УДК 517.977

Н. Ю. Лукоянов

ОБ ОБОБЩЕНИЯХ УРАВНЕНИЯ ГАМИЛЬТОНА–ЯКОБИ ДЛЯ НАСЛЕДСТВЕННЫХ СИСТЕМ*

В статье рассматриваются функциональные уравнения типа Гамильтона–Якоби (Г-Я) с коинвариантными (ci) производными [1]. Такие уравнения возникают, например, в качественной теории дифференциальных уравнений с последействием при исследовании первых интегралов [1, 2], а также в теории управления с наследственной информацией при изучении функционала цены (оптимального гарантированного результата) [1,3–8]. Наряду с трудностями, связанными с анализом уравнений Г-Я [9–13], данные уравнения осложнены новыми особенностями, обусловленными эффектом последействия.

Подобно задачам с обычными уравнениями Г-Я задачи с функциональными уравнениями типа Г-Я в ci-производных часто не имеют решения, понимаемого в классическом смысле, как ci-гладкий функционал, удовлетворяющий уравнению во всех точках рассматриваемой области. С другой стороны, существуют функционалы, удовлетворяющие уравнению в точках своей ci-дифференцируемости (но не во всех точках ci-дифференцируемые), среди которых, наложив дополнительные требования на свойства искомого решения (как правило, продиктованные содержательным смыслом задачи), можно выбрать единственный, трактуемый как обобщенное решение уравнения. Например, для уравнений с ci-производными, возникающих в задачах управления с наследственной информацией, таким обобщенным решением является функционал цены, при этом в качестве дополнительного критерия выступают свойства u- и v-стабильности [3–7].

Статья посвящена развитию теории обобщенных минимаксных решений, построенной А. И. Субботиным для уравнений с частными производными первого порядка [9, 10], для функциональных уравнений типа Г-Я с ci-производными.

В первой части дано соответствующее определение минимаксного решения (МР) через нелокальные свойства стабильности относительно характеристических дифференциальных включений с последействием. Установлены теоремы существования, единственности и корректности МР задачи Коши с условием на правом конце. Определенное МР удовлетворяет уравне-

*Работа выполнена при финансовой поддержке РФФИ (грант №99-01-00144).

нию в точках своей ci-дифференцируемости, но в целом может не быть ci-дифференцируемым, поэтому является обобщенным. Оно имеет содержательный смысл, отвечающий, например, требованиям теории управления. Именно, как показано в [7], для широкого круга задач управления с наследственной информацией МР соответствующего уравнения с ci-производными совпадает с функционалом цены.

Во второй части исследуются инфинитезимальные свойства МР. На основе понятия верхних и нижних производных функционалов по многозначным направлениям получены дифференциальные неравенства, эквивалентные определяющим МР свойствам стабильности. Показано, что эти неравенства являются естественным обобщением рассматриваемых уравнений с ci-производными. Как следствие основных результатов, указаны удобные для проверки необходимые и достаточные условия требуемой стабильности кусочно ci-гладких МР. Далее, в соответствии с методами негладкого анализа [9, 13, 14] введены понятия инвариантных (i) суб- (супер-) дифференциалов и i-суб- (i-супер-) градиентов, обобщающие понятия i-дифференциала и ci-производных [1]. На этой основе дано определение вязкостного, в смысле М. Дж. Крэндалла и П.-Л. Лионса (см., например, [11]), решения (ВР) функциональных уравнений типа Г-Я с ci-производными. Показано, что МР является ВР. Тем самым, в частности, установлено существование ВР.

1. Уравнение типа Гамильтона–Якоби с коинвариантными производными

Будем обозначать через $C([t_1,t_2],\mathbb{R}^n)$, где $t_1,t_2\in\mathbb{R}$, $t_1\le t_2$, пространство непрерывных функций $x[\cdot]=x[t_1[\cdot]t_2]:[t_1,t_2]\mapsto\mathbb{R}^n$; при этом через $x[t]$ будем обозначать значение функции $x[\cdot]$ в точке $t\in[t_1,t_2]$, а через $x[t'[\cdot]t'']$ – ее сужение на $[t',t'']\subset[t_1,t_2]$. Пусть $t_*,t_0,T\in\mathbb{R}$, $t_*\le t_0<T$, $C_*=C([t_*,T],\mathbb{R}^n)$, $C_0=C([t_0,T],\mathbb{R}^n)$ и G – множество пар $g=(t,x[t_*[\cdot]t])$ таких, что $t\in[t_0,T]$, $x[t_*[\cdot]t]\in C([t_*,t],\mathbb{R}^n)$. На G определим функцию расстояния

$$\rho(g_1,g_2)=\max\{\rho^*(g_1,g_2),\rho^*(g_2,g_1)\}, \tag{1.1}$$
$$g_1=(t_1,x^{(1)}[t_*[\cdot]t_1])\in G,\ g_2=(t_2,x^{(2)}[t_*[\cdot]t_2])\in G,$$

где

$$\rho^*(g_{i+1},g_{2-i})=\max_{t_*\le\xi\le t_{i+1}}\ \min_{t_*\le\eta\le t_{2-i}}\left[(\xi-\eta)^2+\|x^{(i+1)}[\xi]-x^{(2-i)}[\eta]\|^2\right]^{1/2},$$
$$i=0,1.$$

Здесь и далее $\|\cdot\|$ – евклидова норма вектора. Всюду ниже свойства непрерывности рассматриваемых величин по $g=(t,x[t_*[\cdot]t])$ понимаются относительно изменения, оцениваемого функцией ρ.

В [1, с.28–50] введено понятие коинвариантных (ci) производных функционалов $\varphi(t, x[t_*[\cdot]t])$, определенных на кусочно-непрерывных функциях $x[t_*[\cdot]t]$. Далее подобные производные рассматриваются для функционалов $\varphi : G \mapsto \mathbb{R}$.

Пусть $g = (t, x[t_*[\cdot]t]) \in G$, $t < T$; $\mathrm{Lip}(g)$ — множество функций $y[\cdot] \in C_*$, совпадающих с $x[t_*[\cdot]t]$ на $[t_*, t]$, каждая из которых с некоторой (своей) константой удовлетворяет на $[t, T]$ условию Липшица.

Определение 1.1. *Функционал $\varphi : G \mapsto \mathbb{R}$ назовем коинвариантно дифференцируемым в точке g относительно $\mathrm{Lip}(g)$ (ci-дифференцируемым в g), если существуют такие число $\partial_t\varphi(g)$ и n-вектор $\nabla\varphi(g)$, что для любой функции $y[\cdot] \in \mathrm{Lip}(g)$ выполняется равенство*

$$\begin{gathered}\varphi(t+\delta, y[t_*[\cdot]t+\delta]) - \varphi(t, x[t_*[\cdot]t]) = \\ = \partial_t\varphi(g)\delta + \langle \nabla\varphi(g), y[t+\delta] - x[t]\rangle + o_{y[\cdot]}(\delta), \quad \delta \in [0, T-t],\end{gathered} \tag{1.2}$$

где $o_{y[\cdot]}(\delta)$ зависит от выбора $y[\cdot] \in \mathrm{Lip}(g)$, $o_{y[\cdot]}(\delta)/\delta \to 0$ при $\delta \to +0$.

Здесь и далее $\langle\cdot,\cdot\rangle$ – скалярное произведение векторов.

Величины $\partial_t\varphi(g)$ и $\nabla\varphi(g)$ назовем соответственно ci-производной по t и ci-градиентом функционала φ в точке g. Функционал φ назовем ci-дифференцируемым, если он ci-дифференцируем в каждой точке $g = (t, x[t_*[\cdot]t]) \in G$, $t < T$. Непрерывный ci-дифференцируемый функционал φ будем называть ci-гладким.

Заметим, что если некоторый функционал $\varphi(t, x[t_*[\cdot]t])$, определенный на кусочно-непрерывных функциях $x[t_*[\cdot]t]$, ci-дифференцируем в точке $g^* = (t^*, x^*[t_*[\cdot]t^*]) \in G$, $t^* < T$, относительно $\mathrm{Lip}(g^*)$ в смысле определения из [1], то его сужение φ_G на непрерывные функции будет ci-дифференцируемо в g^* в смысле определения 1.1, причем соответствующие коинвариантные производные будут совпадать.

Класс ci-дифференцируемых функционалов достаточно широк. Например, многие функционалы, представимые в интегральной форме, при достаточно естественных предположениях ci-дифференцируемы; при этом в большинстве случаев ci-производные могут быть вычислены стандартными способами, опирающимися на правила дифференцирования обычных функций конечномерного аргумента. Более подробные сведения о свойствах, способах вычисления и некоторых применениях ci-производных функционалов можно найти в [1].

Предметом исследования настоящей работы являются следующее функциональное уравнение типа Гамильтона–Якоби с ci-производными:

$$\partial_t\varphi(g) + H(g, \nabla\varphi(g)) = 0, \quad g = (t, x[t_*[\cdot]t]) \in G,\ t < T, \tag{1.3}$$

и задача Коши для него при условии на правом конце

$$\varphi(T, x[t_*[\cdot]T]) = \sigma(x[t_0[\cdot]T]), \quad x[\cdot] \in C_* \tag{1.4}$$

(в соответствии с принятыми обозначениями здесь $x[\cdot] = x[t_*[\cdot]T]$, а $x[t_0[\cdot]T]$ — сужение функции $x[\cdot]$ на $[t_0, T]$).

Будем предполагать, что функционал $\sigma : C_0 \mapsto \mathbb{R}$ непрерывен, а функционал $H : G \times \mathbb{R}^n \mapsto \mathbb{R}$, называемый гамильтонианом, удовлетворяет следующим условиям.

(1_H) Для любого $s \in \mathbb{R}^n$ функционал $g \mapsto H(g, s)$ непрерывен на G.

(2_H) Для любого компакта $W \subset C_*$ существует такое число $\lambda > 0$, что для всех $t \in [t_0, T]$, $s \in \mathbb{R}^n$, $\|s\| = 1$, и $x'[\cdot] \in W$, $x''[\cdot] \in W$ справедлива оценка (условие Липшица по $x[t_*[\cdot]t]$)

$$|H(t, x'[t_*[\cdot]t], s) - H(t, x''[t_*[\cdot]t], s)| \leq \lambda \max_{t_* \leq \tau \leq t} \|x'[\tau] - x''[\tau]\|.$$

(3_H) Для любых $g = (t, x[t_*[\cdot]t]) \in G$ и $s', s'' \in \{s \in \mathbb{R}^n : \|s\| \leq 1\}$ справедливо неравенство (условие Липшица по s)

$$|H(g, s') - H(g, s'')| \leq L(g)\|s' - s''\|,$$

где $L : G \mapsto \mathbb{R}$ – непрерывный функционал, удовлетворяющий оценке

$$L(t, x[t_*[\cdot]t]) \leq \varkappa \left(1 + \max_{t_* \leq \tau \leq t} \|x[\tau]\|\right), \ (t, x[t_*[\cdot]t]) \in G, \ \varkappa = \text{const} > 0.$$

(4_H) Для любой пары $g = (t, x[t_*[\cdot]t]) \in G$ функция $s \mapsto H(g, s)$ положительно однородна, т.е.

$$H(g, \alpha s) = \alpha H(g, s), \quad \alpha \geq 0.$$

Отметим, что при указанных условиях может не существовать ci-гладкого функционала, удовлетворяющего соотношениям (1.3), (1.4) (см. пример в конце статьи). Как и в случае обычных уравнений Гамильтона–Якоби [9–12], здесь возникает потребность определения подходящего обобщенного решения уравнения (1.3).

Задачи типа (1.3), (1.4) возникают в теории управления с наследственной информацией [3–8] при изучении свойств функционала цены (оптимального гарантированного результата). При этом непрерывность краевого функционала σ и условия (1_H)–(4_H), накладываемые на гамильтониан H, являются естественными для достаточно широкого круга задач управления. Если функционал цены ci-дифференцируем, он удовлетворяет уравнению вида (1.3). В большинстве случаев функционал цены не является ci-дифференцируемым (часто он лишь кусочно ci-дифференцируем, а в общем случае имеет более сложную структуру), однако в тех точках, в которых этот функционал ci-дифференцируем, он удовлетворяет соответствующему уравнению вида (1.3), поэтому может быть истолкован как его обобщенное решение.

2. Минимаксное решение

Следуя подходу, предложенному [9] для уравнений Гамильтона–Якоби с частными производными, дадим определение минимаксного решения уравнения (1.3) и задачи Коши (1.3), (1.4).

Пусть P и Q – некоторые непустые множества (для определенности можно считать, что P и Q – подмножества некоторых конечномерных пространств), многозначные отображения

$$(g,q) \mapsto F^*(g,q) \subset \mathbb{R}^n, \quad (g,p) \mapsto F_*(g,p) \subset \mathbb{R}^n,$$
$$g = (t, x[t_*[\cdot]t]) \in G,\ p \in P,\ q \in Q,$$

удовлетворяют следующим требованиям.

(1_K) Для любых $g = (t, x[t_*[\cdot]t]) \in G$, $p \in P$ и $q \in Q$ множества $F^*(g,q)$ и $F_*(g,p)$ – непустые выпуклые компакты в $\mathbb{R}^n$. Существует такое число $a > 0$, что справедлива оценка

$$\max\{\|f\| \mid f \in F^*(g,q) \cup F_*(g,p)\} \le a\left(1 + \max_{t_* \le \tau \le t} \|x[\tau]\|\right),$$
$$g = (t, x[t_*[\cdot]t]) \in G,\ p \in P,\ g \in Q.$$

(2_K) Для любых $p \in P$ и $q \in Q$ многозначные отображения $g \mapsto F^*(g,q)$ и $g \mapsto F_*(g,p)$ полунепрерывны сверху по включению на G.

(3_K) Для любых $g = (t, x[t_*[\cdot]t]) \in G$ и $s \in \mathbb{R}^n$ справедливы равенства

$$\sup_{q \in Q} \min_{f \in F^*(g,q)} \langle s,\ f\rangle = H(g,s) = \inf_{p \in P} \max_{f \in F_*(g,p)} \langle s,\ f\rangle.$$

Совокупность пар $\{Q, F^*(\cdot)\}$ ($\{P, F_*(\cdot)\}$), удовлетворяющих требованиям (1_K)–(3_K), обозначим $K^*(H)$ ($K_*(H)$). При условиях (1_H)–(4_H) имеем $K^*(H) \ne \emptyset$, $K_*(H) \ne \emptyset$. В частности, можно проверить, что требования (1_K)–(3_K) выполняются для

$$\begin{aligned} &P = Q = \mathbb{R}^n,\\ &F^*(g,q) = \{f \in \mathbb{R}^n : \|f\| \le \sqrt{2}L(g),\ \langle f,q\rangle \ge H(g,q)\},\\ &F_*(g,p) = \{f \in \mathbb{R}^n : \|f\| \le \sqrt{2}L(g),\ \langle f,p\rangle \le H(g,p)\}, \end{aligned} \tag{2.1}$$

где $L(g)$ из условия (3_H), $g = (t, x[t_*[\cdot]t]) \in G$. При этом для любых $p, q \in \mathbb{R}^n$ многозначные отображения $g \mapsto F^*(g, q)$, $g \mapsto F_*(g, p)$ из (2.1) не только полунепрерывны сверху, но и непрерывны на G в метрике Хаусдорфа.

Пусть $\{Q, F^*(\cdot)\} \in K^*(H)$, $\{P, F_*(\cdot)\} \in K_*(H)$. Рассмотрим дифференциальные включения с последействием:

$$dx[t]/dt \in F^*(t, x[t_*[\cdot]t], q), \tag{2.2}$$

$$dx[t]/dt \in F_*(t, x[t_*[\cdot]t], p). \tag{2.3}$$

Пусть $g^0 = (t^0, x^0[t_*[\cdot]t^0]) \in G$, $p \in P$, $q \in Q$. Под решением включения (2.2) [соответственно (2.3)] с начальным условием g^0 при фиксированном q [p] будем понимать функцию $x[\cdot] \in C_*$, совпадающую с $x^0[t_*[\cdot]t^0]$ на $[t_*, t^0]$, абсолютно непрерывную на $[t^0, T]$ и при почти всех $t \in [t^0, T]$ удовлетворяющую включению (2.2) [соответственно (2.3)]. Множество всех таких решений обозначим через $X^*(g^0, q \mid F^*(\cdot))$ [соответственно $X_*(g^0, p \mid F_*(\cdot))$]. В силу условий (1_K), (2_K) (см., например, [8, 16]) эти множества будут непустыми компактами в C_* при любых $g^0 = (t^0, x^0[t_*[\cdot]t^0]) \in G$, $p \in P$, $q \in Q$.

Определение 2.1. *Минимаксным решением* (*МР*) *уравнения* (1.3) *назовем непрерывный функционал* $\varphi : G \mapsto \mathbb{R}$, *удовлетворяющий при некоторых* $\{Q, F^*(\cdot)\} \in K^*(H)$, $\{P, F_*(\cdot)\} \in K_*(H)$ *неравенствам*

$$\sup_{(g^0,t,q)} \min_{x^*[\cdot]} [\varphi(t, x^*[t_*[\cdot]t]) - \varphi(g^0)] \le 0, \tag{2.4}$$

$$\inf_{(g^0,t,p)} \max_{x_*[\cdot]} [\varphi(t, x_*[t_*[\cdot]t]) - \varphi(g^0)] \ge 0, \tag{2.5}$$

где

$$g^0 = (t^0, x^0[t_*[\cdot]t^0]) \in G,\ t \in [t^0, T],\ q \in Q,\ p \in P,$$
$$x^*[\cdot] \in X^*(g^0, q \mid F^*(\cdot)), \quad x_*[\cdot] \in X_*(g^0, p \mid F_*(\cdot)).$$

Минимаксным решением задачи Коши (1.3), (1.4) *назовем МР уравнения* (1.3), *удовлетворяющее условию* (1.4).

Доказательство приводимых ниже теорем существования, единственности и корректности МР задачи Коши (1.3), (1.4) проводится (см. [15]) в основном по плану, изложенному в [9, с.13–40], с учетом особенностей, обусловленных эффектом последействия и функциональностью аргумента искомого решения.

Теорема 2.1 (существование и единственность). *Пусть* $\sigma : C_0 \mapsto \mathbb{R}$ — *непрерывный функционал, а гамильтониан* H *удовлетворяет условиям* (1_H)–(4_H) *из п.1. Тогда существует одно и только одно минимаксное решение* *задачи Коши* (1.3), (1.4). *Оно удовлетворяет условиям* (2.4) *и* (2.5) *при любых* $\{Q, F^*(\cdot)\} \in K^*(H)$ *и* $\{P, F_*(\cdot)\} \in K_*(H)$.

Теорема 2.2 (корректность). *Пусть* $k = 1, 2, \ldots$; *функционалы* $\sigma_0, \sigma_k : C_0 \mapsto \mathbb{R}$ *непрерывны; гамильтонианы* $H_0, H_k : G \times \mathbb{R}^n \mapsto \mathbb{R}$ *удовлетворяют условиям* (1_H)–(4_H) *из п.*1; $L_0, L_k : G \mapsto \mathbb{R}$ — *функционалы, определенные для* H_0, H_k *соответственно согласно условию* (3_H) (*где* $\varkappa = \varkappa_0 = \varkappa_k$). *При этом* $\sigma_k \to \sigma_0$ *при* $k \to \infty$ *равномерно на любом компакте из* C_0; $H_k(\cdot, s) \to H_0(\cdot, s)$, $L_k \to L_0$ *при* $k \to \infty$ *для любых* $s \in \mathbb{R}^n$ *и компакта* $W \subset C_*$ *равномерно на* $G(W) = \{(t, x[t_*[\cdot]t]) : t \in [t_0, T], x[\cdot] \in W\}$. *Пусть функционалы* $\varphi_k : G \mapsto \mathbb{R}$ – *минимаксные решения задач Коши*

$$\partial_t \varphi(g) + H_k(g, \nabla\varphi(g)) = 0,\ g = (t, x[t_*[\cdot]t]) \in G,\ t < T,$$
$$\varphi(T, x[t_*[\cdot]T]) = \sigma_k(x[t_0[\cdot]T]),\ x[\cdot] \in C_*, \quad k = 1, 2, \ldots.$$

Тогда последовательность φ_k $(k = 1, 2, \ldots)$ *сходится к предельному функционалу* $\varphi_0 : G \mapsto \mathbb{R}$ *для любого компакта* $W \subset C_*$ *равномерно на* $G(W)$. *Предельный функционал* φ_0 *будет минимаксным решением задачи Коши*

$$\partial_t \varphi(g) + H_0(g, \nabla\varphi(g)) = 0,\ g = (t, x[t_*[\cdot]t]) \in G,\ t < T,$$
$$\varphi(T, x[t_*[\cdot]T]) = \sigma_0(x[t_0[\cdot]T]),\ x[\cdot] \in C_*.$$

Отметим, что неравенства (2.4) и (2.5), определяющие МР уравнения (1.3), выражают нелокальные свойства стабильности МР относительно дифференциальных включений (2.2) и (2.3), называемых характеристическими. Для уравнений типа (1.3), возникающих в задачах управления, эти свойства соответствуют свойствам u- и v-стабильности функционала цены [3–7], которые, в свою очередь, являются отражением общего принципа оптимальности в экстремальных задачах. В [7] показано, что для весьма широкого круга задач управления с наследственной информацией функционал цены совпадает с МР соответствующей задачи Коши типа (1.3), (1.4).

Отметим еще, что если в (1.3), (1.4) последействие отсутствует, т.е. $H(g, \nabla\varphi(g)) = H(t, x[t], \nabla\varphi(g))$, $\sigma(x[t_0[\cdot]T]) = \sigma(x[T])$, то (см. [15]) МР такой задачи имеет вид

$$\varphi(g) = \widehat{\varphi}(t, x[t]),\ g = (t, x[t_*[\cdot]t]) \in G,$$

где функция $\widehat{\varphi}(t, x)$, $t \in [t_0, T]$, $x \in \mathbb{R}^n$, является минимаксным решением [9, с.13] задачи Коши для обычного уравнения Г-Я:

$$\partial\widehat{\varphi}(t, x)/\partial t + H(t, x, \nabla\widehat{\varphi}(t, x)) = 0,\ t \in [t_0, T),\ x \in \mathbb{R}^n,$$
$$\widehat{\varphi}(T, x) = \sigma(x).$$

Таким образом, рассматриваемые конструкции являются естественным развитием подхода [9, 10] на случай задач, осложненных эффектом последействия.

Докажем две леммы, используемые в дальнейшем.

Лемма 2.1. *Пусть полунепрерывный снизу [сверху] функционал* $\varphi : G \mapsto \mathbb{R}$ *удовлетворяет условию* (2.4) *[условию* (2.5)*] при некоторой паре* $\{Q, F^*(\cdot)\} \in K^*(H)$ *[соответственно паре* $\{P, F_*(\cdot)\} \in K_*(H)$*]. Тогда для любых* $g^0 = (t^0, x^0[t_*[\cdot]t^0]) \in G$, $t^0 < T$, *и* $q \in Q$ $[p \in P]$ *существует такая функция* $x^*[\cdot] \in X^*(g^0, q \mid F^*(\cdot))$ $[x_*[\cdot] \in X_*(g^0, p \mid F_*(\cdot))]$, *что при всех* $t \in [t^0, T]$ *будет справедливо неравенство*

$$\varphi(t, x^*[t_*[\cdot]t]) \leq \varphi(g^0) \tag{2.6}$$

или соответственно неравенство

$$\varphi(t, x_*[t_*[\cdot]t]) \geq \varphi(g^0). \tag{2.7}$$

Доказательство. Пусть $m = 1, 2, \ldots$. Обозначим

$$X_0^* = X^*(g^0, q \mid F^*(\cdot)), \quad \tau_i^{(m)} = t^0 + i(T - t^0)/m, \ i = 0, 1, \ldots, m.$$

В силу условия (2.4) найдутся функции $x_{(i)}^{(m)}[\cdot]$ $(i = 0, 1, \ldots, m)$, для которых будут выполнены соотношения

$$\begin{aligned} &x_{(0)}^{(m)}[\cdot] \in X_0^*, \quad x_{(i)}^{(m)}[\cdot] \in X^*(\tau_{i-1}^{(m)}, x_{(i-1)}^{(m)}[t_*[\cdot]\tau_{i-1}^{(m)}], q \mid F^*(\cdot)), \\ &\varphi(\tau_i^{(m)}, x_{(i)}^{(m)}[t_*[\cdot]\tau_i^{(m)}]) \leq \varphi(\tau_{i-1}^{(m)}, x_{(i-1)}^{(m)}[t_*[\cdot]\tau_{i-1}^{(m)}]), \quad i = 1, \ldots, m. \end{aligned} \tag{2.8}$$

Положим $x_{(m)}[\cdot] = x_{(m)}^{(m)}[\cdot]$. Из (2.8) следует, что $x_{(m)}[\cdot] \in X_0^*$, причем

$$\varphi(\tau_i^{(m)}, x_{(m)}[t_*[\cdot]\tau_i^{(m)}]) \leq \varphi(g^0), \quad i = 0, 1, \ldots, m. \tag{2.9}$$

Рассмотрим последовательность $x_{(m)}[\cdot]$ $(m = 1, 2, \ldots)$. Так как X_0^* – компакт в C_*, то можно принять, что данная последовательность равномерно сходится к некоторой функции $x^*[\cdot] \in X_0^*$. Эта функция будет удовлетворять требованию (2.6). Действительно, пусть $t \in [t^0, T]$, $g^* = (t, x^*[t_*[\cdot]t])$, $\tau_m = \tau_m(t) = \max\limits_{i=0,\ldots,m} \{\tau_i^{(m)} \mid \tau_i^{(m)} \leq t\}$, $g_m = (\tau_m, x_{(m)}[t_*[\cdot]\tau_m])$. Тогда [см. (1.1)] $\rho(g_m, g^*) \to 0$ при $m \to \infty$ и, в силу (2.9), $\varphi(g_m) \leq \varphi(g^0)$ $(m = 1, 2, \ldots)$. Так как функционал φ полунепрерывен снизу, отсюда следует неравенство (2.6).

Аналогично, исходя из условия (2.5), доказывается существование функции $x_*[\cdot] \in X_*(g^0, p \mid F_*(\cdot))$, удовлетворяющей требованию (2.7). Лемма доказана.

Пусть $\mu > 0$, множество $F \subset \mathbb{R}^n$. Символом $[F]^\mu$ будем обозначать замкнутую μ-окрестность F в $\mathbb{R}^n$, т.е.

$$[F]^\mu = \{f' \in \mathbb{R}^n : \inf_{f \in F} \|f' - f\| \leq \mu\}.$$

Пусть $\{Q, F^*(\cdot)\} \in K^*(H)$, $\{P, F_*(\cdot)\} \in K_*(H)$, $g^0 = (t^0, x^0[t_*[\cdot]t^0]) \in G$, $p \in P$, $q \in Q$. Рассмотрим дифференциальные включения

$$dx[t]/dt \in [F^*(t, x[t_*[\cdot]t], q)]^\mu, \quad dx[t]/dt \in [F_*(t, x[t_*[\cdot]t], p)]^\mu.$$

Соответственно через $X^*_\mu(g^0, q \mid F^*(\cdot))$, $X_{*\mu}(g^0, p \mid F_*(\cdot))$ обозначим множества решений данных дифференциальных включений при начальном условии g^0 и выбранных q, p. Поскольку многозначные отображения $F^*(\cdot)$ и $F_*(\cdot)$ удовлетворяют требованиям (1_K), (2_K), эти множества будут непустыми компактами в C_*. Понятно, что всегда имеют место включения

$$\begin{aligned} &X^*(g^0, q \mid F^*(\cdot)) \subset X^*_\mu(g^0, q \mid F^*(\cdot)), \\ &X_*(g^0, p \mid F_*(\cdot)) \subset X_{*\mu}(g^0, p \mid F_*(\cdot)). \end{aligned} \tag{2.10}$$

Лемма 2.2. *Для полунепрерывного снизу [сверху] функционала* $\varphi : G \mapsto \mathbb{R}$ *и любой пары* $\{Q, F^*(\cdot)\} \in K^*(H)$ *[соответственно пары* $\{P, F_*(\cdot)\} \in K_*(H)$*] условие*

$$\sup_{(g^0, t, q, \mu)} \min_{x^*_\mu[\cdot]} [\varphi(t, x^*_\mu[t_*[\cdot]t]) - \varphi(g^0)] \leq 0, \tag{2.11}$$

$$g^0 = (t^0, x^0[t_*[\cdot]t^0]) \in G,\ t \in [t^0, T],\ q \in Q,\ \mu > 0,\ x^*_\mu[\cdot] \in X^*_\mu(g^0, q \mid F^*(\cdot))$$

эквивалентно условию (2.4) *[соответственно условие*

$$\inf_{(g^0, t, p, \mu)} \max_{x_{*\mu}[\cdot]} [\varphi(t, x_{*\mu}[t_*[\cdot]t]) - \varphi(g^0)] \geq 0, \tag{2.12}$$

$$g^0 = (t^0, x^0[t_*[\cdot]t^0]) \in G,\ t \in [t^0, T],\ p \in P,\ \mu > 0,\ x_{*\mu}[\cdot] \in X_{*\mu}(g^0, p \mid F_*(\cdot))$$

эквивалентно условию (2.5)*]*.

Доказательство. Из (2.10) следует импликация (2.4)⇒(2.11). Докажем импликацию (2.11)⇒(2.4). Пусть $g^0 = (t^0, x^0[t_*[\cdot]t^0]) \in G$, $t^0 < T$, $t \in [t^0, T]$ и $q \in Q$. Возьмем последовательность $\mu_i \downarrow 0$ $(i = 1, 2, \ldots)$. Согласно (2.11) существует последовательность $x^*_i[\cdot] \in X^*_{\mu_i}(g^0, q \mid F^*(\cdot))$ такая, что

$$\varphi(t, x^*_i[t_*[\cdot]t]) \leq \varphi(g^0) \quad (i = 1, 2, \ldots). \tag{2.13}$$

Без ограничения общности можно считать, что эта последовательность равномерно сходится к $x^*[\cdot] \in C_*$. Тогда, согласно (1.1), имеем

$$\rho((t, x_i^*[t_*[\cdot]t]), (t, x^*[t_*[\cdot]t])) \to 0 \text{ при } i \to \infty.$$

В силу (1_K), (2_K) будет справедливо включение $x^*[\cdot] \in X^*(g^0, q \mid F^*(\cdot))$. Переходя к пределу в (2.13) и учитывая, что функционал φ полунепрерывен снизу, приходим к неравенству

$$\varphi(t, x^*[t_*[\cdot]t]) \le \varphi(g^0).$$

Таким образом, получаем, что из (2.11) следует (2.4).

Эквивалентность условий (2.5) и (2.12) проверяется аналогично. Лемма доказана.

3. Условия стабильности в инфинитезимальной форме

Определение 2.1 минимаксного решения (МР) уравнения (1.3) через нелокальные свойства (2.4) и (2.5) стабильности относительно характеристических дифференциальных включений (2.2) и (2.3) удобно, например, для доказательства существования, единственности и корректности МР задачи Коши (1.3), (1.4). Однако в конкретных задачах проверить выполнение условий (2.4), (2.5) для найденного при помощи каких-либо вспомогательных построений решения нередко бывает затруднительно. В теории обобщенных решений уравнений Гамильтона–Якоби с частными производными [9–13] известны различные по форме, но эквивалентные по существу определения минимаксного решения, которые взаимно дополняют друг друга. Ниже, подобно [9, с.57–61], будут получены дифференциальные неравенства, выражающие в инфинитезимальной форме свойства стабильности (2.4), (2.5) . Эти неравенства, по сути эквивалентные условиям (2.4), (2.5), часто, в том числе для кусочно ci-гладких МР, оказываются более удобными для проверки.

Пусть $\varphi : G \mapsto \mathbb{R}$ – некоторый функционал, $g = (t, x[t_*[\cdot]t]) \in G$, $t < T$, $y[\cdot] \in \mathrm{Lip}(g)$, $\varepsilon > 0$, множество $F \subset \mathbb{R}^n$ – выпуклый компакт. Обозначим

$$\begin{aligned} \partial^-\varphi(g \mid y[\cdot]) &= \liminf_{\delta\downarrow 0}[\varphi(t+\delta, y[t_*[\cdot]t+\delta]) - \varphi(g)]\delta^{-1}, \\ \partial^+\varphi(g \mid y[\cdot]) &= \limsup_{\delta\downarrow 0}[\varphi(t+\delta, y[t_*[\cdot]t+\delta]) - \varphi(g)]\delta^{-1}; \end{aligned} \tag{3.1}$$

$$\Omega(g, F, \varepsilon) = \{y[\cdot] \in \mathrm{Lip}(g) : dy[\tau]/d\tau \in [F]^\varepsilon \text{ п.в. } \tau \in [t, T]\}, \tag{3.2}$$

$$\begin{aligned} d^-\varphi(g \mid F) &= \lim_{\varepsilon\downarrow 0} \inf_{y[\cdot]\in\Omega(g,F,\varepsilon)} \partial^-\varphi(g \mid y[\cdot]), \\ d^+\varphi(g \mid F) &= \lim_{\varepsilon\downarrow 0} \sup_{y[\cdot]\in\Omega(g,F,\varepsilon)} \partial^+\varphi(g \mid y[\cdot]). \end{aligned} \tag{3.3}$$

Величины $\partial^-\varphi(g \mid y[\cdot])$ и $\partial^+\varphi(g \mid y[\cdot])$ являются соответственно нижним и верхним правыми производными числами функционала φ в точке g вдоль функции $y[\cdot]$. Величины $d^-\varphi(g \mid F)$ и $d^+\varphi(g \mid F)$ назовем соответственно нижней и верхней производными (правыми) функционала φ в точке g по многозначному направлению F. Отметим, что эти производные могут принимать несобственные значения $-\infty$ и $+\infty$.

Если функционал φ ci-дифференцируем в точке g, то для любого выпуклого компакта $F \subset \mathbb{R}^n$ справедливы равенства

$$\begin{aligned} d^-\varphi(g \mid F) &= \partial_t\varphi(g) + \min_{f\in F}\langle\nabla\varphi(g), f\rangle, \\ d^+\varphi(g \mid F) &= \partial_t\varphi(g) + \max_{f\in F}\langle\nabla\varphi(g), f\rangle. \end{aligned} \tag{3.4}$$

Действительно, с одной стороны, для любых $\varepsilon > 0$ и $y[\cdot] \in \Omega(g, F, \varepsilon)$, учитывая (1.2), (3.1) и теорему о среднем значении вектор-функции (см., например, [16, с.51]), выводим

$$\partial^-\varphi(g \mid y[\cdot]) \geq \partial_t\varphi(g) + \min_{f\in[F]^\varepsilon}\langle\nabla\varphi(g), f\rangle = \partial_t\varphi(g) + \min_{f\in F}\langle\nabla\varphi(g), f\rangle - \|\nabla\varphi(g)\|\varepsilon;$$

поэтому, согласно (3.3), справедливо неравенство

$$d^-\varphi(g \mid F) \geq \partial_t\varphi(g) + \min_{f\in F}\langle\nabla\varphi(g), f\rangle. \tag{3.5}$$

С другой стороны, так как для любых $\varepsilon > 0$ и $f \in F$ функция $y_f[\cdot] = \{y_f[\tau] = x[\tau]$ при $\tau \in [t_*, t]$, $y_f[\tau] = x[t] + f(\tau - t)$ при $\tau \in (t, T]\}$ принадлежит множеству $\Omega(g, F, \varepsilon)$, вновь используя (1.2), имеем

$$d^-\varphi(g \mid F) \leq \inf_{f\in F}\partial^-\varphi(g \mid y_f[\cdot]) = \partial_t\varphi(g) + \min_{f\in F}\langle\nabla\varphi(g), f\rangle. \tag{3.6}$$

Неравенства (3.5) и (3.6) доказывают первое из равенств (3.4). Второе равенство проверяется аналогично.

Пусть

$$\varphi(g) = \min_{i\in I}\max_{j\in J}\psi_{ij}(g), \quad g = (t, x[t_*[\cdot]t]) \in G, \tag{3.7}$$

где $\psi_{ij} : G \mapsto \mathbb{R}$ – ci-гладкие (непрерывные и ci-дифференцируемые) функционалы ($i \in I$, $j \in J$); I и J – конечные множества. Функционалы $\varphi : G \mapsto \mathbb{R}$, представимые в виде (3.7), будем называть кусочно ci-гладкими.

Обозначим

$$\begin{aligned} I_0(g) &= \{i_0 \in I : \max_{j\in J}\psi_{i_0 j}(g) = \varphi(g)\}, \\ J_0(g, i) &= \{j_0 \in J : \psi_{ij_0}(g) = \max_{j\in J}\psi_{ij}(g)\}. \end{aligned} \tag{3.8}$$

Следующее утверждение дает формулы для вычисления нижних и верхних производных кусочно ci-гладких функционалов по многозначным направлениям.

Утверждение 3.1. *Пусть $\varphi : G \mapsto \mathbb{R}$ – кусочно* ci*-гладкий функционал* (3.7)*. Тогда для любого выпуклого компакта $F \subset \mathbb{R}^n$ справедливы равенства*

$$d^-\varphi(g \mid F) = \min_{f\in F} \min_{i\in I_0(g)} \max_{j\in J_0(g,i)} [\partial_t\psi_{ij}(g) + \langle\nabla\psi_{ij}(g), f\rangle],$$
$$d^+\varphi(g \mid F) = \max_{f\in F} \min_{i\in I_0(g)} \max_{j\in J_0(g,i)} [\partial_t\psi_{ij}(g) + \langle\nabla\psi_{ij}(g), f\rangle], \qquad (3.9)$$
$$g = (t, x[t_*[\cdot]t]) \in G,\ t < T,$$

где $I_0(g)$ и $J_0(g,i)$ — из (3.8).

Доказательство. Пусть $g = (t, x[t_*[\cdot]t]) \in G$, $t < T$, $\varepsilon > 0$, $y[\cdot] \in \Omega(g, F, \varepsilon)$. Поскольку функционалы ψ_{ij} непрерывны, а множества I и J конечны, найдется такое число $\delta_0 > 0$, что для всех $\delta \in (0, \delta_0]$, $i \in I$ будут справедливы включения

$$I_0(t+\delta, y[t_*[\cdot]t+\delta]) \subset I_0(g), \quad J_0(t+\delta, y[t_*[\cdot]t+\delta], i) \subset J_0(g,i).$$

Учитывая это и (3.7), (3.8), в силу ci-дифференцируемости функционалов ψ_{ij}, получаем

$$\varphi(g) = \psi_{ij}(g), \quad i \in I_0(g), j \in J_0(g,i);$$

$$\varphi(t+\delta, y[t_*[\cdot]t+\delta]) - \varphi(g) = \min_{i\in I_0(g)} \max_{j\in J_0(g,i)} [\psi_{ij}(t+\delta, y[t_*[\cdot]t+\delta]) - \psi_{ij}(g)] =$$
$$= \min_{i\in I_0(g)} \max_{j\in J_0(g,i)} [\partial_t\psi_{ij}(g)\delta + \langle\nabla\psi_{ij}(g), y[t+\delta] - x[t]\rangle + o_{y[\cdot]}(\delta; i, j)],\ \delta \in (0, \delta_0].$$

Множества I и J конечны, поэтому

$$\left[\max_{i\in I_0(g)} \max_{j\in J_0(g,i)} |o_{y[\cdot]}(\delta; i, j)|\right] \delta^{-1} \to 0 \text{ при } \delta \downarrow 0.$$

Таким образом, заключаем, что для любых $g = (t, x[t_*[\cdot]t]) \in G$, $t < T$, $\varepsilon > 0$, $y[\cdot] \in \Omega(g, F, \varepsilon)$ и $\delta \in (0, T-t]$ имеет место равенство

$$\varphi(t+\delta, y[t_*[\cdot]t+\delta]) - \varphi(g) =$$
$$= \min_{i\in I_0(g)} \max_{j\in J_0(g,i)} [\partial_t\psi_{ij}(g)\delta + \langle\nabla\psi_{ij}(g), y[t+\delta] - x[t]\rangle] + o_{y[\cdot]}(\delta). \qquad (3.10)$$

Равенства (3.9) выводятся из (3.1)–(3.3) и (3.10) при помощи рассуждений, подобных приведенным выше при обосновании равенств (3.4). Доказательство завершено.

Обозначим через $K_c^*(H)$ и $K_*^c(H)$ соответственно совокупности таких пар $\{Q, F^*(\cdot)\} \in K^*(H)$ и $\{P, P_*(\cdot)\} \in K_*(H)$ (см. п.2), у которых при любых $q \in Q$ и $p \in P$ многозначные отображения $g \mapsto F^*(g,q) \subset \mathbb{R}^n$ и $g \mapsto F_*(g,p) \subset \mathbb{R}^n$ непрерывны на G в метрике Хаусдорфа. Данному требованию удовлетворяют многозначные отображения (2.1), поэтому $K_c^*(H) \neq \emptyset$, $K_*^c(H) \neq \emptyset$.

Основной результат этого раздела составляет следующая

Теорема 3.1. *Для полунепрерывного снизу [сверху] функционала $\varphi : G \mapsto \mathbb{R}$ и любой пары $\{Q, F^*(\cdot)\} \in K_c^*(H)$ [соответственно пары $\{P, P_*(\cdot)\} \in K_*^c(H)$] условие*

$$\sup_{q \in Q} d^- \varphi(g \mid F^*(g,q)) \leq 0, \quad g = (t, x[t_*[\cdot]t]) \in G, \ t < T \tag{3.11}$$

эквивалентно условию (2.4) [*соответственно условие*

$$\inf_{p \in P} d^+ \varphi(g \mid F_*(g,p)) \geq 0, \quad g = (t, x[t_*[\cdot]t]) \in G, \ t < T \tag{3.12}$$

эквивалентно условию (2.5)].

Доказательство. Докажем импликацию (2.4) $\Rightarrow$ (3.11). Пусть $t^0 < T$, $g^0 = (t^0, x^0[t_*[\cdot]t^0]) \in G$, $q \in Q$. Так как выполняется условие (2.4), то, согласно лемме 2.1, существует такая функция $x^*[\cdot] \in X^*(g^0, q \mid P^*(\cdot))$, что при всех $t \in [t^0, T]$ будет справедливо неравенство (2.6). Возьмем $\varepsilon > 0$. Многозначное отображение $g \mapsto F^*(g,q)$ непрерывно, функция $x^*[\cdot]$ липшицева на $[t^0, T]$. Поэтому найдется такое число $\delta_0 \in (0, T - t^0]$, что для всех $t \in [t^0, t^0 + \delta_0]$ будет выполняться включение $F^*(t, x^*[t_*[\cdot]t], q) \subset [F^*(g^0, q)]^\varepsilon$. Пусть $y_\varepsilon[\cdot] \in \Omega(t^0 + \delta_0, x^*[t_*[\cdot]t^0 + \delta_0], F^*(g^0, q), \varepsilon)$. Тогда, согласно (3.2) и указанному выбору функции $x^*[\cdot]$ и числа δ_0, имеем

$$y_\varepsilon[\cdot] \in \Omega(g^0, F^*(g^0, q), \varepsilon),$$
$$\delta^{-1}[\varphi(t^0 + \delta, y_\varepsilon[t_*[\cdot]t^0 + \delta]) - \varphi(g^0)] \leq 0, \ \delta \in (0, \delta_0],$$

откуда в соответствии с (3.1) выводим

$$\inf_{y[\cdot] \in \Omega(g^0, F^*(g^0,q), \varepsilon)} \partial^- \varphi(g^0 \mid y[\cdot]) \leq \partial^- \varphi(g^0 \mid y_\varepsilon[\cdot]) \leq 0.$$

Число ε было взято произвольно, следовательно, в согласии с (3.3) отсюда вытекает неравенство

$$d^- \varphi(g^0 \mid F^*(g^0, q)) \leq 0.$$

Поскольку $q \in Q$ и $g^0 = (t^0, x^0[t_*[\cdot]t^0]) \in G$, $t^0 < T$ были выбраны также произвольно, окончательно заключаем, что из (2.4) следует (3.11).

Докажем импликацию (3.11)⇒(2.4). Согласно лемме 2.2 для этого достаточно показать, что из (3.11) следует (2.11). Рассуждая от противного, предположим, что условие (2.11) нарушается, т.е. что существуют такие $\alpha > 0$, $\mu > 0$, $t^0 < T$, $g^0 = (t^0, x^0[t_*[\cdot]t^0]) \in G$, $t^* \in (t^0, T]$ и $q \in Q$, для которых имеет место неравенство

$$\min_{x[\cdot]\in X^*_\mu(g^0,q|F^*(\cdot))} \varphi(t^*, x[t_*[\cdot]t^*]) > \varphi(g^0) + \alpha. \tag{3.13}$$

Положим

$$\begin{gathered}\beta(\tau) = \varphi(g^0) + \alpha(\tau - t^0)/(t^* - t^0),\\ \tau_0 = \sup\{\tau \in [t_0, t^*] \mid \min_{x[\cdot]\in X^*_\mu(g^0,q|F^*(\cdot))} \varphi(\tau, x[t_*[\cdot]\tau]) \le \beta(\tau)\}.\end{gathered} \tag{3.14}$$

Так как $\beta(t^0) = \varphi(g^0)$, то $\tau_0 \ge t^0$. Из (3.13), (3.14) вытекает, что $\tau_0 < t^*$. Функционал $\varphi : G \mapsto \mathbb{R}$ полунепрерывен снизу, множество $X^*_\mu(g^0, q \mid F^*(\cdot))$ — непустой компакт в C_*. Поэтому sup в (3.14) достигается и существует такая функция

$$x_0[\cdot] \in X^*_\mu(g^0, q \mid F^*(\cdot)), \tag{3.15}$$

для которой справедливо неравенство

$$\varphi(g_0 = (\tau_0, x_0[t_*[\cdot]\tau_0])) \le \beta(\tau_0). \tag{3.16}$$

В силу условия (3.11) имеем

$$d^-\varphi(g_0 \mid F^*(g_0, q)) \le 0, \quad g_0 = (\tau_0, x_0[t_*[\cdot]\tau_0]). \tag{3.17}$$

Учитывая непрерывность многозначного отображения $g \mapsto F^*(g, q)$ и определение (3.3) нижней производной по многозначному направлению, из неравенства (3.17) следует, что существуют такие

$$0 < \varepsilon \le \mu/2, \quad y[\cdot] \in \Omega(g_0, F^*(g_0, q), \varepsilon), \quad 0 < \delta < t^* - \tau_0, \tag{3.18}$$

для которых имеют место соотношения

$$F^*(g_0, q) \subset [F^*(t, y[t_*[\cdot]t], q)]^{\mu/2}, \quad t \in [\tau_0, \tau_0 + \delta], \tag{3.19}$$

$$\varphi(\tau_0 + \delta, y[t_*[\cdot]\tau_0 + \delta]) - \varphi(g_0) \le \alpha\delta/(t^* - t^0), \tag{3.20}$$

где, как и в (3.16)–(3.18), $g_0 = (\tau_0, x_0[t_*[\cdot]\tau_0])$.

Пусть $x^*[\cdot] \in X^*_\mu(\tau_0 + \delta, y[t_*[\cdot]\tau_0 + \delta], q \mid F^*(\cdot))$. Тогда, из (3.15), (3.18) и (3.19), учитывая, что $\tau_0 \in [t^0, t^*)$, выводим

$$x^*[\cdot] \in X^*_\mu(g^0, q \mid F^*(\cdot)), \tag{3.21}$$

а из (3.14), (3.16) и (3.20), учитывая, что $x^*[t_*[\cdot]\tau_0+\delta] = y[t_*[\cdot]\tau_0+\delta]$, получаем

$$\varphi(\tau_0 + \delta, x^*[t_*[\cdot]\tau_0 + \delta]) \leq \beta(\tau_0 + \delta). \tag{3.22}$$

Поскольку $\delta > 0$, соотношения (3.21) и (3.22) противоречат определению (3.14) числа τ_0. Итак, заключаем, что из (3.11) следует (2.11), а стало быть, и (2.4).

Обоснование эквивалентности условий (2.5) и (3.12) проводится аналогичным образом с понятными изменениями. Теорема доказана.

Согласно теореме 3.1 дифференциальные неравенства (3.11) и (3.12) могут быть положены в основу определения минимаксного решения уравнения (1.3). Следующее утверждение является прямым следствием теоремы 3.1 и утверждения 3.1.

Утверждение 3.2. *Кусочно* ci-*гладкий функционал* (3.7) *тогда и только тогда является минимаксным решением уравнения* (1.3), *когда при некоторых* $\{Q, F^*(\cdot)\} \in K_c^*(H)$ *и* $\{P, F_*(\cdot)\} \in K_*^c(H)$ *он удовлетворяет паре неравенств*

$$\sup_{q\in Q} \min_{f\in F^*(g,q)} \min_{i\in I_0(g)} \max_{j\in J_0(g,i)} [\partial_t\psi_{ij}(g) + \langle\nabla\psi_{ij}(g), f\rangle] \leq 0,$$

$$\inf_{p\in P} \max_{f\in F_*(g,p)} \min_{i\in I_0(g)} \max_{j\in J_0(g,i)} [\partial_t\psi_{ij}(g) + \langle\nabla\psi_{ij}(g), f\rangle] \geq 0$$

для всех $g = (t, x[t_*[\cdot]t]) \in G$, $t < T$. *Здесь* $I_0(g)$ *и* $J_0(g,i)$ *из* (3.8).

Отметим также, что если функционал $\varphi : G \mapsto \mathbb{R}$ ci-дифференцируем в точке $g = (t, x[t_*[\cdot]t]) \in G$, $t < T$, то, в силу условия (3_K), накладываемого на $\{Q, F^*(\cdot)\} \in K^*(H)$, $\{P, F_*(\cdot)\} \in K_*(H)$ (см. п.2), и равенств (3.4), будут справедливы равенства

$$\sup_{q\in Q} d^-\varphi(g \mid F^*(g,q)) = \partial_t\varphi(g) + H(g, \nabla\varphi(g)) = \inf_{p\in P} d^+\varphi(g \mid F_*(g,p)).$$

Поэтому для ci-дифференцируемого функционала $\varphi : G \mapsto \mathbb{R}$ пара неравенств (3.11) и (3.12) эквивалентна уравнению (1.3). Таким образом, эти неравенства являются естественным обобщением уравнения (1.3), а понятие минимаксного решения (МР) этого уравнения согласуется с понятием решения в классическом смысле. Именно, МР удовлетворяет уравнению (1.3) в точках своей ci-дифференцируемости; ci-гладкий функционал, удовлетворяющий уравнению (1.3), является МР.

4. Вязкостное решение

Для уравнений Гамильтона–Якоби известно [11] понятие вязкостного решения, основанное на замене уравнения парой неравенств относительно суб- и суперградиентов, являющихся естественным обобщением классических производных функций конечномерного аргумента. Следуя методам негладкого анализа [13, 14], можно ввести понятия инвариантных (i) суб- (супер-)дифференциалов и i-суб- (i-супер-)градиентов, обобщающие понятия i-дифференциала и ci-производных (см. определение 1.1), и дать соответствующее определение вязкостного решения уравнения (1.3).

Пусть $\varphi : G \mapsto \mathbb{R}$ – некоторый функционал, $g = (t, x[t_*[\cdot]t]) \in G$, $t < T$, $(p_0, p) \in \mathbb{R} \times \mathbb{R}^n$, $(q_0, q) \in \mathbb{R} \times \mathbb{R}^n$. Обозначим

$$\begin{aligned} \eta^-\varphi(g, p_0, p) &= \inf_{y[\cdot]\in \mathrm{Lip}(g)} \ \liminf_{\delta\downarrow 0} \ \Delta\varphi(g, p_0, p, \delta, y[\cdot])\delta^{-1}, \\ \eta^+\varphi(g, q_0, q) &= \sup_{y[\cdot]\in \mathrm{Lip}(g)} \ \limsup_{\delta\downarrow 0} \ \Delta\varphi(g, q_0, q, \delta, y[\cdot])\delta^{-1}, \end{aligned} \tag{4.1}$$

где

$$\Delta\varphi(g, s_0, s, \delta, y[\cdot]) = \varphi(t + \delta, y[t_*[\cdot]t + \delta]) - \varphi(g) - s_0\delta - \langle s, y[t + \delta] - x[t]\rangle;$$

$$\begin{aligned} D^-\varphi(g) &= \{(p_0, p) \in \mathbb{R} \times \mathbb{R}^n : \eta^-\varphi(g, p_0, p) \geq 0\}, \\ D^+\varphi(g) &= \{(q_0, q) \in \mathbb{R} \times \mathbb{R}^n : \eta^+\varphi(g, q_0, q) \leq 0\}. \end{aligned} \tag{4.2}$$

Множества $D^-\varphi(g) \subset \mathbb{R}^{n+1}$ и $D^+\varphi(g) \subset \mathbb{R}^{n+1}$ назовем соответственно i-субдифференциалом и i-супердифференциалом функционала φ в точке g, а их элементы – i-субградиентами и i-суперградиентами. Можно проверить, что $D^-\varphi(g)$ и $D^+\varphi(g)$ замкнуты и выпуклы. При этом $(p_0, p) \in D^-\varphi(g)$ [соответственно $(q_0, q) \in D^+\varphi(g)$] тогда и только тогда, когда для любой функции $y[\cdot] \in \mathrm{Lip}(g)$ имеет место неравенство

$$\varphi(t + \delta, y[t_*[\cdot]t + \delta]) - \varphi(g) \geq p_0\delta + \langle p, y[t + \delta] - x[t]\rangle + o_{y[\cdot]}(\delta), \ \ \delta \in [0, T - t]$$

[неравенство

$$\varphi(t + \delta, y[t_*[\cdot]t + \delta]) - \varphi(g) \leq q_0\delta + \langle q, y[t + \delta] - x[t]\rangle + o_{y[\cdot]}(\delta), \ \ \delta \in [0, T - t]$$

соответственно]. Здесь, как и в (1.2), величина $o_{y[\cdot]}(\delta)$ зависит от выбора $y[\cdot] \in \mathrm{Lip}(g)$, $o_{y[\cdot]}(\delta)/\delta \to 0$ при $\delta \to +0$.

Заметим, что множества $D^-\varphi(g)$ и $D^+\varphi(g)$ могут быть пусты. Например, рассмотрим функционал

$$\psi(t, x[t_*[\cdot]t]) = \left| \int_{t_*}^{t} x[\tau]d\tau + x[t] \right|, \tag{4.3}$$

$$t \in [t_0, T] \ (t_* \leq t_0 < T), \quad x[t_*[\cdot]t] \in C([t_*, t], \mathbb{R}) \ (n = 1).$$

Пусть $t^0 \in [t_0, T]$, $g^0 = (t^0, x[t_*[\cdot]t^0] \equiv 0)$. Вычисляя для функционала (4.3) величины (4.1) в точке g^0, получаем

$$\eta^-\psi(g^0, p_0, p) = \begin{cases} -p_0 \text{ при } \ |p| \le 1 \\ -\infty \text{ при } |p| > 1 \end{cases}, \ \eta^+\psi(g^0, q_0, q) = +\infty, \ p_0, p, q_0, q \in \mathbb{R},$$

откуда, согласно определениям (4.2), вытекает, что

$$D^-\psi(g^0) = \{(p_0, p) \in \mathbb{R} \times \mathbb{R} : p_0 \le 0, |p| \le 1\}, \quad D^+\psi(g^0) = \emptyset.$$

Пусть функционал φ ci-дифференцируем в точке $g = (t, x[t_*[\cdot]t]) \in G$, $t < T$. Тогда из (4.1), используя (1.2), выводим

$$\eta^\mp\varphi(g, s_0, s) = \begin{cases} \partial_t\varphi(g) - s_0, & \text{если } s = \nabla\varphi(g), \\ \mp\infty, & \text{если } s \ne \nabla\varphi(g), \end{cases} \quad (s_0, s) \in \mathbb{R} \times \mathbb{R}^n.$$

Таким образом, согласно (4.2), для ci-дифференцируемого функционала $\varphi : G \mapsto \mathbb{R}$ имеем

$$\begin{aligned} D^-\varphi(g) &= \{(p_0, p) \in \mathbb{R} \times \mathbb{R}^n : p_0 \le \partial_t\varphi(g), p = \nabla\varphi(g)\}, \\ D^+\varphi(g) &= \{(q_0, q) \in \mathbb{R} \times \mathbb{R}^n : q_0 \ge \partial_t\varphi(g), q = \nabla\varphi(g)\}. \end{aligned} \tag{4.4}$$

Определение 4.1. *Вязкостным решением* (*ВР*) *уравнения* (1.3) *назовем непрерывный функционал* $\varphi : G \mapsto \mathbb{R}$, *удовлетворяющий паре неравенств*

$$p_0 + H(g, p) \le 0, \quad g = (t, x[t_*[\cdot]t]) \in G, \ t < T, \ (p_0, p) \in D^-\varphi(g), \tag{4.5}$$

$$q_0 + H(g, q) \ge 0, \quad g = (t, x[t_*[\cdot]t]) \in G, \ t < T, \ (q_0, q) \in D^+\varphi(g). \tag{4.6}$$

Из (4.4)–(4.6) следует, что если ВР ci-дифференцируемо в точке $g \in G$, то в этой точке оно удовлетворяет уравнению (1.3); напротив, если некоторый ci-гладкий функционал удовлетворяет уравнению (1.3), то он является ВР. Итак, данное понятие ВР уравнения (1.3) согласуется с понятием решения в классическом смысле.

Следующее утверждение устанавливает связь минимаксного (см. определение 2.1) и вязкостного (см. определение 4.1) решений уравнения (1.3).

Утверждение 4.1. *Пусть для гамильтониана H выполняются условия* (1_H)–(4_H) *из п.1. Тогда минимаксное решение уравнения* (1.3) *является вязкостным решением этого уравнения.*

Доказательство. Пусть $\varphi : G \mapsto \mathbb{R}$ — минимаксное решение уравнения (1.3), $g = (t, x[t_*[\cdot]t]) \in G$, $t < T$, $F^*(\cdot)$ – многозначное отображение из (2.1). Возьмем $\zeta > 0$, $q \in \mathbb{R}^n$. Согласно теореме 3.1 справедливо неравенство

$$d^-\varphi(g \mid F^*(g, q)) \le 0. \tag{4.7}$$

Из (3.1)–(3.3) и (4.7) вытекает, что существуют последовательность $\delta_i \downarrow 0$ $(i = 1, 2, \ldots)$ и функция $y[\cdot] \in \Omega(g, F^*(g,q), \varepsilon)$, где $0 < \varepsilon \leq \zeta$, для которых имеет место неравенство

$$\lim_{i\to\infty} \delta_i^{-1}[\varphi(t+\delta_i, y[t_*[\cdot]t+\delta_i]) - \varphi(g)] \leq \zeta. \tag{4.8}$$

Рассмотрим последовательность

$$f_i = (y[t+\delta_i] - x[t])\delta_i^{-1} = \delta_i^{-1}\int_t^{t+\delta_i}(dy[\tau]/d\tau)d\tau \quad (i = 1, 2, \ldots).$$

В силу (3.2), $dy[\tau]/d\tau \in [F^*(g,q)]^\varepsilon \subset [F^*(g,q)]^\zeta$ при почти всех $\tau \in [t, T]$. Множество $F^*(g,q)$ – непустой выпуклый компакт в $\mathbb{R}^n$. Поэтому, согласно теореме о среднем значении вектор-функции, $f_i \in [F^*(g,q)]^\zeta$ $(i = 1, 2, \ldots)$. Без ограничения общности рассуждений можно принять, что $f_i \to f_* \in [F^*(g,q)]^\zeta$ при $i \to \infty$. Пусть $(p_0, p) \in D^-\varphi(g)$. Тогда по определению i-субградиента [см. (4.1),(4.2)], учитывая введенные выше обозначения, получаем

$$\delta_i^{-1}[\varphi(t+\delta_i, y[t_*[\cdot]t+\delta_i]) - \varphi(g)] \geq p_0 + \langle p, f_i\rangle + o_{y[\cdot]}(\delta_i)\delta_i^{-1}, \quad i = 1, 2, \ldots\ .$$

Переходя здесь к пределу при $i \to \infty$ и учитывая (4.8), выводим

$$\zeta \geq p_0 + \langle p, f_*\rangle \geq p_0 + \min_{f\in[F^*(g,q)]^\zeta}\langle p, f\rangle = p_0 + \min_{f\in F^*(g,q)}\langle p, f\rangle - \|p\|\zeta.$$

Вектор $q \in \mathbb{R}^n$ был взят произвольно, поэтому отсюда следует, что

$$p_0 + \sup_{q\in\mathbb{R}^\ltimes}\min_{f\in F^*(g,q)}\langle p, f\rangle = p_0 + H(g,p) \leq \zeta(1 + \|p\|). \tag{4.9}$$

Так как число $\zeta > 0$ можно взять сколь угодно малым, из (4.9) вытекает справедливость требуемого неравенства (4.5).

Подобным образом проверяется выполнение для МР уравнения (1.3) условия (4.6). Утверждение доказано.

Отметим, что из теоремы 2.1 и утверждения 4.1 следует существование (при рассматриваемых условиях) ВР задачи Коши (1.3), (1.4).

В [9] доказана эквивалентность понятий минимаксного и вязкостного решений для уравнений Гамильтона–Якоби с частными производными. Доказать или опровергнуть аналогичное утверждение (т.е. что и ВР является МР) для уравнений с ci-производными типа (1.3) автору пока не удалось.

5. Пример

Пусть $n = 2$, $x = (x_1, x_2) \in \mathbb{R}^2$, $t_* = -h$, $h > 0$, $t_0 = 0$, $T > 0$. Обозначим $G_2 = \{g = (t, x[-h[\cdot]t]) : t \in [0, T], x[-h[\cdot]t] \in C([-h, t], \mathbb{R}^2)\}$. Рассмотрим задачу Коши для уравнения с ci-производными

$$\begin{aligned} &\partial_t\varphi(g) + \langle \nabla\varphi(g),\ A(t)x[t] + A_h(t)x[t-h]\rangle + |\nabla_2\varphi(g)| = 0, \\ &g = (t, x[-h[\cdot]t]) \in G_2, \quad t < T \end{aligned} \tag{5.1}$$

при условии на правом конце

$$\varphi(T, x[-h[\cdot]T]) = |x_2[t_1] - x_1[t_2]|, \quad x[\cdot] \in C([-h, T], \mathbb{R}^2). \tag{5.2}$$

Здесь $A(t)$, $A_h(t)$ — непрерывные 2×2-матрицы-функции; $\partial_t\varphi(g) \in \mathbb{R}$ и $\nabla\varphi(g) = (\nabla_1\varphi(g), \nabla_2\varphi(g)) \in \mathbb{R}^2$ — ci-производная по t и ci-градиент соответственно функционала $\varphi : G_2 \mapsto \mathbb{R}$ в точке g; $0 < t_1 < t_2 = T$.

Пусть $F(\xi, \tau)$ – непрерывная 2×2-матрица-функция, удовлетворяющая следующим соотношениям: $F(\xi, \tau) = 0$ при $\tau > \xi$, $F(\xi, \xi) = E$ – единичная матрица, $dF(\xi, \tau)/d\tau = -F(\xi, \tau)A(\tau) - F(\xi, \tau + h)A_h(\tau + h)$ при $\tau < \xi$, где $\xi \in [0, T]$. Она существует и единственна. Для 2×2-матрицы M будем обозначать через $[M]_i$ ее i-ю строку ($i = 1, 2$), которую будем трактовать как вектор-строку. Пусть $g = (t, x[-h[\cdot]t]) \in G_2$. Обозначим

$$\beta(g) = \begin{cases} [F(t_1, t)x[t] + \displaystyle\int_t^{t+h} F(t_1, \tau)A_h(\tau)x[\tau - h]d\tau]_2 - \\ -[F(t_2, t)x[t] + \displaystyle\int_t^{t+h} F(t_2, \tau)A_h(\tau)x[\tau - h]d\tau]_1, & \text{если} \ \ t < t_1, \\ x_2[t_1] - [F(t_2, t)x[t] + \displaystyle\int_t^{t+h} F(t_2, \tau)A_h(\tau)x[\tau - h]d\tau]_1, & \text{если} \ \ t_1 \le t; \end{cases} \tag{5.3}$$

$$\nu(t) = \begin{cases} |f_{22}(t_1, t) - f_{12}(t_2, t)|, & \text{если } t < t_1, \\ |f_{12}(t_2, t)|, & \text{если } t_1 \le t, \end{cases} \tag{5.4}$$

где $f_{22}(\cdot)$ и $f_{12}(\cdot)$ — соответствующие элементы матрицы $F(\cdot)$;

$$\psi_{11}(g) = \beta(g) + \int_t^T \nu(\tau)d\tau, \quad \psi_{12}(g) = -\beta(g) + \int_t^T \nu(\tau)d\tau. \tag{5.5}$$

Тогда функционал

$$\varphi(g) = \min_{i=1}\max_{j=1,2}\psi_{ij}(g) = |\beta(g)| + \int_t^T \nu(\tau)d\tau \tag{5.6}$$

будет минимаксным решением (МР) задачи (5.1), (5.2). Проверим это. Из (5.3)–(5.6) следует, что функционал (5.6) удовлетворяет условию (5.2). Покажем, что он является МР уравнения (5.1). Функционалы β и ψ_{11}, ψ_{12} являются ci-гладкими, при этом

$$\partial_t\beta(g) = \begin{cases} ([F(t_2,t)]_1 - [F(t_1,t)]_2)(A(t)x[t] + A_h(t)x[t-h]) & \text{при } t < t_1, \\ [F(t_2,t)]_1(A(t)x[t] + A_h(t)x[t-h]) & \text{при } t_1 \le t; \end{cases} \tag{5.7}$$

$$\nabla\beta(g) = (\nabla_1\beta(g), \nabla_2\beta(g)) = \begin{cases} [F(t_1,t)]_2 - [F(t_2,t)]_1 & \text{при } t < t_1, \\ -[F(t_2,t)]_1 & \text{при } t_1 \le t; \end{cases} \tag{5.8}$$

$$\begin{gathered} \partial_t\psi_{11}(g) = \partial_t\beta(g) - \nu(t), \quad \partial_t\psi_{12}(g) = -\partial_t\beta(g) - \nu(t), \\ \nabla\psi_{11}(g) = \nabla\beta(g), \quad \nabla\psi_{12}(g) = -\nabla\beta(g). \end{gathered} \tag{5.9}$$

Поэтому функционал (5.6) является кусочно ci-гладким [см. (3.7) при $I = \{1\}$, $J = \{1,2\}$]. Воспользуемся критерием из утверждения 3.2. В рассматриваемом случае удобно взять

$$\begin{aligned} &P = \{0\} \subset \mathbb{R}, \quad Q = \{q \in \mathbb{R} : |q| \le 1\}, \\ &F^*(t, x[-h[\cdot]t], q) = \{f = A(t)x[t] + A_h(t)x[t-h] + \begin{bmatrix} 0 \\ q \end{bmatrix}\}, \\ &F_*(t, x[-h[\cdot]t], p) = \{f = A(t)x[t] + A_h(t)x[t-h] + \begin{bmatrix} 0 \\ v \end{bmatrix} \mid |v| \le 1\}. \end{aligned} \tag{5.10}$$

То, что данные пары $\{Q, F^*(\cdot)\}$ и $\{P, F_*(\cdot)\}$ удовлетворяют всем нужным требованиям, проверяется непосредственно.

Пусть $g = (t, x[-h[\cdot]t]) \in G_2$ и $\beta(g) > 0$. Тогда [см. (3.8) для (5.6)] $I_0(g) = \{1\}$, $J_0(g,i) = \{1\}$, при этом, учитывая (5.7)–(5.10), имеем

$$\begin{aligned} \sup_{q\in Q}\min_{f\in F^*(g,q)}[\partial_t\psi_{11}(g) + \langle\nabla\psi_{11}(g), f\rangle] &= \inf_{p\in P}\max_{f\in F_*(g,p)}[\partial_t\psi_{11}(g) + \langle\nabla\psi_{11}(g), f\rangle] = \\ &= \partial_t\psi_{11}(g) + \langle\nabla\psi_{11}(g),\ A(t)x[t] + A_h(t)x[t-h]\rangle + |\nabla_2\psi_{11}(g)| = 0. \end{aligned}$$

Аналогично, если $\beta(g) < 0$, то $I_0(g) = \{1\}$, $J_0(g,i) = \{2\}$ и справедливы равенства

$$\sup_{q\in Q}\min_{f\in F^*(g,q)}[\partial_t\psi_{12}(g) + \langle\nabla\psi_{12}(g), f\rangle] = \inf_{p\in P}\max_{f\in F_*(g,p)}[\partial_t\psi_{12}(g) + \langle\nabla\psi_{12}(g), f\rangle] = 0.$$

Если же $\beta(g) = 0$, то $I_0(g) = \{1\}$, $J_0(g,i) = \{1,2\}$ и, согласно (5.7)–(5.10), имеем

$$\sup_{q\in Q} \min_{f\in F^*(g,q)} \max_{j=1,2}[\partial_t\psi_{1j}(g) + \langle\nabla\psi_{1j}(g), f\rangle] =$$
$$= \inf_{p\in P} \max_{f\in F_*(g,p)} \max_{j=1,2}[\partial_t\psi_{1j}(g) + \langle\nabla\psi_{1j}(g), f\rangle] =$$
$$= \max_{j=1,2}[\partial_t\psi_{1j}(g) + \langle\nabla\psi_{1j}(g),\ A(t)x[t] + A_h(t)x[t-h]\rangle + |\nabla_2\psi_{1j}(g)|] = 0.$$

Итак, в силу утверждения 3.2, функционал (5.6) действительно является МР уравнения (5.1). Он удовлетворяет условию (5.2), стало быть, является МР задачи Коши (5.1), (5.2). Отметим, что функционал (5.6) ci-дифференцируем в точках $g = (t, x[-h[\cdot]t]) \in G_2$: $\beta(g) \neq 0$. В этих точках он удовлетворяет уравнению (5.1). В тех точках, в которых $\beta(g) = 0$, он не является ci-дифференцируемым. Для задачи (5.1), (5.2) выполняются все условия теоремы 2.1, поэтому функционал (5.6) — единственное МР этой задачи. Поскольку понятие МР согласуется с понятием решения в классическом смысле, отсюда вытекает, что не существует ci-гладкого функционала, удовлетворяющего соотношениям (5.1), (5.2).

Литература

1. Ким А. В. i-Гладкий анализ и функционально-дифференциальные уравнения. Екатеринбург: УрО РАН, 1996.
2. Мышкис А. Д. О некоторых проблемах теории дифференциальных уравнений с отклоняющимся аргументом // Успехи мат. наук. 1977. Т.32, №2. С.173–202.
3. Красовский Н. Н, Субботин А. И. Позиционные дифференциальные игры. М.: Наука, 1974.
4. Осипов Ю. С. Дифференциальные игры систем с последействием // Докл. АН СССР. 1971. Т.196, №4. С.779–782.
5. Кряжимский А. В., Осипов Ю. С. Дифференциально-разностные игры сближения с функциональным целевым множеством // Прикл. математика и механика. 1973. Т.37, №1. С.2–13.
6. Krasovskii A. N., Krasovskii N. N. Control under lack of information. Boston: Birkhäuser, 1995.
7. Лукоянов Н. Ю. Об уравнении типа Гамильтона–Якоби в задачах управления с наследственной информацией // Прикл. математика и механика. 2000. Т.64, No.2. С.253–264.
8. Куржанский А. Б. О существовании решений уравнений с последействием // Дифференц. уравнения. 1970. Т.6, №10. С.1800–1809.

9. Субботин А. И. Минимаксные неравенства и уравнения Гамильтона–Якоби. М.: Наука, 1991.

10. Subbotin A. I. Generalized solutions of first-order PDEs: The dynamical optimization perspective. Boston: Birkhäuser, 1995.

11. Crandall M. G., Lions P.-L. Viscosity solutions of Hamilton–Jacobi equations // Trans. Amer. Math. Soc. 1983. Vol.277, №1. P.1–42.

12. Melikyan A. A. Generalized characteristics of first order PDEs: Applications in optimal control and differential games. Boston: Birkhäuser, 1998.

13. Clarke F. H., Ledyaev Yu. S., Stern R. J. et al. Nonsmooth analysis and control theory. N.Y.: Springer, 1998.

14. Рокафеллар Р. Выпуклый анализ. М.: Мир, 1973. .

15. Krasovskii N. N., Lukoyanov N. Yu. Equations of Hamilton–Jacobi type in hereditary systems: minimax solutions // Proc. Steklov Inst. Math.: Control in Dynamic Systems. 2000. Suppl. Issue 1. P.136–153.

16. Филиппов А. Ф. Дифференциальные уравнения с разрывной правой частью. М.: Наука, 1985.

Статья поступила 15.06.2000 г.;
окончательный вариант 20.11.2000 г.