УДК 62-505.1 : 517.977

А. Г. Кремлев

О ПОСТРОЕНИИ ИНФОРМАЦИОННЫХ МНОЖЕСТВ СИНГУЛЯРНО ВОЗМУЩЕННЫХ СИСТЕМ*

1. Введение

Математическими моделями многих управляемых динамических процессов являются сингулярно возмущенные квазилинейные системы вида

$$dz/dt = A(t,\mu)z + B(t,\mu)u + C(t,\mu)v + \mu f(t,z,\mu),$$

где $A(t,\mu)$, $B(t,\mu)$, $C(t,\mu)$, $f(t,z,\mu)$ допускают разложения по малому параметру $\mu > 0$ как регулярные (тогда их элементы при $\mu \to +0$ являются ограниченными), так и сингулярные (тогда они представимы следующим образом: $D(t,\mu) = \frac{1}{\mu}(D(t) + \tilde{D}(t,\mu))$, $\tilde{D}(t,\mu)$ ограничена при $\mu \to +0$). Существующие различные аналитические приближенные и асимптотические схемы построения субоптимальных законов управления для таких систем часто не могут быть использованы при неполной информации о протекании процесса (неопределенность по начальным условиям, входным возмущениям и т.д.). Описание информационных множеств [1, 2] возможных состояний динамической системы, совместимых с результатами текущих измерений, позволяет получить минимаксные оценки неизвестного истинного состояния системы, которые используются в процессе управления. В данной работе решение задачи оценивания определяется через множество достижимости в текущий момент наблюдаемого объекта — совокупность концов траекторий, выпущенных из множества возможных начальных состояний. В [3] указанная схема реализована для линейных объектов, в [4] получен метод построения асимптотических приближений информационных множеств для сингулярно возмущенных систем. В данной работе предлагается итерационная процедура построения множества возможных начальных состояний для квазилинейных систем, описываются свойства этого множества, указывается способ вычисления опорной функции информационного множества.

*Работа поддержана РФФИ, проект №00-01-00753

© А. Г. Кремлев, 2000

2. Постановка задачи

Рассмотрим задачу минимаксной фильтрации [1, 2] для следующей квазилинейной системы с наблюдением:

$$dz/dt = A(t)z + C(t)v + \mu f(t, z), \tag{1}$$

$$\eta(t) = G(t)z + \xi, \tag{2}$$

где $t \in T = [t_0, t_1]$; $z \in \mathbb{R}^n$; $\xi \in \mathbb{R}^s$; $v \in \mathbb{R}^q$; матрицы $A(t)$, $C(t)$, $G(t)$ и вектор-функция $f(t, z)$ соответствующих размеров с непрерывными элементами, причем $f(t, z)$ дважды непрерывно дифференцируемая по z в некотором компакте $D \subset \mathbb{R}^n$; $\eta(t)$ — s-мерный наблюдаемый на T сигнал; $\xi(t)$, $v(t)$, $t \in T$ — неопределенные возмущения, реализации которых есть измеримые по Лебегу функции, удовлетворяющие квадратичному ограничению

$$\Gamma_{t_1}(v(\cdot), \xi(\cdot)) = \int_{t_0}^{t_1} (\xi'(\tau)H(\tau)\xi(\tau) + v'(\tau)R(\tau)v(\tau))\, d\tau \le \nu^2, \tag{3}$$

где $\nu = const > 0$, $H(\tau), R(\tau)$ — симметричные, положительно-определенные матрицы с непрерывными элементами. Начальные условия $z(t_0) = z_0$ и возмущения $v = v(t)$, $\xi = \xi(t)$ неизвестны заранее.

Пусть $W(t, \cdot) = W(t, \eta_t(\cdot))$ и $Q_0(\cdot) = Q_0(\eta_t(\cdot))$ — соответственно информационное множество [2] и множество возможных начальных состояний $z_0 = z(t_0)$ системы (1), совместимые с реализовавшимся сигналом $\eta_t(\cdot)$, измеренным на $[t_0, t]$, $t \le t_1$, в силу (2), при ограничении (3).

Предположение 1. Система линейного приближения

$$dz/dt = A(t)z + C(t)v \tag{4}$$

вполне наблюдаема [1, 2] по сигналу (2) (при $v \equiv 0$, $\xi \equiv 0$) на любом отрезке $[\tau_1, \tau_2] \subseteq T$.

Как известно, включение $z_t \in W_{(0)}(t, \eta_t(\cdot))$, где $W_{(0)}(t, \eta_t(\cdot))$ — информационное множество системы линейного приближения (4), определяется неравенством

$$(z_t - c(t))'P(t)(z_t - c(t)) \le \nu^2 - h^2(t),$$

где $c(t) = P^{-1}(t)d(t)$, $P(t)$, $d(t)$, $h^2(t)$ находятся из уравнений минимаксного фильтра [2, с.254]. Однако при $\mu \ne 0$ нельзя утверждать, что множество $W_{(0)}(t, \eta_t(\cdot))$ всегда будет непустым.

Предположение 2. Сигнал $\eta_t(\cdot)$, реализовавшийся при $\mu \ne 0$ для системы (1),(2), таков, что существуют $\delta = const > 0$ и достаточно малое число $\mu_0 > 0$, для которых при $0 < \mu \le \mu_0$ выполняется $\nu^2 - h^2(t) \ge \delta$.

В этом случае множество $W_{(0)}(t,\cdot)$ будет уже непустым и определяет начальное приближение $W(t,\eta_t(\cdot))$. В [3] получен способ построения информационного множества для системы линейного приближения через множество возможных начальных состояний. Описание последнего опирается на следующий результат, справедливый и для квазилинейных систем:

Теорема 1. *Включение $z_0 \in Q_0(\eta_t(\cdot))$ равносильно неравенству*

$$\min\{\Gamma_t(v(\cdot),\xi(\cdot))|\{v(\cdot),\xi(\cdot)\} \in \Lambda(\eta_t(\cdot),z_0)\} \le \nu^2, \tag{5}$$

где $\Lambda(\eta_t(\cdot),z_0)$ — множество всех пар $\{v(\cdot),\xi(\cdot)\}$, порождающих в силу $(1),(2)$ именно сигнал $\eta_t(\cdot)$ и вектор $z_0 = z(t_0)$.

3. Множество возможных начальных состояний

В лемме 1 [3] приведено описание множества возможных начальных состояний $Q_{(0)}(\eta_t(\cdot))$ для системы линейного приближения:

$$\begin{gathered} Q_{(0)}(\eta_t(\cdot)) = \{z_0 \in \mathbb{R}^n \,|\, r_0^2(t,z_0) \le \nu^2\}, \\ r_0^2(t,z_0) = h_0^2(t) + (z_0 - c_0(t))' P_0(t)(z_0 - c_0(t)), \\ P_0(t) = \langle F_0'(t,\cdot)G(\cdot)Z[\cdot,t_0]\rangle, \quad c_0(t) = P_0^{-1}(t)\langle F_0'(t,\cdot)\eta_t(\cdot)\rangle, \\ h_0^2(t) = \langle f_0'(t,\cdot)\eta_t(\cdot)\rangle - c_0'(t)P_0(t)c_0(t), \end{gathered} \tag{6}$$

где $Z[t,\tau]$ — фундаментальная матрица решений системы (4) (при $v \equiv 0$), $\langle f(\cdot)\rangle$ есть

$$\langle f(\cdot)\rangle = \int_{t_0}^{t} f(\tau)\,d\tau\,,$$

$F_0(t,\cdot)$, $f_0(t,\cdot)$ — решения уравнений

$$J^t F_0(t,\cdot) = G(\cdot)Z[\cdot,t_0], \quad J^t f_0(t,\cdot) = \eta_t(\cdot),$$

оператор J^t определен в [3, с.34]:

$$J^t\lambda_1(\cdot) = w_1(\cdot), \quad w_1(\tau) = G(\tau)\int_{t_0}^{\tau} Z[\tau,s]C(s)R^{-1}(s)C'(s)\,\times$$
$$\times \int_s^t Z'[\sigma,s]G'(\sigma)\lambda_1(\sigma)\,d\sigma\,ds + H^{-1}(\tau)\lambda_1(\tau),\ t_0 \le \tau \le t,\ \lambda_1(\cdot) \in \mathrm{L}_2^{\mathrm{s}}([t_0,t]).$$

Теорема 2. *Для того чтобы $v_0(\cdot)$, $\xi_0(\cdot)$ доставляли минимум в (5), необходимо и достаточно выполнение следующих условий при $0 < \mu \le \mu_0$ и достаточно малом μ_0:*

(i) $\langle p_0'(\cdot)C(\cdot)v_0(\cdot) - \lambda_0'(\cdot)\xi_0(\cdot)\rangle - \Gamma_t(v_0(\cdot), \xi_0(\cdot)) =$
$= \max_{v(\cdot),\xi(\cdot)}\{\langle p_0'(\cdot)C(\cdot)v(\cdot) - \lambda_0'(\cdot)\xi(\cdot)\rangle - \Gamma_t(v(\cdot), \xi(\cdot))\}$;

(ii) $p_0(\tau)$, $t_0 \le \tau \le t$, *— решение дифференциального уравнения* $dp(\tau)/d\tau = -(A(\tau) + \mu\frac{\partial}{\partial z}f(\tau, z_0(\tau)))'p(\tau) + G(\tau)'\lambda_0(\tau), \quad p(t) = 0;$

(iii) $\eta_t(\tau) = G(\tau)z_0(\tau) + \xi_0(\tau)$, *где* $z_0(\tau) = z(\tau; v_0(\cdot), z_0)$, $\tau \in [t_0, t]$, *— решение* (1) *при* $v = v_0(\cdot)$, $z(t_0) = z_0$.

Доказательство. Необходимость следует из принципа Лагранжа при дифференциальных связях [5]. Установим достаточность. Пусть $Z_0[t, \tau]$ — фундаментальная матрица решений системы

$$dp/dt = (A(t) + \mu\tfrac{\partial}{\partial z}f(t, z_0(t)))p(t).$$

Тогда из условий (i)–(iii) имеем (при $\tau \in [t_0, t]$)

$$v_0(\tau) = \frac{1}{2}R^{-1}(\tau)C'(\tau)p_0(\tau), \quad \xi_0(\tau) = -\frac{1}{2}H^{-1}(\tau)\lambda_0(\tau),$$

$$p_0(\tau) = -\int_\tau^t Z_0'[s, \tau]G'(s)\lambda_0(s)\, ds, \tag{7}$$

$$J^t b_0(\tau, z_0) = \int_{t_0}^\tau G(\tau)Z[\tau, s]C(s)v_0(s)ds + \mu\int_{t_0}^\tau G(\tau)Z[\tau, s]f(s, z_0(s))ds + \xi_0(\tau),$$

где $b_0(\cdot, z_0) = f_0(t, \cdot) - F_0(t, \cdot)z_0$. Из найденных соотношений (7), вводя $w(t, \cdot) = -\frac{1}{2}\lambda_0(\cdot)$, получим следующее уравнение (относительно $w(t, \cdot)$):

$$J^t w(t, \tau) = J^t b_0(\tau, z_0) - \mu\int_{t_0}^\tau G(\tau)Z[\tau, s]f(s, z_0(s))\, ds -$$

$$- \int_{t_0}^\tau G(\tau)Z[\tau, s]C(s)R^{-1}(s)C'(s)(\sigma_0(t, s; w(t, \cdot)) - \sigma(t, s; w(t, \cdot)))\, ds, \tag{8}$$

$$t_0 \le \tau \le t,$$

в котором

$$\sigma(t, \tau; w(\cdot)) = \int_\tau^t Z'[s, \tau]G'(s)w(s)\, ds, \tag{9}$$

а $\sigma_0(t, \tau; w(\cdot))$ вычисляется по (9) при замене $Z[s, \tau]$ на $Z_0[s, \tau]$.

Пусть $\delta v(\cdot) = v_0(\cdot) - v_*(\cdot)$, $\delta\xi(\cdot) = \xi_0(\cdot) - \xi_*(\cdot)$, $\{v_*(\cdot), \xi_*(\cdot)\} \in \Lambda(\eta_t(\cdot), z_0)$ суть произвольные возмущения, $\Delta z(\tau) = z_0(\tau) - z_*(\cdot)$, $\Delta z(t_0) = 0$, $z_*(\tau) = z(\tau; v_*(\cdot), z_0)$, $t_0 \le \tau \le t$. Тогда по формуле Тейлора получаем

$$\Gamma_t(v_*(\cdot), \xi_*(\cdot)) - \Gamma_t(v_0(\cdot), \xi_0(\cdot)) = \Gamma_t(\delta v(\cdot), \delta\xi(\cdot)) - \langle p_0'(\cdot)C(\cdot)\delta v(\cdot)\rangle +$$

$$+\langle\lambda_0'(\cdot)\delta\xi(\cdot)\rangle=\Gamma_t(\delta v(\cdot),\delta\xi(\cdot))-\frac{1}{2}\mu\langle p_0'(\cdot)\sum_{i,j=1}^{k}\frac{\partial^2}{\partial z_i\partial z_j}f(\cdot,z_\vartheta(\cdot))\Delta z_i(\cdot)\Delta z_j(\cdot)\rangle;$$

$$z_\vartheta(\tau)=z_0(\tau)+\vartheta(\tau)\Delta z(\tau),\quad 0\le\vartheta(\tau)\le 1,\quad \tau\in[t_0,t],$$
$$\Delta z(\tau)=(\Delta z_1(\tau),\ldots,\Delta z_n(\tau))'.$$

Применяя неравенство Гронуолла, имеем оценку $\|\Delta z(\cdot)\|\le L\langle\|v(\cdot)\|\rangle$ с константой $L>0$. Тогда при $0<\mu\le\mu_0$ и достаточно малом $\mu_0>0$ находим

$$\Gamma_t(v_*(\cdot),\xi_*(\cdot))-\Gamma_t(v_0(\cdot),\xi_0(\cdot))\ge$$

$$\ge(M_1-\frac{1}{2}\mu M_3n^2L\langle\|p_0(\cdot)\|\rangle)\times\langle\|\delta v(\cdot)\|^2\rangle+M_2\langle\|\delta\xi(\cdot)\|^2\rangle\ge 0,$$

где M_1,M_2,M_3 — некоторые положительные постоянные, причем равенство нулю возможно лишь при $\delta v(\cdot)=0$, $\delta\xi(\cdot)=0$.

Теорема 3. *Множество возможных начальных состояний* $Q_0(\eta_t(\cdot))$ *при* $0<\mu\le\mu_0$ *определяется неравенством*

$$(z_0-c_0(t))'P_0(t)(z_0-c_0(t))+\mu\beta_0(t,z_0)\le\nu^2-h_0^2(t),\tag{10}$$

где функция $\beta_0(t,z_0)$ *имеет вид*

$$\mu\beta_0(t,z_0)=-\mu\langle\sigma'(t,\cdot;w(t,\cdot)+b_0(\cdot,z_0))f(\cdot,z_0(\cdot))\rangle+\langle(\sigma_0(t,\cdot;w(t,\cdot))-$$
$$-\sigma(t,\cdot;b_0(\cdot,z_0)))'C(\cdot)R^{-1}(\cdot)C'(\cdot)(\sigma_0(t,\cdot;w(t,\cdot))-\sigma(t,\cdot;w(t,\cdot)))\rangle.$$

Доказательство следует из соотношения $\Gamma_t(v_0(\cdot),\xi_0(\cdot))\le\nu^2$, где $v_0(\cdot)$, $\xi_0(\cdot)$ минимизируют (5) и находятся по теореме 2. Используя уравнение (8) и учитывая соотношения (6) и следующее равенство из [3]:

$$\langle b_0'(\cdot,z_0)J^tb_0(\cdot,z_0)\rangle=r_0^2(t,z_0),$$

получим требуемое.

Замечание 1. В соответствии с теоремой 2 [3] величины $P_0(t)$, $d_0(t)$, $c_0(t)=P_0^{-1}(t)d_0(t)$ можно найти с помощью следующих соотношений:

$$dP_0(t)/dt=\Delta'(t,t_0)G'(t)H(t)G(t)\Delta(t,t_0),\quad P_0(t_0)=0;$$
$$d\,d_0(t)/dt=\Delta'(t,t_0)G'(t)H(t)(\eta_t(t)-G(t)\alpha_0(t)),\quad d_0(t_0)=0;$$

$$\begin{aligned}d\Omega(t)/dt=A(t)\Omega(t)+\Omega(t)A'(t)-\Omega(t)G'(t)H(t)G(t)\Omega(t)+\\+C(t)R^{-1}(t)C'(t),\quad \Omega(t_0)=0;\end{aligned}\tag{11}$$

$$d\Delta(t,t_0)/dt = (A(t) - \Omega(t)G'(t)H(t)G(t))\Delta(t,t_0), \quad \Delta(t_0,t_0) = E_n;$$
$$\alpha_0(t) = \langle \Delta(t,\cdot)\Omega(\cdot)G'(\cdot)H(\cdot)\eta_t(\cdot)\rangle,$$

где E_n — единичная $n \times n$-матрица.

Из (10), используя положительную определенность матрицы $P_0(t)$ и двухкратную непрерывную дифференцируемость по z_0 функции $\beta_0(t,z_0)$, получаем следующие свойства множества $Q_0(\eta_t(\cdot))$.

Теорема 4. (i) *Множество возможных начальных состояний* $Q_0(\eta_t(\cdot))$ *при* $0 < \mu \le \mu_0$ *— замкнутое, ограниченное и выпуклое.*

(ii) *При* $\mu \to +0$ *множество* $Q_0(\eta_t(\cdot))$ *сходится в хаусдорфовой метрике к* $Q_{(0)}(\eta_t(\cdot))$.

4. Итерационная процедура построения множества возможных начальных состояний

Соотношения (7),(8) позволяют организовать сходящуюся при $0 < \mu \le \mu_0$ итерационную процедуру, на каждом шаге которой определяется множество $Q_{(m)}(\eta_t(\cdot))$, $m = 0,1,2,...$, аппроксимирующее $Q_0(\eta_t(\cdot))$ с точностью $o(\mu^m)$:

$$(z_0 - c_0(t))'P_0(t)(z_0 - c_0(t)) + \mu\beta_m(t,z_0) \le \nu^2 - h_0^2(t), \tag{12}$$

$$\mu\beta_m(t,z_0) = \mu\beta_{m-1}(t,z_0) + \sum_{i=1}^{m-1}\langle(\sigma'(t,\cdot;\omega_i(t,\cdot)) +$$
$$+ \sum_{j=0}^{i-1} s'_{(i-j)}(\cdot,\omega_j(t,\cdot)))C(\cdot)R^{-1}(\cdot)C'(\cdot)\sum_{k=0}^{m-i-1} s_{(m-i-k)}(\cdot,\omega_k(t,\cdot))\rangle -$$
$$-\mu\langle 2\sigma'(t,\cdot;b_0(\cdot,z_0))f_{(m-1)}(\cdot) + \sum_{i=1}^{m-1}\sigma'(t,\cdot;\omega_i(t,\cdot))f_{(m-1-i)}(\cdot)\rangle;$$

$$v_{(m)}(\tau) = v_{(m-1)}(\tau) + R^{-1}(\tau)C'(\tau)(\sigma(t,\tau;\omega_m(t,\cdot)) + \sum_{i=1}^{m} s_{(i)}(\tau,\omega_{m-i}(t,\cdot))),$$
$$\xi_{(m)}(\tau) = \xi_{(m-1)}(\tau) + H^{-1}(\tau)\omega_m(\tau), \quad m = 1,2,\dots\ ,$$

где $\omega_m(t,\tau)$, $t_0 \le \tau \le t$, есть решение уравнения

$$J^t\omega_m(t,\tau) = -\mu\int_{t_0}^{\tau} G(\tau)Z[\tau,s]f_{(m-1)}(s)\,ds - \int_{t_0}^{\tau} G(\tau)Z[\tau,s]C(s)R^{-1}(s)\times$$
$$\times C'(s)\sum_{i=0}^{m-1} s_{(m-i)}(s,\omega_i(t,\cdot))ds$$

и введены обозначения

$$s_{(m)}(\tau,\lambda(\cdot))=\int_\tau^t (Z_{(m)}[s,\tau]-Z_{(m-1)}[s,\tau])'G'(s)\lambda(s)\,ds,$$

$$f_{(m)}(\tau)=f(\tau,z_{(m)}(\tau))-f(\tau,z_{(m-1)}(\tau)),\quad z_{(m)}(\tau)=z_{(m)}(\tau;v_{(m)}(\cdot),z_0),$$

где $\beta_0(t,z_0)=0$; $\mu\beta_1(t,z_0)=-2\mu\langle\sigma'(t,\cdot;b_0(\cdot,z_0))f_{(0)}(\cdot)\rangle$; $f_{(0)}(\cdot)=f(\cdot,z_{(0)}(\cdot))$; $Z_{(0)}[s,\tau]=Z[s,\tau]$; $s_{(0)}(\cdot,\lambda(\cdot))=\sigma(t,\cdot;\lambda(\cdot))$; $\omega_0(t,\cdot)=b_0(\cdot,z_0)$; минимизирующие функции $v_{(0)}(\cdot)$, $\xi_{(0)}(\cdot)$ суть

$$v_{(0)}(\cdot)=R^{-1}(\cdot)C'(\cdot)\sigma(t,\cdot;b_0(\cdot,z_0)),\quad \xi_{(0)}(\cdot)=H^{-1}(\cdot)b_0(\cdot,z_0);$$

$Z_{(m)}[t,\tau]$ — фундаментальная матрица решений системы

$$dp/dt=(A(t)+\mu\tfrac{\partial}{\partial z}f(t,z_{(m-1)}(t)))p(t);$$

$z_{(m)}(\cdot;v(\cdot),z_0)$ определяется формулами

$$z_{(0)}(t;v(\cdot),z_0)=Z[t,t_0]z_0+\langle Z[t,\cdot]C(\cdot)v(\cdot)\rangle,$$

$$z_{(m)}(t;v(\cdot),z_0)=z_{(0)}(t;v(\cdot),z_0)+\mu\langle Z[t,\cdot]f(\cdot,z_{(m-1)}(\cdot;v(\cdot),z_0))\rangle.$$

Пример 1. Рассмотрим систему $\dot z=\mu z^2+v$, $\eta=z+\xi$ при ограничении

$$\int_{t_0}^{t_1}(\xi^2(\tau)+v^2(\tau))\,d\tau\le\nu^2.$$

Пусть на отрезке $[t_0,t]$ реализовался сигнал $\eta_t(\cdot)\equiv 1$. Вычислим множество возможных начальных состояний $Q_0(\eta_t(\cdot))$, используя итерационную схему (12). На начальном шаге имеем следующее описание $Q_{(0)}(\eta_t(\cdot))$:

$$(z_0-1)^2 th(t-t_0)\le\nu^2, \tag{13}$$

так как здесь решения (11) суть $P_0(t)=d_0(t)=th(t-t_0)$, $c_0(t)=1$, $h_0^2(t)=0$ и выполняется предположение 2.

Первое приближение $Q_{(1)}(\eta_t(\cdot))$ определяется неравенством

$$(z_0-1)^2 th(t-t_0)+\mu\beta_1(t,z_0)\le\nu^2, \tag{14}$$

$$\mu\beta(t,z_0)=-2\mu(1-z_0)(1-sech(t-t_0)-(1-z_0)th^2(t-t_0)+$$
$$+\tfrac{1}{3}(1-z_0)^2(1-sech^3(t-t_0))),$$

причем

$$b_0(\tau,z_0)=\frac{ch(t-\tau)}{ch(t-t_0)}(1-z_0),\quad v_{(0)}(\tau)=\frac{sh(t-\tau)}{ch(t-t_0)}(1-z_0).$$

Неравенство (14) описывает множество $W_0(\eta_t(\cdot))$ с точностью $o(\mu)$, $0<\mu\le\mu_0$.

5. Вычисление опорной функции информационного множества квазилинейной системы

Используя соотношения, описывающие $Q_0(\eta_t(\cdot))$ — множество возможных начальных состояний z_0 системы (1), можно найти информационное множество $W(t,\eta_t(\cdot))$ следующим образом.

Теорема 5. *Пусть* $\mathrm{Z}(t,z_0)$ *— множество достижимости системы* (1) *к моменту* t *при* $z(t_0)=z_0$*, совместимое с реализовавшимся сигналом* $\eta_t(\cdot)$ (*при* $\{v(\cdot),\xi(\cdot)\}\in\Lambda(\eta_t(\cdot),z_0)$). *Тогда опорная функция информационного множества* $W(t,\eta_t(\cdot))$ *определяется равенством* ($l\in\mathbb{R}^n$)

$$\rho(l|W(t,\eta_t(\cdot)))=\max_{z_0\in Q_0(\eta_t(\cdot))}\rho(l|\mathrm{Z}(t,z_0)). \tag{15}$$

Доказательство. Обозначим через $V(\eta_t(\cdot),z_0)$ множество всех $v(\cdot)$, удовлетворяющих $\Gamma_t(v(\cdot),\xi(\cdot))\le\nu^2$ при

$$\xi(\tau)=J^tb_0(\tau,z_0)-\langle G(\tau)Z[\tau,\cdot]C(\cdot)v(\cdot)\rangle-\mu\langle G(\tau)Z[\tau,\cdot]\times$$
$$\times f(\cdot,z(\cdot;v(\cdot),z_0))\rangle,\quad t_0\le\tau\le t.$$

Поскольку $z_t\in W(t,\eta_t(\cdot))$ только в том случае, если найдутся такие $z_0\in Q_0(\eta_t(\cdot))$ и $v(\cdot)\in V(\eta_t(\cdot),z_0)$, что $z_t=z(t;v(\cdot),z_0)$, имеем

$$\rho(l|\mathrm{Z}(t,z_0))=\max\{l'z(t;v(\cdot),z_0)\,|\,v(\cdot)\in V(\eta_t(\cdot),z_0)\},$$

откуда следует требуемое.

Таким образом, соотношение (15) представимо в виде

$$\rho(l|W(t,\eta_t(\cdot)))=\max_{z_0\in Q_0(\eta_t(\cdot))}\ \max_{v(\cdot)\in V(\eta_t(\cdot),z_0)}\{l'Z[t,t_0]z_0+$$
$$+\langle l'Z[t,\cdot]C(\cdot)v(\cdot)\rangle+\mu\langle l'Z[t,\cdot]f(\cdot,z(\cdot;v(\cdot),z_0))\rangle\}, \tag{16}$$

причем $V(\eta_t(\cdot),z_0)$ есть множество $v(\cdot)$, удовлетворяющих

$$\langle(v(\cdot)-\hat\varphi(\cdot,z_0,v(\cdot)))'I^t(v(\cdot)-\hat\varphi(\cdot,z_0,v(\cdot)))\rangle\le\nu^2-\hat r^2(t,z_0,v(\cdot)),$$

где $\hat\varphi(\cdot,z_0,v(\cdot))$ — решение уравнения

$$I^t\hat\varphi(\cdot,z_0,v(\cdot))=\hat d(\cdot,z_0,v(\cdot)),\quad \hat d(s,z_0,v(\cdot))=d(s,z_0)-$$
$$-\mu C'(s)\int_s^t Z'[\tau,s]G'(\tau)H(\tau)g(\tau,z_0,v(\cdot))\,d\tau,\quad s\in[t_0,t],$$
$$g(\tau,z_0,v(\cdot))=\int_{t_0}^{\tau}G(\tau)Z[\tau,\sigma]f(\sigma,z(\sigma;v(\cdot),z_0))\,d\sigma;$$

оператор I^t определен в [3, с.34]:

$$I^t\lambda_2(\cdot) = w_2(\cdot), \quad w_2(\tau) = C'(\tau)\int_\tau^t Z'[s,\tau]G'(s)H(s)G(s)\int_{t_0}^s Z[s,\sigma]C(\sigma)\times$$
$$\times\lambda_2(\sigma)\,d\sigma\,ds + R(\tau)\lambda_2(\tau), \quad t_0\le\tau\le t, \quad \lambda_2(\cdot)\in \mathrm{L}_2^{\mathrm{q}}([t_0,t]);$$

функция $\hat r^2(t,z_0,v(\cdot))$ задана равенством

$$\hat r^2(t,z_0,v(\cdot)) = \langle (J^t b_0(\cdot,z_0) - \mu g(\cdot,z_0,v(\cdot)))' H(\cdot)(J^t b_0(\cdot,z_0) -$$
$$- \mu g(\cdot,z_0,v(\cdot)))\rangle - \langle \hat\varphi'(\cdot,z_0,v(\cdot)) I^t \hat\varphi(\cdot,z_0,v(\cdot))\rangle.$$

Реализация условия (15) производится по итерационной схеме $\rho_k(l)\to\rho(l|W(t,\eta_t(\cdot)))$, на каждом шаге которой рассматривается соответствующая линейная по структуре вспомогательная задача вида

$$\rho^{(k)}(l) = \max_{z_0}\max_{v(\cdot)}\{l'z(t;v^{(k-1)}(\cdot),z_0^{(k-1)}) + l'Z_{(k)}[t,t_0](z_0 - z_0^{(k-1)}) + \tag{17}$$
$$+ \langle l'Z_{(k)}[t,\cdot]C(\cdot)(v(\cdot) - v^{(k-1)}(\cdot))\rangle \mid z_0\in Q_{(k)}(\eta_t(\cdot)), v(\cdot)\in V_{(k)}(\eta_t(\cdot),z_0)\},$$

где $Z_{(k)}[\tau,s]$ — фундаментальная матрица решений системы уравнений в вариациях (при $\delta v\equiv 0$)

$$d\delta z/d\tau = A^{(k)}(\tau,\mu)\delta z + C(\tau)\delta v,$$
$$A^{(k)}(\tau,\mu) = A(\tau) + \mu\frac{\partial}{\partial z} f(\tau, z_{(k-1)}(\tau; v^{(k-1)}(\cdot), z_0^{(k-1)})),$$

полученной при вариации возмущения $\delta v = v(\cdot) - v^{(k-1)}(\cdot)$, $v(\cdot)\in V_{(k)}(\eta_t(\cdot),z_0)$ и начального условия $\delta z(t_0) = z_0 - z_0^{(k-1)}$, $z_0\in Q_{(k)}(\eta_t(\cdot))$, и составленной вдоль движения $z(\tau;v^{(k-1)}(\cdot),z_0^{(k-1)})$, $\tau\in[t_0,t]$,

$$z(\tau;v^{(k-1)}(\cdot),z_0^{(k-1)}) = z_{(k-1)}(\tau;v^{(k-1)}(\cdot),z_0^{(k-1)}) + \mu\int_{t_0}^\tau Z[\tau,s]\times$$
$$\times\left(f(s,z_{(k-1)}(s;v^{(k-1)}(\cdot),z_0^{(k-1)})) - f(s,z_{(k-2)}(s;v^{(k-1)}(\cdot),z_0^{(k-1)}))\right)ds + o(\mu^k),$$
$$z_{(k-1)}(\tau;v^{(k-1)}(\cdot),z_0^{(k-1)})) = Z[\tau,t_0]z_0^{(k-1)} + \int_{t_0}^\tau Z[\tau,s]C(s)v^{(k-1)}(s)\,ds +$$
$$+\mu\int_{t_0}^\tau Z[\tau,s]f(s,z_{(k-2)}(s;v^{(k-2)}(\cdot),z_0^{(k-2)}))\,ds.$$

Здесь множество $Q_{(k)}(\eta_t(\cdot))$ определяется из соотношений (12), множество $V_{(k)}(\eta_t(\cdot),z_0)$ описывается следующим образом:

$$V_{(k)}(\eta_t(\cdot),z_0) = \{v(\cdot)\,|\,\langle (v(\cdot) - \varphi_{(k)}(\cdot,z_0))' I^t_{(k)}(v(\cdot) - \varphi_{(k)}(\cdot,z_0))\rangle \le$$
$$\le \nu^2 - r^2_{(k)}(t,z_0)\}, \quad r^2_{(k)}(t,z_0) = \langle b'_{(k)}(\cdot,z_0) J^t_{(k)} b_{(k)}(\cdot,z_0)\rangle,$$

причем $z_0 \in Q^*_{(k)}(\eta_t(\cdot))$, $Q^*_{(k)}(\eta_t(\cdot)) = \{z_0 \,|\, r^2_{(k)}(t, z_0) \le \nu^2\}$, $\varphi_{(k)}(\cdot, z_0)$, $b_{(k)}(\cdot, z_0)$ — решения интегральных уравнений

$$I^t_{(k)}\varphi_{(k)}(\cdot, z_0) = d_{(k)}(\cdot, z_0), \quad d_{(k)}(s, z_0) = C'(s)\int_s^t Z'_{(k)}[\tau, s]G'(\tau)H(\tau) \times$$
$$\times (\eta_t^{(k)}(\tau) - G(\tau)Z_{(k)}[\tau, t_0]z_0)\,d\tau, \quad t_0 \le s \le t;$$
$$J^t_{(k)}b_{(k)}(\cdot, z_0) = \eta_t^{(k)}(\cdot) - G(\cdot)Z_{(k)}[\cdot, t_0]z_0;$$

$I^t_{(k)}$, $J^t_{(k)}$ — линейные операторы вида I^t, J^t, где $Z[s,\tau]$ заменено на $Z_{(k)}[s,\tau]$; вспомогательный сигнал $\eta_t^{(k)}(\tau)$ есть

$$\eta_t^{(k)}(\tau) = \eta_t(\tau) - G(\tau)((Z[\tau, t_0] - Z_{(k)}[\tau, t_0])z_0^{(k-1)} + \int_{t_0}^{\tau}(Z[\tau, s] -$$
$$- Z_{(k)}[\tau, s])C(s)v^{(k-1)}(s)\,ds + \mu\int_{t_0}^{\tau} Z[\tau, s]f(s, z(s; v^{(k-1)}(s), z_0^{(k-1)}))\,ds).$$

Вычисленная на k-м шаге итерационной процедуры $\rho^{(k)}(l)$ определяет опорную функцию приближения $W_{(k)}(t, \eta_t(\cdot))$: при $l'l = 1$, $0 < \mu \le \mu_0$

$$\rho(l|W_{(k)}(t, \eta_t(\cdot))) = \rho^{(k)}(l), \tag{18}$$
$$\rho(l|W(t, \eta_t(\cdot))) = \rho(l|W_{(k)}(t, \eta_t(\cdot))) + o(\mu^k).$$

Замечание 2. В соответствии с теоремой 1 [3] решение задачи (17) представимо в следующем виде: с точностью $o(\mu^k)$, $0 < \mu \le \mu_0$,

$$\rho^{(k)}(l) = \rho_k(l) + l'\Big(Z[t, t_0] - Z_{(k)}[t, t_0]\Big)z_0^{(k-1)} + \langle l'\Big(Z[t, \cdot] -$$
$$- Z_{(k)}[t, \cdot]\Big)C(\cdot)v^{(k-1)}(\cdot)\rangle + \mu\langle l'Z[t, \cdot]f(\cdot, z_{k-2}(\cdot; v^{(k-2)}(\cdot), z_0^{(k-2)}))\rangle +$$
$$+ \mu\langle l'Z[t, \cdot](f(\cdot, z_{k-1}(\cdot; v^{(k-1)}(\cdot), z_0^{(k-1)})) -$$
$$- f(\cdot, z_{k-2}(\cdot; v^{(k-1)}(\cdot), z_0^{(k-1)}))))\rangle,$$

где

$$\rho_k(l) = l'c_{(k)}(t) + (\nu^2 - h^2_{(k)}(t))^{1/2}(l'P^{-1}_{(k)}(t)l)^{1/2},$$
$$P^{-1}_{(k)}(t) = \Omega^{(k)}(t) + \Delta^{(k)}(t, t_0)(P_0^{(k)}(t))^{-1}(\Delta^{(k)}(t, t_0))',$$
$$c_{(k)}(t) = \alpha_0^{(k)}(t) + \Delta^{(k)}(t, t_0)(P_0^{(k)}(t))^{-1}d_0^{(k)}(t).$$

Величины $\Omega^{(k)}(t)$, $\Delta^{(k)}(t,t_0)$, $P_0^{(k)}(t)$, $d_0^{(k)}(t)$, $\alpha_0^{(k)}(t)$ могут быть найдены как решения уравнений (11) при замене $A(t)$, $\eta_t(\cdot)$ на $A^{(k)}(t,\mu)$ и $\eta_t^{(k)}(\cdot)$ соответственно.

Пример 2. Вычислим информационное множество $W(t,\eta_t(\cdot))$ системы, рассмотренной в примере 1, при реализовавшемся на $[t_0,t]$ сигнале $\eta_t(\cdot)=1$. На начальном шаге предложенной итерационной схемы имеем следующую задачу:

$$\rho^{(0)}(l)=\max_{z_0\in Q_{(0)}(\cdot)}\ \max_{v(\cdot)\in V_{(0)}(\eta_t(\cdot),z_0)}\{l'Z[t,t_0]z_0+\langle l'Z_{(0)}[t,\cdot]C(\cdot)v(\cdot)\rangle\},$$

где $Q_{(0)}(\cdot)$ описывается неравенством (13), а множество $V_{(0)}(\eta_t(\cdot),z_0)$ определяется соотношением

$$\langle(v(\cdot)-\varphi(\cdot,z_0))\rangle' I^t\langle(v(\cdot)-\varphi(\cdot,z_0))\rangle\le\nu^2-(z_0-1)^2\,th(t-t_0),$$
$$\varphi(\tau,z_0)=(1-z_0)\,sh(t-\tau)\,sech(t-t_0).$$

Вычислив максимум по $v(\cdot)$, получим

$$\rho^{(0)}(l)=\max_{z_0\in Q_{(0)}(\cdot)}\{l(1-(1-z_0)\,sech(t-t_0))+$$
$$+|l|\,th^{1/2}(t-t_0)(\nu^2-(z_0-1)^2\,th(t-t_0))^{1/2}\},$$

откуда имеем $\rho^{(0)}(l)=l+\nu|l|\,cth^{1/2}(t-t_0)$. Тот же результат получится, если воспользоваться теоремой 1 из [3].

На следующем шаге рассматривается задача (17) при $k=1$:

$$\rho^{(1)}(l)=\max_{z_0\in Q_{(1)}(\cdot)}\ \max_{v(\cdot)\in V_{(1)}(\eta_t(\cdot),z_0)}\{l'z(t;v^{(0)}(\cdot),z_0^{(0)})+l'Z_{(1)}[t,t_0](z_0-z_0^{(0)})+$$
$$+\langle l'Z_{(1)}[t,\cdot]C(\cdot)(v(\cdot)-v^{(0)}(\cdot))\rangle, \qquad (19)$$

где $z_0^{(0)}=1+\nu\sqrt{2}\,sgn(l)\,sh2(t-t_0)^{-1/2}$, $\quad v^{(0)}(\tau)=(z_0^{(0)}-1)\,sh(\tau-t_0)$;

$$z_{(0)}(\tau)=1+(z_0^{(0)}-1)\,ch(\tau-t_0);$$
$$z(\tau;v^{(0)}(\cdot),z_0^{(0)})=z_{(0)}(\tau)+\mu\big(\tau-t_0+(z_0^{(0)}-1)\,sh(\tau-t_0)+$$
$$+\tfrac{1}{2}(z_0^{(0)}-1)^2(\tfrac{1}{2}sh2(\tau-t_0)+\tau-t_0)\big);$$
$$Z_{(1)}[s,\tau]=1+2\mu\Big(s-\tau+(z_0^{(0)}-1)(sh(s-t_0)-sh(\tau-t_0))\Big)+o(\mu).$$

Пользуясь замечанием 2, решение задачи (19) можно представить с точностью $o(\mu)$, $0<\mu\le\mu_0$, в виде

$$\rho^{(1)}(l)=\rho_1(l)+l'\Big(Z[t,t_0]-Z_{(1)}[t,t_0]\Big)z_0^{(0)}+\langle l'\Big(Z[t,\cdot]-$$
$$-Z_{(1)}[t,\cdot]\Big)C(\cdot)v^{(0)}(\cdot)\rangle+\mu\langle l'Z[t,\cdot]f(\cdot,z_{(0)}(\cdot))\rangle;$$

$$\rho_1(l) = l'c_{(1)}(t) + (\nu^2 - h^2_{(1)}(t))^{1/2}(l'P^{-1}_{(1)}(t)l)^{1/2}.$$

Последовательно вычисляя величины $\Omega^{(1)}(t)$, $\Delta^{(1)}(t,t_0)$, $P_0^{(1)}(t)$, $d_0^{(1)}(t)$, $c_{(1)}(t)$, $P^{-1}_{(1)}(t)$, $h^2_{(1)}(t)$, получим с точностью $o(\mu)$, $0 < \mu \le \mu_0$:

$$\Omega^{(1)}(t) = th(t-t_0) + \mu\omega_1(t); \quad \Delta^{(1)}(t,t_0) = sech(t-t_0)(1+\mu\gamma_1(t,t_0));$$
$$P_0^{(1)}(t) = th(t-t_0) + 2\mu\int_{t_0}^{t}\gamma_1(\tau,t_0)\,sech^2(\tau-t_0)\,d\tau;$$
$$d_0^{(1)}(t) = th(t-t_0) + \mu\gamma_4(t,t_0); \quad c_{(1)}(t) = 1 + \mu\,sech(t-t_0)\,\gamma_5(t,t_0);$$
$$P^{-1}_{(1)}(t) = cth(t-t_0) + \mu(\omega_1(t) + \gamma_2(t,t_0));$$
$$h^2_{(1)}(t) = \mu\int_{t_0}^{t}(\hat\eta(\tau) - sech(\tau-t_0)\,\gamma_5(\tau,t_0))^2\,d\tau,$$

где

$$\omega_1(t) = 2\,sech^2(t-t_0)\int_{t_0}^{t} z_{(0)}(\tau)\,sh2(\tau-t_0)\,d\tau;$$
$$\gamma_1(t,t_0) = \int_{t_0}^{t}(2z_{(0)}(\tau) - \omega_1(\tau))\,d\tau;$$
$$\gamma_2(t,t_0) = 4cosech2(t-t_0)\gamma_1(t,t_0) - cth(t-t_0)\int_{t_0}^{t}\gamma_1(\tau,t_0)\,sech^2(\tau-t_0)\,d\tau;$$
$$\gamma_3(t,t_0) = \gamma_1(t,t_0) + \int_{t_0}^{t}\big(th(\tau-t_0)\,\hat\eta(\tau) + \omega_1(\tau) -$$
$$- sech(\tau-t_0)(2z_{(0)}(\tau) - \omega_1(\tau))\big)\,d\tau;$$
$$\gamma_4(t,t_0) = \int_{t_0}^{t} sech(\tau-t_0)\,\big(\hat\eta(\tau) + sech(\tau-t_0)\,(\gamma_1(\tau,t_0) - \gamma_3(\tau,t_0))\big)\,d\tau;$$
$$\gamma_5(t,t_0) = \gamma_1(t,t_0) + \gamma_3(t,t_0) + th(t-t_0)\,(\omega_1(t) + \gamma_2(t,t_0)) + cth(t-t_0)\,\gamma_4(t,t_0);$$
$$\hat\eta(\tau) = \tau - t_0 + 2z_0^{(0)}(z_0^{(0)}-1)sh(\tau-t_0) + \tfrac{1}{2}(z_0^{(0)}-1)^2(\tau - t_0 + \tfrac{1}{2}sh2(\tau-t_0)).$$

Подставляя найденные величины в $\rho^{(1)}(l)$, получим с точностью $o(\mu)$, $0 < \mu \le \mu_0$:

$$\rho^{(1)}(l) = \rho_1(l) - 2\mu l\big(t - t_0 + \nu\,sgn(l)\,th^{1/2}(t-t_0)\big)z_0^{(0)} +$$
$$+\mu l\big((t-t_0)(1+2(z^{(0)}-1) - \tfrac{1}{2}(z^{(0)}-1)^2) + (z^{(0)}-1)^2 sh(t-t_0)\,(2-\tfrac{1}{2}ch(t-t_0))\big);$$
$$\rho_1(l) = l(1+\mu\gamma_5(t,t_0)\,sech(t-t_0)) +$$
$$+|l|\big(cth(t-t_0) + \mu(\omega_1(t) + \gamma_2(t,t_0))\big)^{1/2}\big(\nu^2 - h^2_{(1)}(t)\big)^{1/2}.$$

Таким образом, при $0 < \mu \leq \mu_0$ опорная функция информационного множества $\rho(l|W(t,\eta_t(\cdot)))$ определяется равенством

$$\rho(l|W(t,\eta_t(\cdot))) = \rho^{(1)}(l) + o(\mu).$$

Литература

1. Красовский Н. Н. Теория управления движением. М.: Наука, 1968.

2. Куржанский А. Б. Управление и наблюдение в условиях неопределенности. М.: Наука, 1977.

3. Кремлев А. Г. О построении асимптотики информационных множеств для сингулярно возмущенных систем // Автоматика и телемеханика. 1996. №7. С.32–42.

4. Кремлев А. Г. Асимптотика информационных множеств в сингулярно возмущенных задачах оптимального управления // Изв. РАН. Теория и системы управления. 1997. №1. С.79–84.

5. Алексеев В. М., Тихомиров В. М., Фомин С. В. Оптимальное управление. М.: Наука, 1979.

Статья поступила 22.03.1999 г.;
окончательный вариант 14.02.2000 г.