УДК 517.929

Ю. Ф. Долгий, В. С. Тарасян

КОНЕЧНОМЕРНЫЕ ОПЕРАТОРЫ МОНОДРОМИИ ДЛЯ ПЕРИОДИЧЕСКИХ СИСТЕМ ДИФФЕРЕНЦИАЛЬНЫХ УРАВНЕНИЙ С ПОСЛЕДЕЙСТВИЕМ*

Рассматривается линейная периодическая система дифференциальных уравнений с последействием

$$\frac{dx\,(t)}{dt} = \int_{-\omega}^{0} d_s\eta\,(t,s)\,x\,(t+s)\,, t \in \mathbb{R}^+ = (0, +\infty)\,, \tag{1}$$

где $x : [-\omega, +\infty) \to \mathbb{R}^n, \omega > 0$. Матричная функция η периодически зависит от первого аргумента с периодом ω и измерима по Лебегу по совокупности аргументов на множестве $[0, \omega] \times [-r, 0]$. При каждом фиксированном значении $t \in [0, \omega]$ элементы матричной функции $\eta(t, \cdot)$ имеют ограниченные вариации. Элементы матричной функции $Var_{s\in[-r,0]}\eta\,(t,s)$ измеримы и ограничены в существенном на отрезке $[0, \omega]$.

При указанных выше условиях система дифференциальных уравнений с последействием (1) для начального момента $t_0 = 0$ и произвольной начальной функции $\varphi \in C\,([-r, 0]\,, \mathbb{R}^n)$ имеет единственное решение $x\,(t, \varphi)$ при $t \geq -\omega$, т.е. $x\,(t, \varphi) = \varphi\,(t)$ при $-\omega \leq t \leq 0$, а при $t > 0$ функция $x\,(t, \varphi)$ является локально абсолютно непрерывной и удовлетворяет системе (1). Общий вид этого решения описывается формулой [1, с.180]

$$x\,(t, \varphi) = V\,(t, 0)\,\varphi\,(0) + \int_{-\omega}^{-0} d_\beta \left\{ \int_0^t V\,(t, \alpha)\,\eta\,(\alpha, \beta - \alpha)\,d\alpha \right\} \varphi\,(\beta)\,. \tag{2}$$

В формуле (2) используется специальное продолжение матричной функции η по второму аргументу на всю числовую ось: при каждом фиксированном значении $t \in \mathbb{R}^+$ полагаем $\eta\,(t,s) = 0$ при $s \geq 0$ и $\eta\,(t,s) = \eta\,(t,-r)$ при $s \leq -r$. Матричная функция V является решением матричного дифференциального уравнения

$$\frac{\partial V\,(t,s)}{\partial t} = \int_{-\omega}^{0} d_\tau\eta\,(t,\tau)\,V\,(t+\tau, s)\,, t \geq s, \tag{3}$$

*Работа выполнена при финансовой поддержке Российского фонда фундаментальных исследований, проект №99-01-00145

с начальными условиями: $V(t,s)=0$ при $s-r\leq t<s$, $V(s,s)=I_n$, где I_n — единичная матрица порядка n.

Оператор монодромии $U:(U\varphi)(\vartheta)=x(\omega+\vartheta,\varphi)$, $\vartheta\in[-\omega,0]$, является линейным вполне непрерывным оператором, действующим в пространстве $C([-\omega,0],\mathbb{R}^n)$ [1, с.228]. Его область значений принадлежит пространству векторнозначных функций, абсолютно непрерывных на отрезке $[-\omega,0]$, имеющих ограниченные в существенном производные на этом отрезке. Используя формулу (2), находим общее представление оператора монодромии

$$(U\varphi)(\vartheta)=V(\omega+\vartheta,0)\,\varphi(0)+$$
$$+\int_{-\omega}^{-0}d_\beta\left\{\int_0^{\omega+\vartheta}V(\omega+\vartheta,\alpha)\,\eta(\alpha,\beta-\alpha)\,d\alpha\right\}\varphi(\beta)\,, \tag{4}$$

где $\vartheta\in[-\omega,0]$; $\varphi\in C([-\omega,0],\mathbb{R}^n)$.

В работе описан специальный класс периодических систем с последействием, для которых операторы монодромии конечномерны. Построены характеристические уравнения операторов монодромии, действующих в пространстве непрерывных функций. Рассматриваемый класс периодических систем дифференциальных уравнений с последействием и с конечномерными операторами монодромии содержит класс систем дифференциальных уравнений, изучавшихся в работах [2,3]. Полученные результаты могут найти приложение в исследованиях по теории устойчивости импульсных систем [4,5]. Методы построения характеристического уравнения оператора монодромии в специальном гильбертовом пространстве для периодических систем дифференциальных уравнений с последействием общего вида предложены в работе [6]. Для периодических систем дифференциальных уравнений с переменным запаздыванием методы построения характеристического уравнения описаны в работах [7–10].

Теорема 1. *Пусть матричная функция η периодически зависит от первого аргумента с периодом ω и измерима по Лебегу по совокупности аргументов на множестве $[0,\omega]\times[-r,0]$. При каждом фиксированном значении $t\in[0,\omega]$ элементы матричной функции $\eta(t,\cdot)$ имеют ограниченные вариации. Элементы матричной функции $Var_{s\in[-r,0]}\eta(t,s)$ измеримы и ограничены в существенном на отрезке $[0,\omega]$. Тогда для конечномерности оператора монодромии необходимо и достаточно, чтобы продолжение матричной функции η допускало представление*

$$\eta(\alpha,\beta-\alpha)=\sum_{k=1}^{N}\eta_k^1(\alpha)\,\eta_k^2(\beta) \tag{5}$$

при $0 < \alpha < \omega$ и $-\omega \leq \beta \leq 0$, где элементы $n \times n$ матричных функций η_k^1, $k = \overline{1, N}$, измеримы и ограничены в существенном на $(0, \omega)$, а элементы матричных функций η_k^2, $k = \overline{1, N}$, имеют ограниченные вариации на $[-\omega, 0)$.

Доказательство. Достаточность. Подставим выражение (5) во второе слагаемое представления (4) оператора монодромии:

$$\sum_{k=1}^{N} \int_{-\omega}^{-0} d_\beta \left\{ \int_{0}^{\omega+\vartheta} V\left(\omega+\vartheta, \alpha\right) \eta_k^1\left(\alpha\right) d\alpha \right\} \eta_k^2\left(\beta\right) \varphi\left(\beta\right).$$

Полученное выражение второго слагаемого преобразуется к виду

$$\sum_{k=1}^{N} \int_{0}^{\omega+\vartheta} V\left(\omega+\vartheta, \alpha\right) \eta_k^1\left(\alpha\right) d\alpha \int_{-\omega}^{-0} d_\beta \eta_k^2\left(\beta\right) \varphi\left(\beta\right).$$

Используя обозначения

$$W_0\left(\vartheta\right) = V\left(\omega+\vartheta, 0\right),$$

$$W_k\left(\vartheta\right) = \int_{0}^{\omega+\vartheta} V\left(\omega+\vartheta, \alpha\right) \eta_k^1\left(\alpha\right) d\alpha, \vartheta \in \left[-\omega, 0\right], \tag{6}$$

$$f_0\left(\varphi\right) = \varphi\left(0\right), f_k\left(\varphi\right) = \int_{-\omega}^{-0} d_\beta \eta_k^2\left(\beta\right) \varphi\left(\beta\right), k = \overline{1, N}, \tag{7}$$

оператор монодромии опишем формулой

$$\left(U\varphi\right)\left(\vartheta\right) = \sum_{k=0}^{N} W_k\left(\vartheta\right) f_k\left(\varphi\right), \vartheta \in \left[-\omega, 0\right], \varphi \in C\left(\left[-\omega, 0\right], \mathbb{R}^n\right). \tag{8}$$

Получим конечномерное представление оператора, в котором W_k, $k = \overline{0, N}$ — матричные функции, абсолютно непрерывные на отрезке $[-\omega, 0]$; f_k, $k = \overline{0, N}$ — непрерывные векторные функционалы в пространстве $C\left(\left[-\omega, 0\right], \mathbb{R}^n\right)$.

Необходимость. Область значений оператора монодромии принадлежит пространству абсолютно непрерывных вектор-функций на отрезке $[-\omega, 0]$, имеющих ограниченные в существенном производные. Поэтому в представлении конечномерного оператора матричные функции W_k, $k = \overline{0, N}$, абсолютно непрерывны на отрезке $[0, \omega]$ и имеют ограниченные в существенном производные, а непрерывные векторные функционалы в пространстве $C([-\omega, 0], \mathbb{R}^n)$ допускают представления:

$$f_k\left(\varphi\right) = \int_{-\omega}^{-0} d_\beta \eta_k^2\left(\beta\right) \varphi\left(\beta\right), k = \overline{0, N},$$

где η_k^2 — матричные функции с ограниченным изменением на отрезке $[-\omega, 0]$. Учитывая представление оператора монодромии (4), полагаем

$$f_0(\varphi) = \varphi(0), f_k(\varphi) = \int_{-\omega}^{-0} d_\beta \eta_k^2(\beta)\varphi(\beta), k = \overline{1, N}.$$

Тогда необходимо должны выполняться равенства $W_0(\vartheta) = V(\omega + \vartheta, 0)$ при $\vartheta \in [-\omega, 0]$,

$$\sum_{k=1}^{N} W_k(\vartheta) \int_{-\omega}^{-0} d_\beta \eta_k^2(\beta)\varphi(\beta) = \int_{-\omega}^{-0} d_\beta \left\{ \int_0^{\omega+\vartheta} V(\omega+\vartheta, \alpha)\eta(\alpha, \beta-\alpha)\, d\alpha \right\} \varphi(\beta)$$

при $\vartheta \in [-\omega, 0]$, $\varphi \in C([-\omega, 0], \mathbb{R}^n)$. Последнее равенство выполняется тогда и только тогда, когда

$$\sum_{k=0}^{N} W_k(\vartheta)\eta_k^2(\beta) = \int_0^{\omega+\vartheta} V(\omega + \vartheta, \alpha)\eta(\alpha, \beta - \alpha)\, d\alpha, \tag{9}$$

$$\vartheta \in [-\omega, 0], \beta \in [-\omega, 0).$$

В равенство (9) мы не включили произвольную функцию аргумента ϑ, воспользовавшись произволом в определении матричной функции η. Подставив $\alpha = \omega + \vartheta$, заменим равенство (9) эквивалентным ему равенством

$$\sum_{k=0}^{N} W_k(\alpha - \omega)\eta_k^2(\beta) = \int_0^{\alpha} V(\alpha, \xi)\eta(\alpha_{1,}\beta - \xi)\, d\xi, \tag{10}$$

$$\alpha \in (0, \omega), \beta \in [-\omega, 0),$$

которое является уравнением Вольтерра первого рода относительно неизвестной матричной функции $\eta(\alpha, \beta - \alpha)$ аргумента $\alpha \in (0, \omega)$ при фиксированном аргументе $\beta \in [-\omega, 0)$. Дифференцируя равенство (10), переходим к уравнению Вольтерра второго рода

$$\eta(\alpha, \beta - \alpha) + \int_0^{\alpha} \frac{\partial V(\alpha, \xi)}{\partial \alpha}\eta(\alpha_{1,}\beta - \xi)\, d\xi =$$

$$= \sum_{k=1}^{N} \frac{dW_k(\alpha - \omega)}{d\alpha}\eta_k^2(\beta), \alpha \in (0, \omega), \beta \in [-\omega, 0).$$

Полученное уравнение имеет единственное решение, определяемое формулой

$$\eta(\alpha, \beta - \alpha) = \sum_{k=1}^{N} \frac{dW_k(\alpha - \omega)}{d\alpha}\eta_k^2(\beta) -$$

$$-\int_0^{\alpha} \Gamma(\alpha,\xi) \sum_{k=1}^{N} \frac{dW_k(\xi-\omega)}{d\xi} \eta_k^2(\beta)\, d\xi, \alpha \in (0,\omega), \beta \in [-\omega, 0),$$

где резольвента $\Gamma(\alpha,\xi)$, ядра $\frac{\partial V(\alpha,\xi)}{\partial \alpha}$, измерима и ограничена в существенном по совокупности аргументов ξ и α в области $0 < \xi \leq \alpha < \omega$ [11, с.45,153].

Следовательно, для продолжения матричной функции η справедливо представление (5), в котором функции

$$\eta_k^1(\alpha) = \frac{dW_k(\alpha-\omega)}{d\alpha} - \int_0^{\alpha} \Gamma(\alpha,\xi) \frac{dW_k(\xi-\omega)}{d\xi} d\xi, \tag{11}$$

$$\alpha \in (0,\omega), k = \overline{1,N},$$

измеримы и ограничены на интервале $(0,\omega)$.

Формулы (11) не противоречат формулам (6), так как при заданных измеримых и ограниченных функциях η_k^1, $k = \overline{1,N}$ на интервале $(0,\omega)$, решения уравнений (11) определяются формулами

$$\frac{dW_k(\alpha-\omega)}{d\alpha} = \eta_k^1(\alpha) + \int_0^{\alpha} \frac{\partial V(\alpha,\xi)}{\partial \alpha} \eta_k^1(\xi)\, d\xi = \frac{\partial}{\partial \alpha} \int_0^{\alpha} V(\alpha,\xi)\, \eta_k^1(\xi)\, d\xi,$$

$$\alpha \in (0,\omega), k = \overline{1,N},$$

или

$$W_k(\alpha-\omega) = \int_0^{\alpha} V(\alpha,\xi)\, \eta_k^1(\xi)\, d\xi, \alpha \in (0,\omega), k = \overline{1,N},$$

из которых следуют формулы (6).

Определение 1. *Матричные функции W_k, $k = \overline{0,N}$, обладают свойством «линейной зависимости» на отрезке $[-\omega, 0]$, если в тождестве*

$$\sum_{k=0}^{N} W_k(\vartheta)\, C_k \equiv 0, \vartheta \in [-\omega, 0], \tag{12}$$

среди постоянных векторов C_k, $k = \overline{0,N}$ имеются ненулевые векторы. В противном случае матричные функции W_k, $k = \overline{0,N}$, обладают свойством «линейной независимости» на отрезке $[-\omega, 0]$.

Лемма 1. *Матричные функции W_k, $k = \overline{0,N}$, определяемые формулами (6), обладают свойством «линейной независимости», если*

$$\det \left\| \eta_k^1(\alpha)\, \eta_m^1(\alpha) \right\|_1^N \neq 0 \tag{13}$$

на множестве положительной меры из интервала $(0,\omega)$.

Доказательство. Если матричные функции W_k, $k=\overline{0,N}$, обладают свойством «линейной независимости», то выполняется тождество (12), в котором не все постоянные векторы C_k, $k=\overline{0,N}$, равны нулю. Используя формулы (6), запишем (12) в виде

$$V\left(\omega+\vartheta,0\right)C_0+\int_0^{\omega+\vartheta}V\left(\omega+\vartheta,\alpha\right)\sum_{k=1}^{N}\eta_k^1\left(\alpha\right)C_k d\alpha\equiv 0,\vartheta\in\left[-\omega,0\right].$$

При $\vartheta=-\omega$ находим $\mathrm{C}_0=0$, и тождество принимает вид

$$\int_0^{\omega+\vartheta}V\left(\omega+\vartheta,\alpha\right)\sum_{k=1}^{N}\eta_k^1\left(\alpha\right)C_k d\alpha\equiv 0,\vartheta\in\left[-\omega,0\right].$$

Последнее тождество выполняется тогда и только тогда, когда

$$\sum_{k=1}^{N}\eta_k^1\left(\alpha\right)C_k\equiv 0 \tag{14}$$

почти всюду на $\left(0,\omega\right)$.

При выполнении условия (13) из (14) следует, что $C_1=\ldots=C_N=0$. Получили противоречие.

Теорема 2. *Пусть продолжение матричной функции η допускает представление* (5)*, описанное в теореме* 1*. Тогда ненулевые собственные числа оператора монодромии являются корнями характеристического уравнения*

$$\det\left\|f_k\left(W_m\right)-\rho\delta_{km}I_n\right\|_0^N=0, \tag{15}$$

где δ_{km} — символ Кронекера.

Доказательство. Собственная функция оператора (8), отвечающая ненулевому собственному числу ρ, определяется формулой

$$\varphi\left(\vartheta\right)=\sum_{k=0}^{N}W_k\left(\vartheta\right)C_k,$$

где набор постоянных собственных векторов C_k, $k=\overline{0,N}$, является нетривиальным решением линейной алгебраической системы

$$\sum_{m=0}^{N}f_k\left(W_m\right)C_m=\rho C_k, k=\overline{0,N},$$

а собственное число ρ является корнем уравнения (15).

Характеристическое уравнение не имеет нулевых корней, когда

$$\det \left\| f_k \left(W_m \right) \right\|_0^N \neq 0. \tag{16}$$

Если векторнозначная функция $\sum_{k=1}^N \eta_k^2(\beta) C_k$ постоянна почти всюду на полуинтервале $[-\omega, 0)$ и не все постоянные векторы нулевые, то при $C_0 = 0$ имеет место равенство

$$\sum_{k=0}^N \left(f_k \left(W_m \right) \right)^T C_k = W_m^T \left(0 \right) C_0 + \int_{-\omega}^{-0} W_m^T \left(\beta \right) d \sum_{k=1}^N \eta_k^{2T} \left(\beta \right) C_k = 0,$$

где T — знак транспонирования. Следовательно, $\det \left\| f_k \left(W_m \right) \right\|_0^N = 0$ и условие (16) не выполняется. Поэтому целесообразно рассматривать функции η_k^2, $k = \overline{1, N}$, для которых выполняется условие

$$\det \left\| \left(\eta_m^2 \left(\beta \right) - \eta_m^2 \left(-\omega \right) \right) \left(\eta_k^2 \left(\beta \right) - \eta_k^2 \left(-\omega \right) \right) \right\|_1^N \neq 0 \tag{17}$$

на множестве положительной меры из полуинтервала $[-\omega, 0)$. В общей ситуации условие (16) может не выполняться и характеристическое уравнение будет иметь нулевые корни.

Формулы (6) неудобны для нахождения матричных функций W_k, $k = \overline{0, N}$, так как они содержат матричную функцию V, которая определена неявно, как матричное решение дифференциального уравнения (3). Поэтому предложим другую процедуру нахождения этих функций. Учитывая определение W_0, находим, что эта матричная функция является решением матричного дифференциального уравнения

$$\frac{dW_0 \left(\vartheta \right)}{d\vartheta} = \int_{-\omega}^0 d_\tau \eta \left(\omega + \vartheta, \tau \right) W_0 \left(\vartheta + \tau \right), \vartheta \in \left[-\omega, 0 \right],$$

с начальными условиями $W_0 \left(\vartheta \right) = 0$ при $-2\omega \leq \vartheta < \omega$, $W_0 \left(-\omega \right) = I_n$. Последнее уравнение эквивалентно уравнению

$$\frac{dW_0 \left(\vartheta \right)}{d\vartheta} = \int_{-\omega}^\vartheta d_s \eta \left(\omega + \vartheta, s - \vartheta \right) W_0 \left(s \right), \vartheta \in \left[-\omega, 0 \right], \tag{18}$$

с начальным условием $W_0 \left(-\omega \right) = I_n$. Матричные функции W_k, $k = \overline{1, N}$, являются решениями матричных дифференциальных уравнений

$$\frac{dW_k \left(\vartheta \right)}{d\vartheta} = \eta_k^1 \left(\omega + \vartheta \right) + \int_{-\omega}^0 d_\tau \eta \left(\omega + \vartheta, \tau \right) W_k \left(\vartheta + \tau \right), \vartheta \in \left[-\omega, 0 \right],$$

с начальными условиями $W_k(\vartheta) = 0$ при $-2\omega \le \vartheta \le \omega$, $k = \overline{1,N}$. Последние уравнения эквивалентны уравнениям

$$\frac{dW_k(\vartheta)}{d\vartheta} = \eta_k^1(\omega+\vartheta) + \int_{-\omega}^{\vartheta} d_s\eta(\omega+\vartheta, s-\vartheta)\, W_k(s), \tag{19}$$
$$\vartheta \in [-\omega, 0],$$

с начальными условиями $W_k(-\omega) = 0$, $k = \overline{1,N}$.

В уравнениях (18),(19) для значений матричных функций $\eta(\omega+\vartheta, s-\vartheta)$, $-\omega \le s \le \vartheta \le 0$, может не иметь место представление (5), так как аргументы этой функции не принадлежат области, указанной в представлении (5).

В представлении (5) функции η_k^1, $k = \overline{1,N}$, и η_k^2, $k = \overline{1,N}$, нельзя выбрать произвольным образом, так как в области $0 < \alpha < \omega$, $-\omega \le \beta < 0$ этого представления содержится подобласть $-\omega \le \beta \le \alpha-\omega$, $0 < \alpha < \omega$, в которой $\eta(\alpha, \beta-\alpha) = \eta(\alpha, -\omega)$. Следовательно, набор функций η_k^1, $k = \overline{1,N}$, и η_k^2, $k = \overline{1,N}$, должен удовлетворять условию

$$\sum_{k=1}^{N} \eta_k^1(\alpha)\, \eta_k^2(\beta) = \sum_{k=1}^{N} \eta_k^1(\alpha)\, \eta_k^2(\alpha-\omega) \tag{20}$$

при $-\omega \le \beta \le \alpha-\omega$, $0 < \alpha < \omega$. Используя произвол в определении матричной функции η, будем полагать, что $\eta(\alpha, -\omega) = 0$ при $0 < \alpha < \omega$. Тогда условие (20) заменится условием

$$\sum_{k=1}^{N} \eta_k^1(\alpha)\, \eta_k^2(\beta) = 0 \tag{21}$$

при $-\omega \le \beta \le \alpha-\omega$, $0 < \alpha < \omega$.

Условию (21) можно удовлетворить с помощью специальной процедуры построения функций η_k^1, $k = \overline{1,N}$, и η_k^2, $k = \overline{1,N}$. Рассмотрим произвольное разбиение полуинтервала $[-\omega, 0) = \bigcup\limits_{m=0}^{M} [\beta_m, \beta_{m+1})$, где $-\omega = \beta_0 < \beta_1 < \ldots < \beta_M < \beta_{M+1} = 0$. На каждом полуинтервале $[\beta_m, \beta_{m+1})$, $m = \overline{1,M}$, введем матричную функцию η_m размерности $n \times n$, которая при каждом фиксированном значении первого аргумента $\alpha \in (0, \omega)$ имеет ограниченное изменение по второму аргументу β на полуинтервале $[\beta_m, \beta_{m+1})$, $m = \overline{1,M}$, при этом матричная функция $Var_{\beta\in[\beta_m,\beta_{m+1})}\eta_m(\alpha, \beta)$ измерима и ограничена в существенном на интервале $0, \omega$. На каждом полуинтервале $[\beta_m, \beta_{m+1})$, $m = \overline{1,M}$, выберем систему $n \times n$-матричных функций с ограниченным изменением $\{\psi_{km}\}_1^{K_m}$. Возьмем в качестве η_m, $m = \overline{1,M}$, функции

$$\eta_m(\alpha, \beta) = \sum_{k=1}^{K_m} \varphi_{mk}(\alpha)\, \psi_{km}(\beta), \tag{22}$$

$$\beta \in [\beta_m, \beta_{m+1}), m = \overline{1, M}, \alpha \in (0, \omega),$$

где φ_{mk} ($k = \overline{1, K_m}$, $m = \overline{1, M}$) — измеримые матричные функции, ограниченные в существенном на интервале $(0,\omega)$. Продолжим функции ψ_{km}, $k = \overline{1, K_m}$, $m = \overline{1, M}$, на полуинтервал $[-\omega, 0)$, полагая $\psi_{km}(\vartheta) = 0$ при $\vartheta \notin [\beta_m, \beta_{m+1})$, $k = \overline{1, K_m}$, $m = \overline{1, M}$. С помощью формул (22) определим функции η_m, $m = \overline{1, M}$, на всем полуинтервале $[-\omega, 0)$. Введем функцию

$$\eta_N(\alpha, \beta - \alpha) = \sum_{m=1}^{M} \eta_m(\alpha, \beta)\, \chi_{(0,\omega+\beta_m)}(\alpha) =$$

$$= \sum_{m=1}^{M} \chi_{(0,\omega+\beta_m)}(\alpha) \sum_{k=1}^{K_m} \varphi_{mk}(\alpha)\, \psi_{km}(\beta), \tag{23}$$

$$-\omega \le \beta < 0, 0 < \alpha < \omega,$$

где $N = K_1 + \ldots + K_M$, $\chi_{a,b}$ — индикатор интервала (a, b), т.е. $\chi_{a,b}(\alpha) = 1$ при $\alpha \in (a, b)$ и $\chi_{a,b}(\alpha) = 0$ при $\alpha \notin (a, b)$. Сравнивая представление (23) функции η_N с представлением (5) функции η, полагаем

$$\eta_s^1(\alpha) = \chi_{(0,\omega+\beta_m)}(\alpha)\, \varphi_{mk}(\alpha), \tag{24}$$

$$\eta_s^2(\beta) = \psi_{km}(\beta), \tag{25}$$

$$s = K_1 + \ldots + K_{m-1} + k, K_0 = 0, k = \overline{1, K_m},$$

$$m = \overline{1, M}, \alpha \in (0, \omega), \beta \in [-\omega, 0).$$

В полученном представлении

$$\eta_N(\alpha, \beta - \alpha) = \sum_{s=1}^{N} \eta_s^1(\alpha)\, \eta_s^2(\beta)$$

элементы матричных функций η_s^1, $s = \overline{1, N}$, измеримы и ограничены в существенном на интервале $(0, \omega)$, а элементы матричных функций η_s^2, $s = \overline{1, N}$, имеют ограниченные вариации на $[-\omega, 0)$.

Теорема 3. *Матричная функция η_N удовлетворяет условию* (21).

Доказательство. Пусть $0 < \alpha < \omega$ и β принадлежит полуинтервалу $[\beta_p, \beta_{p+1})$, $p = \overline{1, M}$. Тогда

$$\eta_N(\alpha, \beta - \alpha) = \chi_{(0,\omega+\beta_p)}(\alpha) \sum_{k=1}^{K_p} \varphi_{pk}(\alpha)\, \psi_{kp}(\beta).$$

Область $\{(\alpha, \beta) : \alpha \in (0, \omega), \beta \in [\beta_p, \beta_{p+1})\}$ имеет непустое пересечение с областью $\{(\alpha, \beta)\ -\omega \le \beta \le \alpha - \omega, 0 < \alpha < \omega\}$ для значений α, удовлетворяющих неравенству $\alpha \ge \omega + \beta_p$. Для этих значений α имеем $\chi_{(0,\omega+\beta_p)}(\alpha) = 0$.

Описанная выше процедура определяет значения функции $\eta(t,s) = \eta_N(t,s)$ при значениях аргументов $-\omega - t < s < -t$, $0 < t < \omega$. Можно продолжить функцию $\eta = \eta_N$ на область $\mathbb{R} \times \mathbb{R}$, гарантируя выполнение свойств этой функции, используемых при определении оператора монодромии в начале работы.

Лемма 2. *Для матричных функций* (24) *условие* (13) *выполняется, если при любом* p $(1 \le p \le M)$ *система матричных функций* $\{\varphi_{pk}\}_1^{K_p}$ *обладает свойством «линейной независимости» на полуинтервале* $[\omega + \beta_{p-1}, \omega + \beta_p)$.

Доказательство. Если условие (13) не выполняется, то существует ненулевой набор векторов C_{mk}, $k = \overline{1, K_m}$, $m = \overline{1, M}$, для которого

$$\sum_{m=1}^{M} \sum_{k=1}^{K_m} \chi_{(0,\omega+\beta_m)}(\alpha)\, \varphi_{mk}(\alpha)\, C_{mk} \equiv 0 \tag{26}$$

почти всюду на интервале $(0, \omega)$. При $\alpha \in [\omega + \beta_M, \omega)$ равенство (26) выполняется. При $\alpha \in [\omega + \beta_{M-1}, \omega + \beta_M)$ равенство (26) принимает вид

$$\sum_{k=1}^{K_m} \varphi_{mk}(\alpha)\, C_{mk} = 0.$$

Система функций $\{\varphi_{mk}\}_1^{K_m}$ обладает свойством «линейной независимости» на полуинтервале $[\omega + \beta_{M-1}, \omega + \beta_M)$, откуда $C_{Mk} = 0$, $k = \overline{1, K_M}$. Используя метод математической индукции, предположим, что $C_{mk} = 0$ при $k = \overline{1, K_m}$, $m = \overline{p+1, M}$, где $1 \le p < M$. На полуинтервале $[\omega + \beta_{p-1}, \omega + \beta_p)$ равенство (26) принимает вид

$$\sum_{k=1}^{K_p} \varphi_{pk}(\alpha)\, C_{pk} = 0.$$

Система функций $\{\varphi_{pk}\}_1^{K_p}$ обладает свойством «линейной независимости» на полуинтервале $[\omega + \beta_{p-1}, \omega + \beta_p)$, откуда $C_{pk} = 0$, $k = \overline{1, K_p}$. Получили противоречие.

Лемма 3. *Для матричных функций* (25) *условие* (17) *выполняется, если при любом натуральном числе* $p\,(1 \le p \le M)$ *система матричных функций* $\left\{\psi_{kp}^T\right\}_1^{K_p}$ *обладает свойством «линейной независимости» на* $[\beta_p, \beta_{p+1})$.

Доказательство. Если условие (17) не выполняется, то существует ненулевой набор векторов C_{mk}, $k=\overline{1,K_m}$, $m=\overline{1,M}$, для которого

$$\sum_{m=1}^{M}\sum_{k=1}^{K_m}\psi_{km}^{T}(\beta)\,C_{mk}\equiv 0 \tag{27}$$

почти всюду на $[-\omega,0)$. При $\beta\notin[\beta_1,\beta_M)$ равенство (27) выполняется. На полуинтервале $[\beta_p,\beta_{p+1})$ $(1\le p\le M)$ равенство (27) принимает вид

$$\sum_{k=1}^{K_p}\psi_{kp}^{T}(\beta)\,C_{pk}=0.$$

Система функций $\left\{\psi_{kp}^{T}\right\}_1^{K_p}$ обладает свойством «линейной независимости» на полуинтервале $[\beta_p,\beta_{p+1})$, в силу чего $C_{pk}=0$ при $k=\overline{1,K_p}$. Получили противоречие.

Матричные функции (6) и векторные функционалы (7) в данном случае определяются формулами

$$\begin{gathered}
W_0(\vartheta)=V(\omega+\vartheta,0)\,,\\
W_{mk}(\vartheta)=\int_0^{\omega+\vartheta}V(\omega+\vartheta,\alpha)\,\chi_{(0,\omega+\beta_m)}(\alpha)\,\varphi_{mk}(\alpha)\,d\alpha,\\
\vartheta\in[-\omega,0]\,,k=\overline{1,K_m},m=\overline{1,M},
\end{gathered} \tag{28}$$

$$\begin{gathered}
f_0(\varphi)=\varphi(0)\,,\\
f_{pq}(\varphi)=\int_{-\omega}^{-0}d_\beta\psi_{pq}(\beta)\,\varphi(\beta)=\int_{\beta_m}^{\beta_{m+1}}d_\beta\psi_{pq}(\beta)\,\varphi(\beta)+\psi_{pq}(\beta_m)\,\varphi(\beta_m)\,,\\
p=\overline{1,K_m},q=\overline{1,M}.
\end{gathered} \tag{29}$$

Справедливо следующее утверждение:

Теорема 4. *Для системы дифференциальных уравнений (1), порожденной функцией $\eta=\eta_N$, ненулевые собственные числа оператора монодромии обращают в нуль определитель линейной алгебраической системы*

$$\begin{gathered}
(f_0(W_0)-\rho I_n)\,C_0+\sum_{m=1}^{M}\sum_{k=1}^{K_m}f_0(W_{mk})\,C_{mk}=0,\\
f_{pq}(W_0)\,C_0+\sum_{m=1}^{M}\sum_{k=1}^{K_m}f_{pq}(W_{mk})\,C_{mk}-\rho C_{pq}=0,\\
p=\overline{1,K_m},q=\overline{1,M}.
\end{gathered} \tag{30}$$

Для нахождения матричных функций W_0, W_{mk}, $k=\overline{1,K_m}$, $m=\overline{1,M}$, можно воспользоваться уравнениями (18), (19), которые в данном случае имеют вид

$$\frac{dW_0(\vartheta)}{d\vartheta}=\int_{-\omega}^{\vartheta}d_s\eta_N(\omega+\vartheta,s-\vartheta)\,W_0(s)\,, \tag{31}$$

$$W_0(-\omega)=I_n,\vartheta\in[-\omega,0]\,,$$

$$\frac{dW_{mk}(\vartheta)}{d\vartheta}=\chi_{(0,\omega+\beta_m)}(\omega+\vartheta)\,\varphi_{mk}(\omega+\vartheta)+$$

$$+\int_{-\omega}^{\vartheta}d_s\eta_N(\omega+\vartheta,s-\vartheta)\,W_{mk}(s)\,, \tag{32}$$

$$W_k(-\omega)=0,k=\overline{1,K_m},m=\overline{1,M},\vartheta\in[-\omega,0]\,.$$

В рассматриваемой ситуации трудно получить аналитическое решение уравнений (31), (32), так как на матричную функцию η_N в указанных областях изменения аргументов ϑ и s не накладывается никаких ограничений.

Аналитическое решение уравнений (31), (32) можно построить, если операторы, стоящие в правых частях этих уравнений, конечномерны. Опишем специальный класс функций $\eta_N(t,s-t)$ в области $0\le t,s<\omega$, для которого рассматриваемые операторы конечномерны. Зададим разбиение полуинтервала $[0,\omega)=\bigcup\limits_{q=1}^{Q}[s_{q-1},s_q)$, где $0=s_0<s_1<\ldots<s_Q=\omega$. На каждом полуинтервале $[s_{q-1},s_q)$, $q=\overline{1,Q}$, выберем систему матричных функций размерности $n\times n$ с ограниченным изменением $\{\Psi_{pq}\}_1^{P_q}$. Возьмем функции

$$\eta_{Nq}(t,s-t)=\sum_{p=1}^{P_q}\Phi_{qp}(t)\,\Psi_{pq}(s)\,, \tag{33}$$

$$s\in[s_{q-1},s_q)\,,q=\overline{1,Q},t\in[0,\omega]\,,$$

где $\Phi_{qp},p=\overline{1,P_q},q=\overline{1,Q},$ — измеримые матричные функции, ограниченные в существенном на отрезке $[0,\omega]$. Продолжим функции Ψ_{pq}, $p=\overline{1,P_q}$, $q=\overline{1,Q}$, на отрезок $[0,\omega]$, полагая $\Psi_{pq}(\vartheta)=0$ при $\vartheta\notin[s_{q-1},s_q)$, $p=\overline{1,P_q}$, $q=\overline{1,Q}$. С помощью формулы (33) определим функции η_{Nq} при всех значениях $s\in[0,\omega]$. Рассмотрим функцию

$$\eta_N(t,s-t)=\sum_{q=1}^{Q}\chi_{(s_q,\omega]}(t)\,\eta_{Nq}(t,s-t)=$$

$$= \sum_{q=1}^{Q} \sum_{p=1}^{P_q} \chi_{(s_q,\omega]}(t)\, \Phi_{qp}(t)\, \Psi_{pq}(s)\, , t, s \in [0,\omega]\, . \qquad (34)$$

Лемма 4. *Матричная функция* η_N *удовлетворяет условию* $\eta_N(t, s-t) = 0$ *при* $0 \le t \le s \le \omega$.

Доказательство. При $s = \omega$ справедливость утверждения очевидна. При $s \in [s_{q-1}, s_q)$, $q = \overline{1,Q}$ имеем $0 \le t \le s < s_q$ и $\chi_{(s_q,\omega]}(t) = 0$.

Будем полагать дальше, что в уравнениях (31), (32) функция η_N в области $0 \le t, s < \omega$ определяется формулой (34).

Используя лемму 4, преобразуем уравнение (31)к виду

$$\frac{dW_0(\vartheta)}{d\vartheta} = \int_0^{\omega} d_s \eta_N(\omega+\vartheta, s-\omega-\vartheta)\, W_0(s-\omega) =$$

$$= \sum_{q=1}^{Q} \sum_{p=1}^{P_q} \chi_{(s_q,\omega]}(\omega+\vartheta)\, \Phi_{qp}(\omega+\vartheta) \int_0^{\omega} d_s \Psi_{pq}(s)\, W_0(s-\omega)\, ,$$

$$W_0(-\omega) = I_n, \vartheta \in [-\omega, 0]\, .$$

Полученное дифференциальное уравнение заменяем интегральным уравнением

$$W_0(\vartheta) = I_n +$$

$$+ \sum_{q=1}^{Q} \sum_{p=1}^{P_q} \int_0^{\omega+\vartheta} \chi_{(s_q,\omega]}(t)\, \Phi_{qp}(t)\, dt \int_0^{\omega} d_s \Psi_{pq}(s)\, W_0(s-\omega)\, , \qquad (35)$$

$$\vartheta \in [-\omega, 0]\, .$$

Решение интегрального уравнения (35) имеет вид

$$W_0(\vartheta) = I_n + \sum_{q=1}^{Q} \sum_{p=1}^{P_q} B_{qp}(\vartheta)\, g_{pq}, \vartheta \in [-\omega, 0]\, , \qquad (36)$$

где

$$B_{qp}(\vartheta) = \int_0^{\omega+\vartheta} \chi_{(s_q,\omega]}(t)\, \Phi_{qp}(t)\, dt, \qquad (37)$$

$$p = \overline{1,P_q}, q = \overline{1,Q}.$$

Набор $n \times n$ матриц $\{g_{km}\}_{k=\overline{1,P_m}}^{m=\overline{1,Q}}$ является решением системы линейных алгебраических уравнений

$$g_{km} = \beta_{km} + \sum_{q=1}^{Q} \sum_{p=1}^{P_q} \beta_{kmqp} g_{pq}, \qquad (38)$$

$$k = \overline{1, P_m}, m = \overline{1, Q},$$

где

$$\beta_{km} = \Psi_{km}(\omega) - \Psi_{km}(0), \tag{39}$$

$$\beta_{kmqp} = -\int_{s_{m-1}}^{s_m} \Psi_{km}(t)\, \chi_{(s_q,\omega]}(t)\, \Phi_{qp}(t)\, dt, \tag{40}$$

$$k = \overline{1, P_m}, p = \overline{1, P_q}, m, q = \overline{1, Q}.$$

Лемма 5. *Справедливы равенства* $\beta_{kmqp} = 0$ *при* $m \le q$, $k = \overline{1, P_m}$, $p = \overline{1, P_q}$, $m, q = \overline{1, Q}$.

Доказательство. При $m \le q$ имеем $s_m \le s_q$ и $\chi_{(s_q,\omega]}(t) = 0$ при $t \in [s_{m-1}, s_m)$. Из (40) следует справедливость утверждения леммы.

В результате система (38) принимает вид

$$g_{km} = \beta_{km} + \sum_{q=1}^{Q} \sum_{p=1}^{P_q} \beta_{kmqp} g_{pq}, \tag{41}$$

$$k = \overline{1, P_m}, m = \overline{1, Q-1},$$

$$g_{kQ} = \beta_{kQ}, k = \overline{1, P_m}.$$

Система (41) допускает рекуррентную процедуру решения по индексу m, начиная со значения $m = Q$.

Аналогично находятся решения дифференциальных уравнений (32)

$$W_{mk}(\vartheta) = C_{mk}(\vartheta) + \sum_{q=1}^{Q} \sum_{p=1}^{P_q} B_{qp}(\vartheta) g_{pqmk}, \tag{42}$$

$$k = \overline{1, K_m}, m = \overline{1, M}, \vartheta \in [-\omega, 0],$$

где

$$C_{mk}(\vartheta) = \int_0^{\omega+\vartheta} \chi_{(0,\omega+\beta_m)}(t)\, \varphi_{mk}(t)\, dt,$$

$$k = \overline{1, K_m}, m = \overline{1, M}, \vartheta \in [-\omega, 0].$$

Набор $n \times n$ матриц g_{rsmk}, $s = \overline{1, Q}$, $r = \overline{1, P_s}$, $k = \overline{1, K_m}$, $m = \overline{1, M}$, является решением системы линейных алгебраических уравнений

$$g_{rsmk} = \gamma_{rsmk} + \sum_{q=1}^{Q} \sum_{p=1}^{P_q} \beta_{rsqp} g_{pqmk}, \tag{43}$$

$$r=\overline{1,P_s},\ s=\overline{1,Q-1},\ g_{rQmk}=\gamma_{rQmk},\ r=\overline{1,P_s},$$

где

$$\gamma_{rsmk}=\int_0^\omega d_\tau\Psi_{rs}(\tau)\int_0^\tau \chi_{(0,\omega+\beta_m)}(t)\phi_{mk}(t)dt.$$

Теорема 5. *Решение уравнения* (31) *определяется формулой* (38), *в которой набор матриц* $\{g_{km}\}_{k=\overline{1,P_m}}^{m=\overline{1,Q}}$ *является решением системы линейных алгебраических уравнений* (41). *Решения уравнений* (32) *определяются формулами* (42), *в которых наборы матриц* g_{rsmk}, $s=\overline{1,Q}$, $r=\overline{1,P_s}$, $k=\overline{1,K_m}$, $m=\overline{1,M}$ *являются решениями систем алгебраических уравнений* (43).

Пример 1. *Рассматривается система дифференциальных уравнений*

$$\frac{dx\,(t)}{dt}=A\,(t)\,x\,(t)+B\,(t)\,x\,([t])\,, \tag{44}$$

где $x\in\mathbb{R}^n$*;* A,B *— 1-периодические, ограниченные в существенном функции на отрезке* $[0,1]$*;* $[t]$ *— целая часть числа* t.

Переходя к описанию в форме (1), находим матричную функцию

$$\eta\,(t,s)=\begin{cases}\quad 0, & S=0,\\ -A\,(t)\,, & -\{t\}\le S<0,\\ -A\,(t)-B\,(t)\,, & -1\le S<-\{t\}\,,\end{cases}$$

где $\{t\}$ — дробная часть числа t. Проверяем выполнение условий теоремы 1:
$\eta\,(\alpha,\beta-\alpha)=-A\,(\alpha)-B\,(\alpha)\,,\ 0<\alpha<1,\ -1\le\beta<0$. Имеем $N=1$, $\eta_1^1\,(\alpha)=-A\,(\alpha)-B\,(\alpha)$, $\eta_1^2\,(\beta)=I_n$. Тогда $f_0\,(\varphi)=\varphi\,(0)$, $f_1\,(\varphi)=0$. Характеристическое уравнение оператора монодромии имеет вид

$$(-1)^n\,\rho^n\det\left(W_0\,(0)-\rho I_n\right)=0. \tag{45}$$

Уравнение (45) имеет нулевой корень, так как условие (17) не выполняется. Уравнение (31) в данном случае принимает вид

$$\frac{dW_0\,(\vartheta)}{d\vartheta}=A\,(\vartheta)\,W_0\,(\vartheta)+B\,(\vartheta)\,W_0\,(-1)\,, \tag{46}$$

$$W_0\,(-1)=I_n,\vartheta\in[-1,0]\,.$$

Здесь не выполняются условия конечномерности оператора правой части уравнения (46). Пусть $X(\vartheta)$ $(X(-1)=I_n)$ — нормированная фундаментальная матрица системы (47). Тогда решение уравнения (46) определяется формулой

$$W_0\left(\vartheta\right)=X(\vartheta)+\int_{-1}^{\vartheta}X\left(\vartheta\right)X^{-1}\left(s\right)B\left(s\right)ds,\vartheta\in\left[-1,0\right].$$

Характеристическое уравнение (45) имеет вид

$$\det\left(X\left(0\right)\left(I_n+\int_{-1}^{0}X^{-1}\left(s\right)B\left(s\right)ds\right)-\rho I_n\right)=0.$$

Пример 2. *Рассмотрим скалярное уравнение*

$$\frac{dx\left(t\right)}{dt}=\chi_{\left[0,\frac{1}{2}\right)}\left(\{t\}\right)\int_{[t]-\frac{1}{2}}^{[t]}b\left(s\right)x\left(s\right)ds, \tag{47}$$

где $[t]$ *— целая часть числа* t*;* $\{t\}$ *— дробная часть числа* t*;* b *— периодическая функция с периодом* 1*, интегрируемая по Лебегу на отрезке* $[0,1]$*;* $b_0=\int_{-\frac{1}{2}}^{0}b\left(s\right)ds\neq0$.

Введем функцию

$$B\left(s\right)=\begin{cases}0, & s\geq0,\\ \int_0^s b\left(z\right)dz, & -\frac{1}{2}\leq s<0,\\ -\int_{-1/2}^{0}b\left(z\right)dz, & s<-\frac{1}{2}.\end{cases}$$

Переходя к описанию в форме (1), находим функцию

$$\eta\left(t,s\right)=\chi_{\left[0,\frac{1}{2}\right)}\left(t\right)B\left(t+s\right),s\in\left[-1,0\right],t\in\left[0,1\right].$$

Проверяем выполнение условий теоремы 1:
$\eta\left(\alpha,\beta-\alpha\right)=\chi_{\left[0,\frac{1}{2}\right)}\left(\alpha\right)B\left(\beta\right)$, $0<\alpha<1$, $-1\leq\beta<0$. Имеем $N=1$, $\eta_1^1\left(\alpha\right)=\chi_{\left[0,\frac{1}{2}\right)}\left(\alpha\right)$, $0<\alpha<1$, $\eta_1^2\left(\beta\right)=B\left(\beta\right)$, $-1\leq\beta<0$. Тогда $f_0\left(\varphi\right)=\varphi\left(0\right)$, $f_1\left(\varphi\right)=\int_{-1}^{0}dB\left(\beta\right)\varphi\left(\beta\right)=\int_{-1/2}^{0}b\left(\beta\right)\varphi\left(\beta\right)d\beta$.

Для уравнения (47) $\eta\left(t,s-t\right)=0$ при $\vartheta\leq t,s\leq1$. Используя результаты теоремы 5, из (38) находим $W_0\left(\vartheta\right)=1$, $\vartheta\in[-1,0]$, а из (42)

$$W_0\left(\vartheta\right)=C_1\left(\vartheta\right)=\int_0^{1+\vartheta}\chi_{\left[0,\frac{1}{2}\right)}\left(t\right)dt=\begin{cases}1+\vartheta, & -1\leq\vartheta<-\frac{1}{2},\\ \frac{1}{2}, & -\frac{1}{2}\leq\vartheta\leq0.\end{cases}$$

Вычисляем $f_0(W_0) = 1$, $f_0(W_1) = \frac{1}{2}$, $f_1(W_0) = \int_{-\frac{1}{2}}^{0} b(\beta)\, d\beta = b_0$, $f_1(W_1) = \frac{1}{2}\int_{-\frac{1}{2}}^{0} b(\beta)\, d\beta = \frac{1}{2}b_0$. Характеристическое уравнение имеет вид

$$\rho^2 - \left(1 + \frac{1}{2}b_0\right)\rho = 0.$$

В данном примере условие (17) выполняется, но характеристическое уравнение имеет нулевой корень, так как условие (16) не выполняется.

Литература

1. Хейл Дж. Теория функционально-дифференциальных уравнений. М.: Мир, 1984.
2. Cooke K. L., Wiener J. Retarded differential equations with piecewise constant delays // J. Math. Anal. Appl. 1984. Vol.93. P.265–297.
3. Cooke K. L., Turi J., Turner G. Stabilization of hybrid systems in the presence of feedback delays // USA Institute for Mathematics and Its Applications: Preprint Series #906. 1991.
4. Цыпкин Я. З. Теория импульсных систем. М.: Физматгиз, 1958.
5. Халанай А., Векслер Д. Качественная теория импульсных систем. М.: Мир, 1971.
6. Долгий Ю. Ф. Характеристическое уравнение в задаче устойчивости периодических систем с последействием // Изв. Урал. гос. ун-та. 1998. №10. (Математика и механика. Вып.1.) С.34–43.
7. Долгий Ю. Ф. О построении характеристического уравнения для системы дифференциальных уравнений с запаздыванием // Изв. вузов. Математика. 1977. №3. С.9–19.
8. Долгий Ю. Ф. О построении характеристического уравнения для дифференциальных уравнений с кусочно-постоянным запаздыванием // Устойчивость и нелинейные колебания. Свердловск: УрГУ, 1979. С.34–41.
9. Долгий Ю. Ф. Представление оператора монодромии в виде суммы конечномерного и вольтеррова операторов // Докл. РАН. 1994. Т.334, №8. С.138–141.
10. Долгий Ю. Ф. Устойчивость периодических дифференциально-разностных уравнений. Свердловск: УрГУ, 1996.
11. Забрейко П. П. и др. Интегральные уравнения. М.: Наука, 1968.

Статья поступила 04.10.2000 г.;
окончательный вариант 30.12.2000 г.