\
&= \sum_{e\in E_1}\varphi_e(\alpha_v(e)) + \varphi_{\{v,w\}}(\alpha_v(\{v,w\})) + \sum_{e\in E_2}\varphi_e(\alpha_v(e)) - \\
&\quad - \sum_{e\in E_1}\varphi_e(\alpha_w(e)) - \varphi_{\{v,w\}}(\alpha_w(\{v,w\})) - \sum_{e\in E_2}\varphi_e(\alpha_w(e)) = \\
&= \varphi_{\{v,w\}}(\alpha_v(\{v,w\})) - \varphi_{\{v,w\}}(\alpha_w(\{v,w\})).
\end{aligned}$$

Предложение 1 доказано.

Предложение 2. *Пусть $T = (V, E)$ — дерево, на множестве вершин которого определен функционал $Cost_T(u)$, и пусть маршрут*

$$v_1, e_1, v_2, e_2, \ldots, e_p, v_{p+1}$$

является простой цепью в этом дереве. Тогда если $1 \le i < j \le p$ и $\Delta Cost_T(v_i, v_{i+1}) \le 0$, то $\Delta Cost_T(v_j, v_{j+1}) < 0$.

Доказательство. Согласно предложению 1 справедливо соотношение

$$\varphi_{e_i}(\alpha_{v_i}(e_i)) - \varphi_{e_i}(\alpha_{v_{i+1}}(e_i)) \le 0.$$

Поскольку функция $\varphi_{e_i}(x)$ по определению является строго возрастающей, имеет место неравенство $\alpha_{v_i}(e_i) \le \alpha_{v_{i+1}}(e_i)$. Кроме того,

$$\alpha_{v_j}(e_j) < \alpha_{v_i}(e_i) \text{ и } \alpha_{v_{i+1}}(e_i) < \alpha_{v_{j+1}}(e_j),$$

так как $V_{e_j,v_j} \subset V_{e_i,v_i}$ и $V_{e_i,v_{i+1}} \subset V_{e_j,v_{j+1}}$. Следовательно, $\alpha_{v_j}(e_j) < \alpha_{v_{j+1}}(e_j)$. В силу того что функция $\varphi_{e_j}(x)$ по определению является строго возрастающей, справедливо соотношение

$$\varphi_{e_j}(\alpha_{v_j}(e_j)) - \varphi_{e_j}(\alpha_{v_{j+1}}(e_j)) < 0.$$

Из предложения 1 теперь немедленно вытекает требуемое.

Итак, функционал $Cost_T(u)$ удовлетворяет условию монотонности.

3.2. О задаче поиска дисперсионных медиан

Пусть $G = (V, E)$ — связный обыкновенный граф и пусть вершинам $v \in V$ приписаны положительные случайные величины q_v с известными законами распределения. Условимся, что все случайные величины q_v независимы. Каждому ребру $e \in E$ поставим в соответствие положительную длину l_e, и *длиной маршрута* $e_1, e_2, \ldots, e_p$ назовем величину $\sum\limits_{i=1}^{p} l_{e_i}$. Длина кратчайшего маршрута, соединяющего несовпадающие вершины v и w, называется *расстоянием* между v и w и обозначается через $d(v, w)$. Для любой вершины v по определению $d(v, v) = 0$.

Следуя [2], *дисперсионной медианой* будем называть любую вершину v^*, минимизирующую функционал

$$DCost_G(u) = \sum_{v \in V} Dq_v \cdot d^2(u, v).$$

Задача поиска дисперсионных медиан графа G заключается в отыскании всех вершин этого графа, являющихся дисперсионными медианами.

Рассмотрим дерево $T = (V, E)$. Через $T_1 = (V_1, E_1)$ и $T_2 = (V_2, E_2)$ будем обозначать подграфы, на которые распадается дерево T при удалении ребра $e = \{u, v\}$, $u \in V_1$, $v \in V_2$. Положим

$$B_e(u) = \sum_{w \in V_1} Dq_w, \qquad B_e(v) = \sum_{w \in V_2} Dq_w,$$
$$A_e(u) = \sum_{w \in V_1} Dq_w \cdot d(u, w) + \frac{l_e \cdot B_e(u)}{2},$$
$$A_e(v) = \sum_{w \in V_2} Dq_w \cdot d(v, w) + \frac{l_e \cdot B_e(v)}{2}.$$

Важные для нас свойства функционала $DCost_T(w)$ описываются следующими двумя предложениями, идея которых заимствована в [2].

Предложение 3. *Пусть $T = (V, E)$ — дерево, на множестве вершин которого определен функционал $DCost_T(w)$. Тогда вариация $\Delta DCost_T(u, v)$ этого функционала при переходе от вершины u к смежной вершине v равна*

$$-2l_{\{u,v\}} \cdot \left[A_{\{u,v\}}(u) - A_{\{u,v\}}(v)\right].$$

Доказательство. Действительно,

$$\begin{aligned} \Delta DCost_T(u, v) &= \sum_{w \in V} Dq_w \cdot d^2(u, w) - \sum_{w \in V} Dq_w \cdot d^2(v, w) = \\ &= \sum_{w \in V_1} Dq_w \cdot d^2(u, w) + \sum_{w \in V_2} Dq_w \cdot (l_{\{u,v\}} + d(v, w))^2 - \end{aligned}$$

$$
\begin{aligned}
& - \sum_{w\in V_2} Dq_w \cdot d^2(v,w) - \sum_{w\in V_1} Dq_w \cdot (l_{\{u,v\}} + d(u,w))^2 = \\
= \quad & -2l_{\{u,v\}} \cdot \left[\left(\sum_{w\in V_1} Dq_w \cdot d(u,w) + \frac{l_{\{u,v\}} \cdot B_{\{u,v\}}(u)}{2} \right) - \right. \\
& \left. - \left(\sum_{w\in V_2} Dq_w \cdot d(v,w) + \frac{l_{\{u,v\}} \cdot B_{\{u,v\}}(v)}{2} \right) \right] = \\
= \quad & -2l_{\{u,v\}} \cdot \left[A_{\{u,v\}}(u) - A_{\{u,v\}}(v) \right].
\end{aligned}
$$

Предложение 3 доказано.

Предложение 4. *Пусть $T = (V, E)$ — дерево, на множестве вершин которого определен функционал $DCost_T(w)$, и пусть маршрут*

$$v_1, e_1, v_2, e_2, \ldots, e_p, v_{p+1}$$

является простой цепью в этом дереве. Тогда если $1 \le i < j \le p$ и $\Delta DCost_T(v_i, v_{i+1}) \le 0$, то $\Delta DCost_T(v_j, v_{j+1}) < 0$.

Доказательство. Для каждой вершины $v \in V$ имеет место соотношение $Dq_v > 0$, а каждому ребру $e \in E$ приписана положительная длина l_e. Следовательно, по определению справедливы неравенства

$$A_{e_j}(v_j) > A_{e_i}(v_i) \text{ и } A_{e_j}(v_{j+1}) < A_{e_i}(v_{i+1}).$$

Отсюда

$$A_{e_j}(v_j) - A_{e_j}(v_{j+1}) > A_{e_i}(v_i) - A_{e_i}(v_{i+1}) \ge 0.$$

Из предложения 3 теперь немедленно вытекает требуемое.

Итак, функционал $DCost_T(w)$ удовлетворяет условию монотонности.

3.3. О задаче поиска центров

Пусть $G = (V, E)$ — связный обыкновенный граф, каждому ребру e которого поставлена в соответствие положительная длина l_e. Следуя [2], назовем *эксцентриситетом* вершины v величину $e(v) = \max_{u\in V} d(v, u)$, где $d(v, u)$ — это расстояние между вершинами v и u. *Центром* графа G будем называть любую вершину v^*, удовлетворяющую соотношению

$$e(v^*) = \min_{u\in V} e(u).$$

Задача поиска центров в графе G заключается в отыскании всех вершин, являющихся центрами.

Из следующих лемм вытекает, что функционал $e(v)$, определенный на множестве вершин дерева, удовлетворяет условию монотонности.

Лемма 2. *Пусть каждому ребру e дерева $T = (V, E)$ поставлена в соответствие положительная длина l_e и пусть v^* — произвольный центр этого дерева. Тогда для любой вершины $v \in V$ существует простая цепь длины $e(v)$, исходящая из v и проходящая через центр v^*.*

Доказательство. Предположим, что для некоторой вершины v любая исходящая из нее простая цепь длины $e(v)$ не проходит через центр v^*. Рассмотрим два случая.

а) Вершина v и центр v^* смежны. Пусть e — соединяющее их ребро. Если вершина v — центр дерева T, то заключение леммы очевидно. Поэтому будем считать, что вершина v не является центром. Из начального предположения следует, что длина любой простой цепи, исходящей из вершины v и проходящей через центр v^*, меньше чем $e(v)$. Следовательно, $e(v) = e(v^*) - l_e < e(v^*)$. Противоречие доказывает требуемое.

б) Вершины v и v^* не являются смежными. Пусть $C(v, w)$ — произвольная простая цепь длины $e(v)$, соединяющая вершины v и w. Обозначим через u смежную с центром v^* вершину простой цепи $C(v^*, v)$, соединяющей в дереве T вершины v^* и v. По определению $e(u) \geq d(u, w)$. Согласно начальному предположению величина $d(u, w)$ больше, чем длина любой простой цепи, исходящей из вершины u и проходящей через центр v^*. Противоречие с пунктом "а" доказывает требуемое.

Лемма 3. *Пусть каждому ребру e дерева $T = (V, E)$ поставлена в соответствие положительная длина l_e и пусть маршрут*

$$v_1, e_1, v_2, e_2, \ldots, e_p, v_{p+1}$$

является простой цепью в этом дереве. Тогда если $1 \leq i < j \leq p$ и $\Delta e(v_i, v_{i+1}) \leq 0$, то $\Delta e(v_j, v_{j+1}) < 0$.

Доказательство. Из леммы 2 и из определения эксцентриситета вытекает, что если $\Delta e(v_i, v_{i+1}) \leq 0$, то либо вершины v_i и v_{i+1} являются центрами, либо e_i — это первое ребро простой цепи от v_{i+1} до некоторого центра дерева T. В обоих случаях ребро e_j оказывается первым ребром простой цепи, соединяющей вершину v_{j+1} и некоторый центр дерева T. Следовательно, согласно лемме 2 и определению эксцентриситета имеет место соотношение

$$\Delta e(v_j, v_{j+1}) = e(v_j) - e(v_{j+1}) = -l_{e_j} < 0.$$

4. О трудоемкости предложенного алгоритма

Пусть критерии оптимальности размещения определены так, как это предусмотрено условиями рассмотренных в разделе 3 задач. Вычислим временную сложность предложенного алгоритма.

Теорема 2. *Пусть $T = (V, E)$ — дерево, на множестве вершин которого определена векторная целевая функция*

$$(Cost_T^1(v), \ldots, Cost_T^L(v), DCost_T^{L+1}(v), \ldots, DCost_T^M(v), e^{M+1}(v), \ldots, e^N(v)).$$

Если дерево T задано списками смежностей, то трудоемкость отыскания паретовского множества $U(T)$ с помощью предложенного алгоритма равна $O(N \cdot |V|)$.

Доказательство. Известно, что для деревьев существуют линейные по числу вершин алгоритмы поиска оптимальных источников (медиан), дисперсионных медиан и центров (см. работы [2] и [3]). Следовательно, действие 1 предложенного алгоритма может быть выполнено за время $O(N \cdot |V|)$. Пусть вершина s была помечена при выполнении действия 1. Ясно, что дерево T' порождается множеством вершин простых цепей, соединяющих вершину s с другими найденными при выполнении действия 1 вершинами. Поэтому для выполнения действия 2 достаточно один раз просмотреть множество V с помощью поиска в глубину, начав обход вершин дерева с вершины s. Таким образом, трудоемкость действия 2 есть $O(|V|)$ [4]. Легко видеть, что временная сложность действия 3 равна $O(N)$, а действия 4 — $O(N \cdot |V|)$. Из справедливости данных оценок вытекает требуемое.

В заключение отметим следующее. Для любого решения $v \in V$ трудоемкость проверки его принадлежности или непринадлежности паретовскому множеству $U(T)$ с помощью известных в настоящее время алгоритмов в лучшем случае также составляет $O(N \cdot |V|)$. Поэтому в рассматриваемых условиях предложенный алгоритм заведомо превосходит по эффективности алгоритмы, основанные на переборе вариантов.

Литература

1. Емеличев В. А., Перепелица В. А. Сложность дискретных многокритериальных задач // Дискрет. математика. 1994. Т.6, вып. 1. С.3–33.
2. Замбицкий Д. К., Лозовану Д. Д. Алгоритмы решения оптимизационных задач на сетях. Кишинев: Штиинца, 1983.
3. Кисляков А. К. Алгоритмы нахождения медиан в деревьях и деревьях Хусими // Тр. Второй международной конференции “Матем. алгоритмы” (Нижний Новгород, 26 июня–1 июля 1995 г.). Нижний Новгород: ННГУ, 1997. С. 96–103.
4. Емеличев В. А., Мельников О. И., Сарванов В. И., Тышкевич Р. И. Лекции по теории графов. М.: Наука, 1990.

Статья поступила 17.02.1999 г.