УДК 512.53

А. Я. Овсянников

ПРОЕКТИРОВАНИЯ ВПОЛНЕ ПРОСТЫХ ПОЛУГРУПП*

Рассмотрение полугрупп ряда известных классов (как, например, инверсных, клиффордовых, вполне простых) в качестве унарных полугрупп, т.е. полугрупп с дополнительной унарной операцией, можно считать уже традиционным. В рамках этого подхода естественно интересоваться проблематикой, связанной с решетками всех унарных подполугрупп. Данная работа посвящена исследованию некоторых свойств и, главным образом, изоморфизмов решеток всех унарных подполугрупп вполне простой полугруппы; такие изоморфизмы будем (по аналогии с соответствующей терминологией для групп) называть *проектированиями.* Очевидно, что унарные подполугруппы вполне простой полугруппы исчерпываются в точности ее вполне простыми подполугруппами. Решетку всех вполне простых подполугрупп вполне простой полугруппы S (включая пустое множество) обозначим через $\mathrm{Subcs}S$; под $\mathrm{Sub}S$ будем подразумевать решетку всех подполугрупп полугруппы S. Как отмечено в [1] (п. 2.4), решетка $\mathrm{Subcs}S$ не является в общем случае подрешеткой решетки $\mathrm{Sub}S$ для вполне простой полугруппы S. Разумеется, в случае периодической вполне простой полугруппы S имеет место равенство $\mathrm{Sub}S = \mathrm{Subcs}S$.

Решетка $\mathrm{Subcs}S$ для вполне простой полугруппы S уже исследовалась в работах [2] и [3]. В [2] получено описание вполне простых подполугрупп полугруппы S в терминах ее рисовского матричного представления и с помощью этого описания охарактеризованы вполне простые полугруппы S, у которых решетка $\mathrm{Subcs}S$ дистрибутивна или модулярна. В [3] описаны вполне простые полугруппы S, у которых решетка $\mathrm{Subcs}S$ удовлетворяет разнообразным обобщениям модулярности.

В настоящей работе предлагается другое описание любой вполне простой подполугруппы рисовской полугруппы матричного типа с помощью семейства подгрупп структурной группы, удовлетворяющих определенным условиям (см. предложение 1); оно эквивалентно описанию, полученному в [2], и потому предложение 1 приведено без доказательства. Предложение 2 позволяет представить строение решетки $\mathrm{Subcs}S$ в терминах решетки подполугрупп прямоугольной связки $S/\mathscr{H}$, где $\mathscr{H}$ обозначает соответствующее

*Работа выполнена при поддержке межвузовской научной программы «Университеты России — фундаментальные исследования» Министерства образования Российской Федерации (проект № 617).

отношение Грина на полугруппе S, и решетки подгрупп структурной группы полугруппы S. Как оказалось, это утверждение следует из результатов работы [4], относящихся к гораздо более общей ситуации.

С помощью предложений 1 и 2 изучаются как некоторые свойства решетки Subcs$S$, не рассматривавшиеся в [2] и [3], а именно выполнение на ней нетривиального тождества и дополняемость (см. теорему 1), так и проектирования вполне простых полугрупп, для которых решается проблема проективной классификации — аналог проблемы решеточной классификации для обычных полугрупп; см. [5], п. 23.3. Соответствующее утверждение доставляет теорема 2. Поскольку в случае периодической вполне простой полугруппы S, как было отмечено выше, имеет место равенство Sub$S$ = Subcs$S$, теорема 2 дает решение задачи X.13 из [5]. Она дает также необходимые условия изоморфизма решеток всех (а не только вполне простых) подполугрупп двух вполне простых полугрупп.

Результаты работы частично анонсированы в [6].

Через $\langle\langle X\rangle\rangle$ будем обозначать вполне простую подполугруппу вполне простой полугруппы, порожденную некоторым ее подмножеством X, а через Subgr$G$—решетку подгрупп группы G.

Для вполне простой полугруппы $S = \mathcal{M}(G, I, \Lambda, P)$ над группой G с сэндвич-матрицей $P = (p_{\lambda i})$ и подмножества A из S положим

$$\begin{gathered}
I_A = \{i \in I \mid (i, g, \lambda) \in A \text{ для некоторых } g \in G, \lambda \in \Lambda\},\\
\Lambda_A = \{\lambda \in \Lambda \mid (i, g, \lambda) \in A \text{ для некоторых } g \in G, i \in I\},\\
A_{i\lambda} = \{g \in G \mid (i, g, \lambda) \in A\} \text{ для всех } i \in I_A, \lambda \in \Lambda,\\
G_{i\lambda}(A) = p_{\lambda i}A_{i\lambda},\ G_\lambda(A) = \textstyle\bigcup_{i\in I_A} G_{i\lambda}(A).
\end{gathered}$$

Эти обозначения будут использоваться в дальнейшем без особых ссылок.

Предложение 1. *Пусть $S = \mathcal{M}(G, I, \Lambda, P)$ — вполне простая полугруппа над группой G с сэндвич-матрицей $P = (p_{\lambda i})$, A—непустое подмножество из S. Множество A является вполне простой подполугруппой из S тогда и только тогда, когда выполняются следующие условия:*

a) *для всех $i, j \in I_A$, $\lambda \in \Lambda_A$ имеют место равенства*

$$G_{i\lambda}(A) = G_{j\lambda}(A) = G_\lambda(A),$$

причем $G_\lambda(A)$ является подгруппой в G;

b) *для всех $i \in I_A$, $\lambda, \mu \in \Lambda_A$ имеет место равенство*

$$G_\mu(A) = p_{\mu i}p_{\lambda i}^{-1}G_\lambda(A)p_{\lambda i}p_{\mu i}^{-1};$$

c) *для всех $i, j \in I_A$, $\lambda, \mu \in \Lambda_A$ имеет место включение*

$$p_{\lambda i}p_{\mu i}^{-1}p_{\mu j}p_{\lambda j}^{-1} \in G_\lambda(A).$$

При этом $A = \{(i, a, \lambda) \mid i \in I_A,\ \lambda \in \Lambda_A,\ a \in p_{\lambda i}^{-1}G_\lambda(A)\}$.

Замечание. Заметим, что для задания непустой вполне простой подполугруппы A вполне простой полугруппы S в предложении 1 достаточно одной подгруппы $G_{\lambda_0}(A)$, которая содержит элементы $p_{\lambda_0 i}p_{\mu i}^{-1}p_{\mu j}p_{\lambda_0 j}^{-1}$ для всех $i, j \in I_A,\ \mu \in \Lambda_A$.

Из предложения 1 непосредственно вытекает

Следствие 1. *Пусть* $S = \mathcal{M}(G, I, \Lambda, P)$ *— вполне простая полугруппа над группой* G *с сэндвич-матрицей* $P = (p_{\lambda i})$*;* A, B *— непустые вполне простые подполугруппы из* S*. Включение* $A \subseteq B$ *имеет место тогда и только тогда, когда* $I_A \subseteq I_B,\ \Lambda_A \subseteq \Lambda_B,\ G_\lambda(A) \subseteq G_\lambda(B)$ *для некоторого* $\lambda \in \Lambda_A$.

Для полугруппы A через E_A, как обычно, обозначим множество всех идемпотентов из A. В случае, когда $A \in \mathrm{Sub}S$ для некоторой полугруппы S, возможно $A = \emptyset$; тогда будем считать, что $E_A = \emptyset$. Пусть S—вполне простая полугруппа. Определим на решетке $\mathrm{Subcs}S$ следующее отношение ρ: положим $A\,\rho\,B \ \Leftrightarrow\ E_A = E_B$.

Предложение 2. *Пусть* $S = \mathcal{M}(G, I, \Lambda, P)$ *— вполне простая полугруппа над группой* G *с сэндвич-матрицей* $P = (p_{\lambda i})$*. Отношение* ρ *является конгруэнцией на решетке* $\mathrm{Subcs}S$*. При этом фактор-решетка* $(\mathrm{Subcs}S)/\rho$ *изоморфна решетке подполугрупп* $\mathrm{Sub}(S/\mathscr{H})$ *прямоугольной полугруппы идемпотентов* $S/\mathscr{H}$ *и для любой непустой подполугруппы* A *из* $\mathrm{Subcs}S$ ρ*-класс* A^ρ*, содержащий* A*, изоморфен интервалу* $\mathbf{J} = [G_\lambda(\langle\!\langle E_A\rangle\!\rangle), G]$ *в решетке подгрупп* $\mathrm{Subgr}G$ *группы* G.

Доказательство. Первые два утверждения следуют из теоремы 3.4 работы [4], если спроецировать последнюю на вполне простые полугруппы. В этой работе дано и описание ρ-классов как некоторых интервалов в решетке $\mathrm{Subcs}S$. Однако извлечь из него прямо третье утверждение затруднительно.

Чтобы доказать это утверждение, рассмотрим ρ-класс A^ρ для непустой подполугруппы $A \in \mathrm{Subcs}S$. Тогда, очевидно, $\langle\!\langle E_A\rangle\!\rangle \in A^\rho$, причем $\langle\!\langle E_A\rangle\!\rangle$ есть наименьший элемент подрешетки A^ρ. Для любого $B \in A^\rho$ положим $\psi(B) = G_\lambda(B)$. Согласно предложению 1 отображение ψ инъективно отображает A^ρ в $\mathbf{J}$. Покажем, что ψ—сюръективное отображение. Возьмем $H \in \mathbf{J}$ и определим подмножество C из S, полагая $I_C = I_A,\ \Lambda_C = \Lambda_A,\ G_\lambda(C) = H$ и $G_{i\mu}(C) = p_{\mu i}p_{\lambda i}^{-1}Hp_{\lambda i}p_{\mu i}^{-1}$ для любых $i \in I_A,\ \mu \in \Lambda_A$. Так как $G_\lambda(\langle\!\langle E_A\rangle\!\rangle) \subseteq H$

и в силу условия «с» предложения 1 $p_{\lambda i}p_{\mu i}^{-1}p_{\mu j}p_{\lambda j}^{-1} \in G_\lambda(\langle\langle E_A\rangle\rangle)$ при любых $i, j \in I_A,\ \lambda, \mu \in \Lambda_A$, имеем

$$p_{\lambda i}p_{\mu i}^{-1}p_{\mu j}p_{\lambda j}^{-1} \in H \tag{1}$$

для всех $i, j \in I_A,\ \lambda, \mu \in \Lambda_A$. С помощью (1) нетрудно убедиться, что для множеств I_A, Λ_A и подгрупп $G_{i\mu}(C)$ выполняются условия «a»–«c» предложения 1. Таким образом, по предложению 1 C есть вполне простая подполугруппа (очевидно, лежащая в A^ρ и обладающая свойством $\psi(C) = H$). Следовательно, ψ — сюръективное отображение A^ρ на $\mathbf{J}$, т.е. биекция. В силу предложения 1, ψ является изотонным отображением, т.е. изоморфизмом решетки A^ρ на $\mathbf{J}$.

Предложение 2 позволяет в известном смысле представить строение решетки $\mathrm{Subcs}S$ через строение решетки подгрупп группы G и решетки подполугрупп прямоугольной полугруппы $I \times \Lambda$.

Как сообщил автору В. Б. Репницкий, им было независимо доказано утверждение предложения 2 в частном случае периодических вполне простых полугрупп (когда $\mathrm{Subcs}S = \mathrm{Sub}S$).

Для классов алгебр $\mathfrak{A}$ и $\mathfrak{B}$ данной сигнатуры через $\mathfrak{A}\circ\mathfrak{B}$ обозначим их *произведение в смысле А. И. Мальцева*; напомним, что этот класс состоит из всех алгебр A той же сигнатуры, имеющих такую конгруенцию σ, что $A/\sigma \in \mathfrak{B}$, а каждый класс конгруенции σ, являющийся подалгеброй в A, принадлежит $\mathfrak{A}$. Для класса вполне простых полугрупп $\mathfrak{C}$ через $\mathrm{Subcs}\mathfrak{C}$ обозначим класс решеток, изоморфных решеткам вполне простых подполугрупп полугрупп из $\mathfrak{C}$; через $\mathrm{Subgr}\mathfrak{G}$ обозначим класс решеток, изоморфных решеткам подгрупп групп из данного класса $\mathfrak{G}$ и в аналогичном смысле будем использовать обозначение $\mathrm{Sub}\mathfrak{S}$ для класса решеток, изоморфных решеткам подполугрупп полугрупп из данного класса $\mathfrak{S}$. Из предложения 2 немедленно получается следующее утверждение.

Следствие 2. *Пусть $\mathfrak{G}$ — некоторый класс групп, $\mathfrak{B}$ — некоторый класс прямоугольных полугрупп идемпотентов и $\mathfrak{C} = \mathfrak{G} \circ \mathfrak{B}$. Тогда, очевидно, $\mathfrak{C}$ есть некоторый класс вполне простых полугрупп, и*

$$\mathrm{Subcs}\mathfrak{C} \subseteq (\mathrm{Subgr}\mathfrak{G}) \circ (\mathrm{Sub}\mathfrak{B}).$$

Теорема 1. *Пусть S — вполне простая полугруппа над группой G.*

a) *Решетка* $\mathrm{Subcs}S$ *удовлетворяет нетривиальному тождеству тогда и только тогда, когда решетка подгрупп группы G удовлетворяет нетривиальному тождеству.*

b) *Решетка* $\mathrm{Subcs}S$ *есть решетка с дополнениями тогда и только тогда, когда полугруппа S идемпотентно порождена.*

Доказательство. Проверим утверждение «а». Так как G изоморфна подгруппе из S, если решетка Subcs$S$ удовлетворяет нетривиальному тождеству, то и решетка Subgr$G$ удовлетворяет (тому же самому) нетривиальному тождеству. Для доказательства обратной импликации нам потребуется следующее утверждение, легко проверяемое непосредственно. Оно сообщено автору В. Б. Репницким.

Лемма 1. *Пусть S—прямоугольная полугруппа идемпотентов. Тогда для любых $Y, X_1, X_2, X_3 \in \mathrm{Sub}S$ справедливо равенство*

$$Y \cap \langle X_1, X_2,\ X_3\rangle = \langle Y \cap \langle X_1, X_2\rangle,\ Y \cap \langle X_1, X_3\rangle,\ Y \cap \langle X_2, X_3\rangle\rangle,$$

т.е. в решетке Sub$S$ *выполняется тождество* 3*-дистрибутивности*

$$y \wedge (x_1 \vee x_2 \vee x_3) = (y \wedge (x_1 \vee x_2)) \vee (y \wedge (x_1 \vee x_3)) \vee (y \wedge (x_2 \vee x_3)).$$

Пусть на решетке Subgr$G$ выполняется нетривиальное тождество. Обозначим через $\mathfrak{X}$ многообразие решеток, порожденное Subgr$G$, и через $\mathfrak{Y}$ — многообразие решеток, заданное тождеством 3-дистрибутивности. Согласно следствию предложения 2 имеем Subcs$S \in \mathfrak{X} \circ \mathfrak{Y}$. В работе [7] доказано, что если $\mathfrak{A}$ и $\mathfrak{B}$ — собственные многообразия решеток (т.е. они отличны от класса всех решеток), то класс $\mathfrak{A} \circ \mathfrak{B}$ порождает собственное многообразие решеток. Следовательно, на решетке Subcs$S$ выполняется некоторое нетривиальное тождество. Утверждение «а» доказано.

Докажем утверждение «b». Пусть Subcs$S$ есть решетка с дополнениями. Тогда вполне простая подполугруппа K полугруппы S, порожденная всеми ее идемпотентами, имеет в Subcs$S$ дополнение D. Так как K имеет непустое пересечение с любой непустой подполугруппой из Subcs$S$, имеем $D = \emptyset$. Таким образом, $S = K$.

Обратно, пусть $S = \mathcal{M}(G, I, \Lambda, P)$ — идемпотентно порожденная вполне простая полугруппа и $A \in$ Subcs$S$. Если $A = S$, то $\emptyset$ является дополнением к A. Пусть $A \neq S$. Тогда существует идемпотент, не принадлежащий A. Это значит, что $I_A \neq I$ или $\Lambda_A \neq \Lambda$. Ради определенности предположим, что имеет место первое условие. Тогда вполне простая подполугруппа

$$D = \{(j, g, \lambda) \mid j \in I \backslash I_A,\ g \in G,\ \lambda \in \Lambda\},$$

как легко видеть, является дополнением к A в решетке Subcs$S$.

Проблему проективной классификации для вполне простых полугрупп, заданных рисовским матричным представлением, решает

Теорема 2. *Пусть $S = \mathcal{M}(G, I, \Lambda, P)$, $T = \mathcal{M}(H, J, \mathrm{M}, Q)$ — вполне простые полугруппы, заданные рисовским матричным представлением. Для того чтобы S и T проектировались друг на друга, необходимо и достаточно, чтобы группы G и H проектировались друг на друга, причем существовали бы такое проектирование φ группы G на H и такие биекции $a : I \longrightarrow aI$, $\beta : \Lambda \longrightarrow \beta\Lambda$ (здесь $\{aI, \beta\Lambda\} = \{J, \mathrm{M}\}$), что для любых $i, j \in I, \lambda, \mu \in \Lambda$ справедливо*

$$\varphi\langle\!\langle p_{\lambda i}p_{\mu i}^{-1}p_{\mu j}p_{\lambda j}^{-1}\rangle\!\rangle = \begin{cases} \langle\!\langle q_{\beta\lambda ai}q_{\beta\mu ai}^{-1}q_{\beta\mu aj}q_{\beta\lambda aj}^{-1}\rangle\!\rangle & , \text{ если } aI = J,\ \beta\Lambda = M; \\ \langle\!\langle q_{aj\beta\lambda}^{-1}q_{aj\beta\mu}q_{ai\beta\mu}^{-1}q_{ai\beta\lambda}\rangle\!\rangle & , \text{ если } aI = M,\ \beta\Lambda = I. \end{cases} \tag{2}$$

Доказательство. Необходимость. Пусть ψ — проектирование полугруппы S на T. Очевидно, что если $e \in E_S$, то $\psi\langle e\rangle = \langle f\rangle$ для некоторого $f \in E_T$. Таким образом, ψ индуцирует некоторую биекцию γ множества E_S на E_T. Эта биекция обладает следующим очевидным свойством: для любой непустой вполне простой подполугруппы A из S и любого $e \in E_S$ $\ e \in A \Leftrightarrow \gamma e \in \psi A$. Следовательно, для любых $A, B \in \mathrm{Subcs}S$ $\ E_A = E_B \Leftrightarrow E_{\psi A} = E_{\psi B}$. Рассматривая на S и T соответствующие конгруэнции и применяя предложение 2, констатируем, что прямоугольные полугруппы $I \times \Lambda$ и $J \times \mathrm{M}$ проектируются друг на друга, т.е. они решеточно изоморфны. В силу теоремы 30.8 [5] они изоморфны или антиизоморфны. В первом случае существуют биекции a множества I на J и β множества Λ на M, а во втором — существуют биекции a множества I на M и β множества Λ на J. Предположим для определенности, что имеет место первый случай; во втором рассуждения проводятся совершенно аналогично.

Для любой подгруппы F группы G положим

$$C(i, F, \lambda) = \{(i, p_{\lambda i}^{-1}f, \lambda) \mid f \in F\}. \tag{3}$$

Легко проверить, что $C(i, F, \lambda)$ есть подгруппа максимальной подгруппы $S_{i\lambda} = \{(i, g, \lambda) \mid g \in G\}$ вполне простой полугруппы S. Аналогичное (3) обозначение будем использовать и для подгрупп структурной группы H вполне простой полугруппы T. Нам потребуется следующее непосредственно проверяемое утверждение.

Лемма 2. *Пусть $S = \mathcal{M}(G, I, \Lambda, P)$ — вполне простая полугруппа над группой G с сэндвич-матрицей $P = (p_{\lambda i})$, $S_{i\lambda}$ — максимальная подгруппа полугруппы S. Тогда отображение $\sigma_{i\lambda} : \mathrm{Subcs}G \longrightarrow \mathrm{Subcs}S_{i\lambda}$, определенное равенством*

$$\sigma_{i\lambda}F = C(i, F, \lambda) \tag{4}$$

для любой подгруппы F группы G, является проектированием группы G на группу $S_{i\lambda}$.

Зафиксируем $i \in I$ и $\lambda \in \Lambda$ и рассмотрим максимальную подгруппу $S_{i\lambda}$ полугруппы S. Она изоморфна G. Ясно, что $\psi S_{i\lambda} = T_{ai\beta\lambda}$. Согласно лемме 2 существует проектирование $\sigma_{i\lambda}$ группы G на S, определенное формулой (4), а также проектирование $\tau_{ai\beta\lambda}$ группы H на $T_{ai\beta\lambda}$, определенное формулой

$$\tau_{ai\beta\lambda}K = C(ai, K, \beta\lambda) \tag{5}$$

для любой подгруппы K группы H. Положим

$$\varphi_{i\lambda} = \tau^{-1}_{ai\beta\lambda}\psi\sigma_{i\lambda}. \tag{6}$$

Очевидно, что $\varphi_{i\lambda}$ есть проектирование группы G на группу H.

Покажем, что для любых $i, j \in I,\ \lambda \in \Lambda$ справедливо $\varphi_{i\lambda} = \varphi_{j\lambda}$. Пусть F — произвольная подгруппа в G. Положим $N_i = \varphi_{i\lambda}(F),\ N_j = \varphi_{j\lambda}(F)$. Рассмотрим в S подмножество $D = C(i, F, \lambda) \cup C(j, F, \lambda)$. Легко проверить, что оно будет вполне простой подполугруппой и даже прямоугольной группой. Рассмотрим подполугруппу ψD. Она порождается подполугруппами $\psi C(i, F, \lambda) = C(ai, N_i, \beta\lambda)$ и $\psi C(j, F, \lambda) = C(aj, N_j, \beta\lambda)$. Поскольку ψD расположена в одном $\mathcal{L}$-классе полугруппы T, идемпотенты которого образуют левосингулярную полугруппу, она является прямоугольной группой. Отсюда легко следует, что $N_i = N_j$.

Аналогично проверяется, что для любых $i \in I,\ \lambda, \mu \in \Lambda$ справедливо равенство $\varphi_{i\lambda} = \varphi_{i\mu}$. Таким образом, для любых $i, j \in I,\ \lambda, \mu \in \Lambda$, справедливо $\varphi_{i\lambda} = \varphi_{i\mu}$. Соответствующее проектирование группы G на H мы и обозначим через φ.

Рассмотрим в S вполне простую подполугруппу A, порожденную идемпотентами из максимальных подгрупп $S_{i\lambda},\ S_{j\mu}$. Тогда $B = \psi A$ порождается идемпотентами из $T_{ai\beta\lambda},\ T_{aj\beta\mu}$. С помощью предложения 1 нетрудно убедиться, что $A \cap S_{i\lambda} = C(i, F, \lambda)$, где $F = \langle\!\langle p_{\lambda i}p^{-1}_{\mu i}p_{\mu j}p^{-1}_{\lambda j}\rangle\!\rangle$, а $B \cap T_{ai\beta\lambda} = C(ai, K, \beta\lambda)$, где $K = \langle\!\langle q_{\beta\lambda ai}q^{-1}_{\beta\mu ai}q_{\beta\mu aj}q^{-1}_{\beta\lambda aj}\rangle\!\rangle$.

Ясно, что $\psi(A \cap S_{i\lambda}) = B \cap T_{ai\beta\lambda}$. Используя равенства (4)–(6), получаем $\varphi F = \varphi_{i\lambda}F = \tau^{-1}_{ai\beta\lambda}\psi\sigma_{i\lambda}F = \tau^{-1}_{ai\beta\lambda}\psi(A \cap S_{i\lambda}) = \tau_{ai\beta\lambda}(B \cap T_{ai\beta\lambda}) = K$, откуда $\varphi F = K$. Учитывая определения F и K, убеждаемся, что условие (2) в рассматриваемом случае ($aI = J$, $\beta\Lambda = \mathrm{M}$) доказано. Таким образом, необходимость условий теоремы 2 доказана.

Достаточность. Пусть все условия теоремы выполняются для вполне простых полугрупп S и T. Предположим для определенности, что $aI = J$ и

$\beta\Lambda = \mathrm{M}$ (другой случай рассматривается совершенно аналогично). Зафиксируем непустую вполне простую подполугруппу A в S. В соответствии с определением (3) из предложения 1 легко вывести, что

$$A = \bigcup_{i \in I_A,\, \lambda \in \Lambda_A} C(i, G_\lambda(A), \lambda),$$

где подгруппы $G_\lambda(A)$ группы G удовлетворяют условиям «b» и «c» предложения 1. В силу условия (2) доказываемой теоремы подгруппы $\varphi G_\lambda(A)$ группы H также удовлетворяют условиям, получающимся из упомянутых условий «b» и «c» заменой коэффициентов $p_{\lambda i}$ на $q_{\beta\lambda ai}$. По предложению 1 подмножество

$$B = \bigcup_{i \in I_A,\, \lambda \in \Lambda_A} C(ai, \varphi G_\lambda(A), \beta\lambda)$$

будет вполне простой подполугруппой полугруппы T. Положим $\psi A = B$. Полагая $\psi\emptyset = \emptyset$, легко проверить непосредственно, что ψ является изотонной биекцией решетки $\mathrm{Subcs}S$ на $\mathrm{Subcs}T$. Теорема 2 полностью доказана.

Следствие 3. *Пусть $S = G \times E$ — прямоугольная полугруппа. Вполне простая полугруппа T проектируется на S тогда и только тогда, когда $T = H \times F$, где H — группа, проектирующаяся на G, F — прямоугольная полугруппа идемпотентов, изоморфная или антиизоморфная E.*

Доказательство. Легко понять, что в любом рисовском матричном представлении полугруппы S сэндвич-матрица состоит лишь из единиц группы G. Непосредственный подсчет показывает, что условие (2) теоремы 2 в этом случае обеспечивает выполнение указанного свойства для сэндвич-матрицы вполне простой полугруппы T. Утверждение следствия теперь непосредственно вытекает из теоремы.

Проблема проективной определяемости для вполне простых полугрупп остается пока открытой.

Из предложения 31.1.2 [5] следует, что при изоморфизме решетки $\mathrm{Sub}S$ вполне простой полугруппы S на решетку $\mathrm{Sub}T$ для произвольной полугруппы T последняя оказывается вполне простой, если S несингулярна или не является группой, имеющей негрупповые решеточно изоморфные образы (такие группы полностью описаны в теореме 27.2 из [5]); при этом изоморфизме вполне простые подполугруппы из S переходят на вполне простые подполугруппы из T, так что изоморфизм решеток $\mathrm{Sub}S$ и $\mathrm{Sub}T$ влечет за собой изоморфизм решеток $\mathrm{Subcs}S$ и $\mathrm{Subcs}T$. Отсюда получается следующее утверждение.

Следствие 4. *Пусть S — вполне простая полугруппа, не являющаяся сингулярной полугруппой или группой, решеточно изоморфной полугруппе, не являющейся группой. Тогда любая решеточно изоморфная S полугруппа T является вполне простой и для матричных представлений полугрупп S и T справедливо заключение теоремы 2.*

Автор выражает глубокую благодарность Л. Н. Шеврину за внимание к работе, а также В. Б. Репницкому и С. И. Кацману за полезные обсуждения.

Литература

1. Шеврин Л. Н. Полугруппы // Общая алгебра. Т.2. М.: Наука, 1991. Гл.4. С.11–191.

2. Johnston K. Subalgebra lattices of completely simple semigroups // Semigroup Forum. 1984. Vol.29. P.109–121.

3. Johnston K. Semimodularity and weak modularity in subalgebra lattices of completely simple semigroups // Semigroup Forum. 1986. Vol.33. P.285–292.

4. Johnston K. Decomposition of regular subsemigroup lattices // Semigroup Forum. 1994. Vol.49. P.131–135.

5. Шеврин Л. Н., Овсянников А. Я. Полугруппы и их подполугрупповые решетки // Свердловск: Изд-во Урал. ун-та, 1990. Ч.1; 1991. Ч.2. Англ. перевод: Shevrin L. N., Ovsyannikov A. J. Semigroups and their subsemigroup lattices. Dordrecht: Kluwer Academic Publishers, 1996.

6. Овсянников А. Я. Унарные подполугруппы вполне простых полугрупп // Третья Международная конференция по алгебре: Сб. тез. Красноярск, 1993. С. 242–243.

7. Лендер В. Б. Об ограниченных предмногообразиях структур // Мат. записки Урал. ун-та. (Алгебраические системы. Многообразия. Решетки подсистем.) Т.13, №3. Свердловск, 1983. С.87–94.

Статья поступила 25.08.2000 г.