УДК 512.53

М. Ф. Бакиров, Е. В. Суханов

СЛОВА ТУЭ–МОРСА И $\mathscr{D}$-СТРОЕНИЕ СВОБОДНОЙ БЕРНСАЙДОВОЙ ПОЛУГРУППЫ*

1. Введение и формулировка результатов

Напомним, что бернсайдовым называется полугрупповое многообразие вида $\mathbf{var}\{x^m = x^n\}$. В данной работе исследуется $\mathscr{D}$-строение полугруппы с двумя образующими, свободной в многообразии $\mathbf{var}\{x^2 = x^3\}$. Представляется весьма вероятным, что здесь важную роль должны играть так называемые сильно бескубные слова в алфавите из двух букв. Наиболее известны среди них слова Туэ–Морса u_n. Более того, согласно [1] произвольные сильно бескубные слова определенным способом получаются из слов u_n. Поэтому наша цель, более точно, состоит в нахождении $\mathscr{D}$-классов в указанной полугруппе для элементов $\bar{u}_n$, соответствующих словам Туэ–Морса u_n.

Основные результаты работы следующие. Элементы $\bar{u}_n$ попарно различны и нерегулярны. $\mathscr{D}$-классы этих элементов тривиальны и образуют цепь типа ω^* в остове (т.е. частично упорядоченном множестве) $\mathscr{D}$-классов. Это и есть содержание теоремы, которая помещена в раздел 3 вместе с некоторыми другими утверждениями, представляющими, по нашему мнению, самостоятельный интерес.

Нужные нам свойства слов Туэ–Морса мы получаем, следуя в основном тем идеям, которые изложены в [2] и применялись там к другой последовательности. Упомянутые идеи пришлось заметно переработать. Этой переработке полностью посвящен раздел 2 данной работы.

Отметим, что наши результаты не только выявляют элементы $\mathscr{D}$-строения изучаемой полугруппы, но и дают дополнительную информацию о комбинаторных свойствах последовательности Туэ–Морса. Получение такой информации — вторая (можно сказать, неявная) цель данной работы.

Напомним определения основных комбинаторных понятий и условимся об обозначениях. Зафиксируем алфавит $\Sigma = \{a, b\}$. *Буквами* (*символами*) назовем элементы из Σ. *Слово* над Σ — это конечная цепочка, состоящая из одной или нескольких букв алфавита Σ. Количество элементов в цепочке x

*Работа выполнена при поддержке гранта №46 Грантового центра по исследованиям в области математики при Новосибирском государственном университете.

называется ее длиной и обозначается через $|x|$. Мы будем рассматривать также *пустую цепочку* λ и положим $|\lambda| = 0$. Множество всех слов над алфавитом Σ будем обозначать через Σ^*, а множество всех непустых слов — через Σ^+. Далее, кроме нескольких специальных случаев, слова обозначаются латинскими буквами из конца алфавита. Если x и y — слова над Σ, то их *конкатенация* xy — результат приписывания — тоже слово над Σ. По определению $x\lambda = \lambda x = x$. Конкатенация является ассоциативной операцией. Таким образом, Σ^* оказывается моноидом с единицей λ и называется *свободным моноидом над алфавитом* Σ, а Σ^+ является полугруппой и соответственно называется *свободной полугруппой*. Слово x называется *подсловом в* y, если существуют такие $x_1, x_2 \in \Sigma^*$, что $y = x_1 x x_2$.

Напомним определение слов Туэ–Морса. Существует много разных эквивалентных определений, для наших целей удобнее всего приводимое ниже. Любое отображение алфавита Σ в свободный моноид Σ^* единственным образом продолжается до эндоморфизма последнего. Рассмотрим отображение $f : \Sigma \to \Sigma^*$, определенное правилом $f(a) = ab$, $f(b) = ba$, и продолжим его до эндоморфизма моноида Σ^*. Этот эндоморфизм также будем обозначать через f. Тогда слова Туэ–Морса u_n определяются по правилу

$$u_k = f^k(a) \text{ при } k \geq 0.$$

Начало последовательности $\{u_k\}$ имеет вид

$$u_0 = a,\ u_1 = ab,\ u_2 = abba,\ u_3 = abba\,baab,\ u_4 = abba\,baab\,baab\,abba,\ \ldots\ .$$

Заметим, что слова из $f(\Sigma^+)$ и, в частности, слова u_k при $k \geq 1$ состоят из *блоков*, т.е. образов букв исходного слова.

Свободная в многообразии $\mathbf{var}\{x^2 = x^3\}$ полугруппа с двумя образующими является факторполугруппой Σ^+ по соответствующей вербальной конгруэнции, которую мы обозначим через $\sim$. Напомним ее определение. Два слова $u, v \in \Sigma^+$ назовем *соседними*, если верно одно из следующих соотношений:

$$\begin{array}{lll} 1) & u = v, & \\ 2) & u = p_1 z^3 p_2, & v = p_1 z^2 p_2, \\ 3) & u = p_1 z^2 p_2, & v = p_1 z^3 p_2 \end{array}$$

для некоторых $z \in \Sigma^+$ и $p_1, p_2 \in \Sigma^*$. Факт соседства слов u и v обозначается записью $u \longleftrightarrow v$. Конгруэнция $\sim$ является транзитивным замыканием отношения $\longleftrightarrow$. Еще нам понадобится небольшое видоизменение понятия соседства. А именно, будем говорить, что u и v суть *ab-соседние* слова, если в определении соседства потребовать $z = ab$ или $z = ba$. В этом случае будем писать $u \overset{ab}{\longleftrightarrow} v$. Далее в работе вместо записи $u \sim v$ иногда используется фраза «u и v эквивалентны».

2. Вспомогательные утверждения

Данный раздел посвящен подготовке к доказательству предложения 3.1, из которого почти сразу следуют наши основные результаты. Предварительно необходимо исследовать слова вида $f(w)$. Лемма 2.1 описывает в них степени (т.е. слова вида x^n) и их связь со степенями в слове w.

Мы введем три преобразования слов — r_1, r_B и r_A, которые будут сокращать подслова особого вида. Эти преобразования мы будем называть сокращениями (редуцированиями): поэтому слова, к которым они уже неприменимы, будем называть r_1-, r_B- или r_A-редуцированными. Вполне редуцированным назовем слово, которое не редуцируется ни одним из этих преобразований. В леммах 2.2–2.7 мы покажем, что рассматриваемые сокращения сохраняют отношение соседства.

Лемма 2.1. *Пусть* $f(w) = xy^kz$, *где* $x, y, z \in \Sigma^*$ *при некотором* $k \geq 2$. *Тогда верно одно из следующих утверждений:*

1) *существуют слова* $u, t, v \in \Sigma^*$ *такие, что* $w = ut^kv$, *и для любого* $n \geq 2$ *справедливо равенство* $f(ut^nv) = xy^nz$*;*

2) *для некоторого* $i \geq 0$ *имеет место равенство* $y = b(ab)^i$ *или* $y = a(ba)^i$ *и при этом* $k = 2$.

Доказательство. Здесь и далее мы будем использовать иллюстрации, изображающие слово. Точки (.) обозначают произвольные символы из алфавита, вертикальные линии (|) символизируют границы блоков, горизонтальные фигурные скобки — вхождения слов. Например, запись $w = \ldots\ldots\underbrace{.|ab|.}_{x}\ldots\ldots\ldots.$ означает слово w, в которое входит x с блоком ab внутри.

При действии эндоморфизма f буква в позиции i данного слова переходит в две буквы в позициях $2i-1$, $2i$, которые образуют блок. Говоря ниже о первом вхождении для y, мы имеем в виду первое вхождение в подслово y^k из формулировки леммы.

Посмотрим, каким образом y^k может входить в $f(w)$. Разделим возможные случаи на два типа.

1. Слово y имеет четную длину.

(a) Первое вхождение слова y начинается в нечетной позиции. Непосредственно получаем, что слова x и z имеют четные длины. Тогда $u = f^{-1}(x)$, $t = f^{-1}(y)$, $v = f^{-1}(z)$.

(b) Первое вхождение слова y начинается в четной позиции. Пусть, например, начальная буква слова y есть b. Покажем, что имеет место следующая картина:

$$f(w) = \overbrace{\underbrace{........|a}_{x}}^{x_1}\overbrace{\underbrace{\,b|.......|a}_{y}}^{y_1}\overbrace{\underbrace{\,b|.......|a}_{y}}^{y_1}\overbrace{\underbrace{\,b|........}_{z}}^{z_1}$$

В самом деле, перед начальной буквой слова y обязательно стоит буква a (свойство блоков), и поэтому $x = x_1a$, $y = y_2a$. Пусть $y_1 = ay_2$, $z_1 = az$. Тогда при $n \geq 2$ имеем $xy^nz = x_1a(y_2a)^nz = x_1(ay_2)^naz = x_1(y_1)^nz_1$. Заметим, что слова x_1, y_1, z_1 имеют четные длины. В силу этого можем положить $u = f^{-1}(x_1)$, $t = f^{-1}(y_1)$, $v = f^{-1}(z_1)$.

2. Слово y имеет нечетную длину. Без ограничения общности предположим, что первая буква в y есть b. Пусть, к примеру, первое вхождение слова y начинается в четной позиции (а тогда второе — в нечетной). Покажем, что имеет место ситуация

$$f(w) = \underbrace{..........|.}_{x}\underbrace{\,b|ab|a.......b}_{y}\underbrace{|ba|ba|......|b}_{y}\underbrace{\,a|.......}_{z}$$

Действительно, рассматривая первый блок во втором вхождении y, получаем, что вторая буква в y есть a. Рассматривая второй блок в первом вхождении y, получаем, что третья буква в y есть b. Рассматривая второй блок во втором вхождении y, получаем, что четвертая буква в y есть a. Продолжая рассуждения, видим, что y имеет вид $b(ab)^i$. Если y входит в степени больше чем 2, то где-то на стыке последовательных вхождений y находится пара символов bb, начинающихся в нечетной позиции, что невозможно.

В случае, когда первое вхождение слова y начинается в нечетной позиции, сразу имеем противоречие. В самом деле, аналогично предыдущему случаю имеем $y = b(ab)^i$. Но тогда на стыке вхождений y имеем пару символов bb в нечетной позиции, что невозможно.

Лемма 2.1 показывает, что возникают степени двух типов — «хорошие», т.е. случай 1, и «плохие», т.е. случай 2 . Рассмотрим слово $u \in f(\Sigma^+)$ и вывод из него эквивалентного слова через цепочку соседних. Рассматривая два соседних несовпадающих элемента этой цепочки, легко понять, что некоторое слово вида x^2 в одном из них превращается в x^3 в другом. Нам хотелось бы, чтобы слово x было «хорошим». Для этого при помощи редуцирований избавимся от «плохих» степеней.

Первым делом необходимо избавиться от степеней букв. С этой целью введем процесс редуцирования r_1 такой же, как в теореме 10.4.1 из [3]. Обозначим через $r_1(w)$ слово, полученное из w сокращениями степеней букв, иначе говоря, преобразованиями $\alpha^3 \to \alpha^2$, где α — буква. Можно проверить, что результат сокращений не зависит от порядка их применения. В §10.4 книги [3] доказана следующая лемма.

Лемма 2.2. *Для любых слов $u, v \in \Sigma^*$ если $u \longleftrightarrow v$, то $r_1(u) \longleftrightarrow r_1(v)$.*

Непосредственно проверяется аналогичное утверждение для отношения $\overset{ab}{\longleftrightarrow}$, а именно, если $u \overset{ab}{\longleftrightarrow} v$, то $r_1(u) \overset{ab}{\longleftrightarrow} r_1(v)$.

Теперь необходимо установить некоторые свойства вхождений подслов вида $b(ab^i)$ и $a(ba)^i$. Будем обозначать $b(ab)^i$ через $\widetilde{B}[i]$, а $a(ba)^i$ соответственно через $\widetilde{A}[i]$ ($i \in N$). Положим $\widetilde{B} = \bigcup_{i=1}^{\infty}\{\widetilde{B}[i]\}$ и, двойственно, $\widetilde{A} = \bigcup_{i=1}^{\infty}\{\widetilde{A}[i]\}$. Как обычно, операция умножения в нашей полугруппе (конкатенация) продолжается на классы слов. Например, запись $\widetilde{B}^3$ означает множество слов вида $\widetilde{B}[i]\widetilde{B}[j]\widetilde{B}[k]$ ($i, j, k \in N$). Рассмотрим какой-нибудь класс, например $b\widetilde{B}^k b$. Нам будет удобно вместо обозначения $y \in b\widetilde{B}^k b$ писать «y имеет вид $b\widetilde{B}^k b$» или даже «$y = b\widetilde{B}^k b$».

Далее нам потребуется еще одно понятие, которое фактически означает, что в некотором слове введенные $\widetilde{B}$-конструкции встречаются в *целых степенях*.

Предварительно заметим, что следующие два условия эквивалентны.

1. *Если в слове содержится вхождение $b\widetilde{B}^k b$ (при некотором $k \geq 1$), то перед ним находится ba, а после — ab.*

2. *Если в слове содержится вхождение $b\widetilde{B}b$, то перед ним находится ba, а после — ab.*

Это можно легко доказать. В самом деле, второе условие есть частный случай первого. Допустим теперь, что выполнено второе условие, и докажем выполнимость первого. Рассматриваем вхождение $b\widetilde{B}^k b$. Оно начинается с $b\widetilde{B}b$, поэтому перед ним стоит ba по второму условию. Аналогично после $b\widetilde{B}^k b$ стоит ab.

Слово, удовлетворяющее любому из этих условий, назовем *$\widetilde{B}$-целым.* Ниже будут использованы оба условия, но чаще нам будет удобнее доказывать выполнимость второго.

Следующие три леммы носят технический характер и нужны для доказательства леммы 2.6.

Лемма 2.3. *Слова $u = x\widetilde{B}[n]\widetilde{B}[k]z$ и $v = x\widetilde{B}[n]\widetilde{B}[m_1]\widetilde{B}[m_2]\ldots\widetilde{B}[m_\ell]\widetilde{B}[k]z$ будут $\widetilde{B}$-целыми одновременно.*

Доказательство. Предположим, что u — $\widetilde{B}$-целое слово. (В противоположном случае доказательство аналогично.) Посмотрим, как может в слово v входить слово $b\widetilde{B}b$. Обозначим данное вхождение $b\widetilde{B}b$ через t, а соответствующее ему слово $\widetilde{B}$ через t_1.

Если t_1 входит в $x\widetilde{B}[n]$ или $\widetilde{B}[k]z$, то требуемое обеспечивается тем, что тогда t содержится в слове u, которое $\widetilde{B}$-целое. В слове u оно окружено словами ba и ab, и все слово $bab\widetilde{B}bab$ содержится в $x\widetilde{B}[n]\widetilde{B}[m_1]$ (или $\widetilde{B}[m_\ell]\widetilde{B}[k]z$), а потому имеется и в слове v.

В противном случае слово t_1 есть попросту некоторое $\widetilde{B}[m_i]$. Тогда видно, что перед t находится ba, а после — ab.

Лемма 2.4. *Слова $u = x(ba)^2z$ и $v = x(ba)^{2+i}z$ $(i \geq 1)$ будут $\widetilde{B}$-целыми одновременно.*

Доказательство. Пусть сначала $i = 1$. Предположим, что слово u является $\widetilde{B}$-целым. (В противоположном случае доказательство аналогично.) Посмотрим, как может в слово v входить слово $b\widetilde{B}b$. Обозначим данное вхождение $b\widetilde{B}b$ через t, а соответствующее ему слово $\widetilde{B}$ через t_1. Пусть для определенности $t_1 = \widetilde{B}[m]$. Понятно, что t находится целиком либо в xb, либо в z или же начало t лежит в x, а конец в z.

В первых двух случаях t находится в слове u, перед ним стоит ba, после — ab и слово $batab = bab\widetilde{B}bab$ целиком попадает в $xbab$ (или в baz), т.е. присутствует в слове v. В последнем случае в слове u присутствует $b\widetilde{B}[m-1]b$, перед ним имеется ba, содержащееся в слове x, а после — ab, содержащееся в слове z.

Видно, что в v вхождение $b\widetilde{B}b$ окружено словами ba и ab, что и требовалось доказать.

Теперь рассмотрим случай $i > 1$. Построим цепочку слов $w_k = x(ba)^kz$. Как следует из доказательства случая $i = 1$, слова w_k и w_{k+1} являются $\widetilde{B}$-целыми одновременнно. Таким образом, слова w_2 и w_{2+i} (т.е. u и v) тоже являются $\widetilde{B}$-целыми одновременно.

Далее нам потребуются следующие дополнительные обозначения:

$$0(x) \text{ — начальная буква слова } x,$$
$$1(x) \text{ — конечная буква слова } x.$$

Всюду ниже словесный оборот «с точностью до симметрии» означает, что рассматриваемый факт справедлив и в той ситуации, когда упоминаемые слова читаются справа налево.

Лемма 2.5. *Пусть r_1-редуцированное слово и равно xy^nz при некотором $n \geq 3$. Пусть также слово $y0(y)$ (или $1(y)y$) является подсловом слова v, где v имеет вид $b\widetilde{B}^k b$ при $k \geq 1$. Тогда y с точностью до симметрии имеет один из следующих видов:*

$$\begin{array}{cccc} \widetilde{B}^m, & ba, & \widetilde{B}^m a, & b\widetilde{B}^m a, \\ & bba, & \widetilde{B}^m ba, & b\widetilde{B}^m ba. \end{array} \tag{1}$$

Доказательство. Очевидно, что $|y| \geq 2$. Поскольку v не содержит подслов a^2 и b^3, слово y не может одновременно начинаться с a и заканчиваться на a. Таким образом, y с точностью до симметрии имеет вид $b...b$ или $b...a$.

Рассмотрим возможные виды y. 1. Слово y имеет вид $b...b$. Тогда $|y| > 2$, иначе в u есть подслово b^3. Рассмотрим вторую букву слова y.

(a) Пусть это буква b. Тогда $y = bb...b$, но это невозможно, поскольку u не содержит b^3.

(b) Пусть это буква a. Поскольку u не содержит b^3, предпоследняя буква в y не может быть b. Поэтому $y = ba....ab$ и, следовательно, y имеет вид $\widetilde{B}^m$.

2. Слово y имеет вид $b...a$. Тогда $y = ba$ или $|y| > 2$, что мы и будем предполагать в дальнейшем доказательстве.

Поскольку v не содержит a^2, предпоследняя буква слова y есть b, т.е. $y = b...ba$. Тогда либо $y = bba$, либо длина y больше трех. В этом случае корректно рассматривать вторую букву слова y.

(a) Пусть это буква a. Тогда $y = ba...ba$, следовательно, $y = \widetilde{B}^m a$ или $y = \widetilde{B}^m ba$.

(b) Пусть это буква b. Тогда $y = bb...ba$, следовательно, $y = b\widetilde{B}^m a$ или $y = b\widetilde{B}^m ba$.

Замечание 2.1. *Легко проверить, что множество слов вида (1) с точностью до симметрии есть множество слов следующих видов:*

$$\begin{array}{ccc} \widetilde{B}^m, & (ba)^n, & \widetilde{B}^m (ba)^n, \\ & b(ba)^n, & b\widetilde{B}^m (ba)^n. \end{array} \tag{2}$$

Здесь $m, n \geq 1$.

Рассмотрим слова, эквивалентные словам $f(\Sigma^*)$. Они оказываются $\widetilde{B}$-целыми, если их r_1-редуцировать. Это будет следовать из того, что слова из $f(\Sigma^*)$ — $\widetilde{B}$-целые, и из следующей леммы.

Лемма 2.6. *Пусть $u \longleftrightarrow v$, где u, v — r_1-редуцированные слова. Тогда если u — $\widetilde{B}$-целое слово, то и слово v — $\widetilde{B}$-целое.*

Доказательство. Когда $u = v$, утверждение леммы тривиально. Мы будем рассматривать ситуацию, когда $u = xy^2z$, $v = xy^3z$. В симметричной ситуации доказательство даже слегка упростится. Заметим, кстати, что $|y| \geq 2$.

Мы должны посмотреть, как в слово v могут входить подслова вида $b\widetilde{B}^kb$. Для удобства зафиксируем произвольное вхождение слова $w = b\widetilde{B}^kb$ в слово v.

У нас будут два принципиально разных случая: слово w — «большое» и слово w — «маленькое». Будем считать w большим, если оно содержит $y0(y)$ (или, симметрично, $1(y)y$). Это бывает, например, в такой ситуации:

$$v = \overbrace{\ldots\ldots}^{x}\,\overbrace{\ldots\underbrace{\ldots}_{}}^{y}\!\!\underbrace{\overbrace{\ldots\ldots}^{y}\,\overbrace{\ldots}^{y}}_{w}\!\!\overbrace{\ldots}^{}\,\overbrace{\ldots\ldots}^{z}$$

Другой случай — когда w «маленькое», т.е. не содержит $y0(y)$ или $1(y)y$. Это бывает, например, когда

$$v = \overbrace{\ldots\ldots}^{x}\,\overbrace{\ldots\underbrace{\ldots}_{w}}^{y}\!\!\overbrace{\ldots\ldots}^{y}\,\overbrace{\ldots\ldots}^{y}\,\overbrace{\ldots\ldots}^{z}$$

Иначе говоря, слово w — «маленькое», если w содержится в xy, y^2 или yz.

Нам придется немного уточнить разделение на случаи. Пусть слово w есть подслово y^2. Имеет место ситуация

$$\overbrace{\underbrace{\ldots\ldots}_{q_1}\underbrace{\ldots\ldots\ldots\ldots}_{w}\underbrace{\ldots\ldots}_{q_2}}^{y^2}$$

Если $\min(|q_1|, |q_2|) \geq 2$, то будем считать, что w «маленькое». Поскольку u является $\widetilde{B}$-целым, в слове u перед w стоит ba, а после — ab. Если, например, $|q_1| \leq 1$, то $y0(y)$ есть подслово $bawab = bab\widetilde{B}^kbab = \widetilde{B}^{k+2}$. В таком случае будем считать, что слово w «большое».

1. Слово w — «маленькое». Тогда оно входит также в слово u, и в слове u перед ним — ba, а после — ab. При этом полученная цепочка $bawab = bab\widetilde{B}^kbab$ целиком попадает в слово xy^2, y^2 или y^2z соответственно, а тогда она есть и в слове v.

2. Слово w — «большое». Тогда $y0(y)$ или $1(y)y$ содержится в $b\widetilde{B}^kb$ или $\widetilde{B}^{k+2}$. По лемме 2.5 слово y имеет один из видов, указанных в (2). Разберем возможные виды y.

(a) Пусть y имеет вид $b(ba)^n$. При этом

$$u = x(b(ba)^n)^2 z = xb((ba)^n b)(ba)^n z = xb\widetilde{B}[n](ba)^n z,$$
$$v = x(b(ba)^n)^3 z = xb((ba)^n b)^2 (ba)^n z = xb\widetilde{B}^2[n](ba)^n z.$$

Поскольку u является $\widetilde{B}$-целым, имеем

$$u = x_1\widetilde{B}[1]\widetilde{B}[n](ba)^n z_1 =,$$
$$v = x_1\widetilde{B}[1]\widetilde{B}^2[n](ba)^n z_1 = .$$

Теперь заключение леммы следует из леммы 2.3.

(b) Пусть y имеет вид $(ba)^n$. При этом

$$u = x(ba)^{2n} z,$$
$$v = x(ba)^{3n} z.$$

В этом случае заключение леммы следует из леммы 2.4.

(c) Пусть y имеет вид $b\widetilde{B}^m(ba)^n$. При этом

$$u = x(b\widetilde{B}^m(ba)^n)^2 z = xb\widetilde{B}^{2m+1}(ba)^n z,$$
$$v = x(b\widetilde{B}^m(ba)^n)^3 z = xb\widetilde{B}^{3m+2}(ba)^n z.$$

Поскольку u является $\widetilde{B}$-целым, имеем

$$u = xba(b\widetilde{B}^m(ba)^n)^2 z = x_1bab\widetilde{B}^{2m+1}(ba)^n z_1 = x_1\widetilde{B}^{2m+2}(ba)^n z_1,$$
$$v = xba(b\widetilde{B}^m(ba)^n)^3 z = x_1bab\widetilde{B}^{3m+2}(ba)^n z_1 = x_1\widetilde{B}^{3m+3}(ba)^n z_1.$$

В интересующих нас частях слов u и v последние вхождения $\widetilde{B}$ одинаковы, так как они берутся из последнего вхождения $\widetilde{B}$ в слово y. Первые вхождения $\widetilde{B}$ одинаковы, так как оба имеют вид bab.

Теперь заключение леммы следует из леммы 2.3.

Оставшиеся виды для y рассматриваются аналогично пункту (c). Если y имеет вид $\widetilde{B}^m$, то $u = x_1\widetilde{B}^{2m}z_1, v = x_1\widetilde{B}^{3m}z_1$, и мы попадаем в условия леммы 2.3. Если же y имеет вид $\widetilde{B}^m(ba)^n$, то $u = x_1\widetilde{B}^{2m+1}z_1, v = x_1\widetilde{B}^{3m+2}z_1$, и мы опять попадаем в условия леммы 2.3.

В случае, когда $u = xy^3z$, $v = xy^2z$, изменится только п.1 доказательства; а именно, мы можем снять ограничение на длины слов q_1 и q_2. В самом деле, пусть интересующее нас слово w входит в слове v в y^2. Покажем, например, что в слове v перед w находится ba. Поскольку w входит в xy^2, оно есть в слове u, тогда в слове u перед w находится слово ba и получившееся baw есть подслово xy^2, т.е. подслово v.

Теперь мы знаем достаточно, чтобы определить процесс сокращения r_B. Обозначим через $r_B(w)$ слово, полученное из w применением (пока возможно) преобразований

$$b\widetilde{B}b \quad \to \quad bb, \tag{3}$$

которые мы будем называть *сокращениями.*

Предварительно заметим, что мы будем применять сокращение r_B только к r_1-редуцированным словам. Поясним, почему преобразования (3) можно применять в любом порядке. Найдем в слове w все вхождения bb. Рассмотрим два соседних вхождения. Пусть $w = v_1bbv_2bbv_3$. Тогда слово bv_2b не содержит bb и либо является выражением вида $\widetilde{B}$, либо нет. Теперь рассмотрим все такие вхождения. Тогда w естественным образом представляется в виде $u_0b\widetilde{B}^{k_1}bu_1\dots b\widetilde{B}^{k_\ell}bu_\ell$. При этом слова bu_ib при $1 \leq i \leq l-1$ не содержат bb и не являются словами вида $\widetilde{B}$. Слова u_0b и bu_ℓ также не содержат bb. Таким образом, $r_B(w) = u_0bbu_1bb\dots bbu_\ell$ и сокращения вида (3) можно применять в любом порядке.

Определение 1. *Рассмотрим пару слов (u, v). Назовем эти слова* квазисоседними*, если существуют последовательности слов $u_1, \dots, u_n$ и $v_1, \dots, v_m$ такие, что*

$$u = u_1 \xleftrightarrow{ab} u_2 \xleftrightarrow{ab} \dots \xleftrightarrow{ab} u_n \longleftrightarrow v_m \xleftrightarrow{ab} \dots \xleftrightarrow{ab} v_2 \xleftrightarrow{ab} v_1 = v.$$

Отметим, что если u и v — r_B-редуцированы, то все слова в цепочке из определения квазисоседства тоже r_B-редуцированы.

Рассмотрим вхождение $\widetilde{B}^k$ в слово w. Можно говорить о максимальных вхождениях $\widetilde{B}^k$, т.е. не содержащихся ни в каких других вхождениях $\widetilde{B}^l$ при $l > k$.

Далее вплоть до раздела 3 будем рассматривать только слова, эквивалентные каким-то словам из $f(\Sigma^*)$. Они обладают следующим свойством: если в $\widetilde{B}$-целом слове цепочка $\widetilde{B}^k$ при $k \geq 2$ максимальна, то перед самым левым вхождением (после самого правого вхождения) $\widetilde{B}$ в этой цепочке находится буква a. В самом деле, если перед самым левым вхождением $\widetilde{B}^k$ есть буква, то это, очевидно, буква a, иначе имеем противоречие с определением свойства быть $\widetilde{B}$-целым. Буква там есть, иначе слово w, эквивалентное какому-то слову вида $f(u)$, имеет начало $ba(ba)^nbb$, что невозможно. В самом деле, рассмотрим цепочку соседних слов, ведущую от w к $f(u)$. Все слова в цепочке, в том числе и $f(u)$, имеют префикс $ba(ba)^ibb$ при некотором i. Поскольку слово $f(u)$ состоит из блоков, оно не может иметь префикс указанного вида.

Лемма 2.7. *Пусть u, v — квазисоседние $\widetilde{B}$-целые слова, причем $r_1(u) = u$, $r_1(v) = v$. Тогда слова $r_B(u)$ и $r_B(v)$ также являются квазисоседними.*

Доказательство. Сразу считаем, что $u \neq v$. Можно показать, что если $u \xleftrightarrow{ab} v$, то $r_B(u) \xleftrightarrow{ab} r_B(v)$, слегка модифицировав доказательство леммы 2.4. Это мы сейчас и проделаем. Пусть сначала $u = x(ba)^2z$, а $v = x(ba)^3z$. Сначала сократим вхождения $b\widetilde{B}b$ в слова xb и z. Если сокращать больше нечего, то $r_B(u) = r_B(xb)abar_B(z)$, а $r_B(v) = r_B(xb)a(ba)^2r_B(z)$ и тогда слова $r_B(u)$ и $r_B(v)$ ab-соседние. В противном случае у нас есть вхождения $b\widetilde{B}b$, «перекрывающие» $(ba)^2$ в слове u или $(ba)^3$ в слове v. Тогда после сокращения получим одинаковые слова, т.е. $r_B(u) = r_B(v)$. В случае $u = x(ab)^2z$, а $v = x(ab)^3z$ проведем аналогичные рассуждения, читая слова u и v справа налево.

Далее мы будем рассматривать только вариант $u \longleftrightarrow v$. В ситуации, когда $u = v$, условие леммы проверяется непосредственно. Пусть для определенности $u = xy^2z$, $v = xy^3z$. Кстати, ab или ba в качестве y мы только что рассмотрели, а рассматривать aa или bb нельзя по условию, поэтому мы будем считать, что $|y| \geq 3$.

Далее будут рассмотрены возможные типы вхождений $b\widetilde{B}b$ в слова u, v. Поскольку, как было замечено выше, сокращения можно применять в любом порядке, мы можем потребовать, чтобы они осуществлялись в указанном ниже порядке.

Пусть мы сначала редуцировали слова x, y и z сами по себе, т.е. заменили их на $r_B(x)$, $r_B(y)$ и $r_B(z)$ соответственно. При этом u и v остались соседними.

Посмотрим, как могут возникать конструкции $b\widetilde{B}b$ на стыке слов x, y и z. Заметим, что эта конструкция входит в слова u, v только внутри конструкции $\widetilde{B}^3$, так как u и v суть $\widetilde{B}$-целые слова. Поэтому мы иногда будем просто писать $bab\widetilde{B}bab$ или даже $\widetilde{B}^3$. Рассмотрим возникающие (с точностью до симметрии) случаи. Обозначим конкретное вхождение $b\widetilde{B}b$ через w.

1. Пусть $y0(y)$ (или $1(y)y$) является подсловом в w. Тогда из леммы 2.5 следует, что y имеет один из видов (2), т.е. w — «большое». Теперь нам нужно повторить разбор случаев леммы 2.6, проведя лишь небольшую модификацию. Приведем один пример. Пусть y имеет вид $b(ba)^n$. При этом

$$u = x(b(ba)^n)^2z = xb((ba)^nb)(ba)^nz = xb\widetilde{B}(ba)^nz,$$
$$v = x(b(ba)^n)^3z = xb((ba)^nb)^2(ba)^nz = xb\widetilde{B}^2(ba)^nz.$$

Поскольку u является $\widetilde{B}$-целым, имеем

$$u = x_1bab\widetilde{B}(ba)^nz_1,$$
$$v = x_1bab\widetilde{B}^2(ba)^nz_1.$$

Теперь, поскольку порядок сокращения можно выбирать произвольно, сократив сначала в v «лишнее» слово $b\widetilde{B}b$, получим одинаковые слова, которые в ходе дальнейшего сокращения останутся равными, т.е. соседними.

Далее будем предполагать, что y не имеет вида (2), т.е. w — «маленькое».

2. Пусть некоторое сокращение происходит на стыке вхождений y. Тогда сокращаемое $\widetilde{B}$ имеет вид y_3y_1, где y_1 и y_3 — соответственно, некоторые префикс и суффикс в y, то есть имеет место следующая ситуация:

$$u = \overbrace{..........}^{x}\,\overbrace{\underbrace{.....}_{y_1}\,\underbrace{..........}_{y_2}\,\underbrace{.......}_{y_3}}^{y}\,\overbrace{\underbrace{.....}_{y_1}\,\underbrace{..........}_{y_2}\,\underbrace{.......}_{y_3}}^{y}\,\overbrace{\underbrace{.....}_{y_1}\,\underbrace{..........}_{y_2}\,\underbrace{.......}_{y_3}}^{y}\,\overbrace{..........}^{z}$$

При этом u сокращается до $xy_1y_2^2y_3z$, а v — до $xy_1y_2^3y_3z$, и они остаются соседними.

3. Пусть имеет место такая ситуация (или симметричная ей):

$$u = \overbrace{........b\,\underbrace{ba..}_{x_1}}^{x}\overbrace{\underbrace{...ab}_{y_1}b..........}^{y}\overbrace{\underbrace{...ab}_{y_1}b..........}^{y}\,.........$$

Поскольку u является $\widetilde{B}$-целым словом, мы можем уточнить картину:

$$u = \overbrace{.....\underbrace{b...bab}_{x_0}\underbrace{ba..}_{x_1}}^{x}\overbrace{\underbrace{...ab}_{y_1}b..........}^{y}\overbrace{\underbrace{...ab}_{y_1}b..........}^{y}\,......$$

Очевидно, что слово x_0 — самая крайняя $\widetilde{B}$-конструкция. Тогда, в силу того, что мы писали перед леммой 2.7, перед ним находится буква, т.е. мы имеем слово $(ab)^n$ при некотором $n \geq 2$. Вычеркнем x_1y_1. Теперь покажем по определению, что $r_B(u)$ и $r_B(v)$ суть квазисоседние слова, для чего будем строить цепочку слов. До тех пор, пока в u слово x_0 короче слова x_1y_1, будем заменять в нем $(ab)^2$ на $(ab)^3$. Таким образом мы получим y^2. Заменим y^2 на y^3. После этого мы можем заменить обратно $(ab)^3$ на $(ab)^2$ и получить слово v. Итак, слова $r_B(u)$ и $r_B(v)$ оказываются квазисоседними.

Даже если предыдущая ситуация возникла одновременно с обеих сторон слова u или v (т.е. в xy и yz), мы можем дважды провести рассуждения последнего пункта, а именно проделать замены $(ab)^2 \to (ab)^3$ с обеих сторон, потом осуществить замену $y^2 \to y^3$, а затем проделать обратные замены $(ab)^3 \to (ab)^2$.

Другие случаи невозможны, поскольку слово w либо «большое», либо содержится в одном из слов xy, y^2, yz. Таким образом, мы разобрали все возможные случаи, зафиксировали порядок сокращения и каждый раз получали квазисоседние слова.

Итак, слова $r_B(u)$ и $r_B(v)$ — квазисоседние.

В заключение этого раздела определим процесс сокращения r_A, в котором вместо преобразования $b\widetilde{B}b \to bb$ используется переход $a\widetilde{A}a \to aa$. Определим также свойство «быть $\widetilde{A}$-целым» двойственно к свойству «быть $\widetilde{B}$-целым». А именно назовем $\widetilde{A}$-*целым* слово u, в котором для каждого вхождения подслова $a\widetilde{A}^k a$ (при $k \geq 1$) перед ним находится ab, а после него — ba. Очевидно, что вместе с леммами 2.5–2.7 справедливы их двойственные аналоги.

3. Доказательство основных результатов

Напомним, что вполне редуцированным мы называем слово, являющееся r_1-, r_A- и r_B редуцированным.

Предложение 3.1. *Пусть $f(w) \sim s$, где s — вполне редуцированное $\widetilde{A}$- и $\widetilde{B}$-целое слово. Тогда найдется слово v такое, что $f(v) = s$ и $w \sim v$.*

Доказательство. Отметим, что слово $f(w)$ является $\widetilde{A}$- и $\widetilde{B}$-целым, а также r_1-, r_A- и r_B-редуцированным.

Пусть $f(w) \sim s$. Тогда $f(w) = s_0 \longleftrightarrow s_1 \longleftrightarrow \ldots \longleftrightarrow s_{n-1} \longleftrightarrow s_n = s$. Применим к цепочке сокращение r_1. Тогда по лемме 2.2 слова s_i и s_{i+1} останутся соседними. По лемме 2.6 все s_i — $\widetilde{B}$-целые слова, а по двойственной лемме они также и $\widetilde{A}$-целые.

Применим сокращение r_B. Тогда по лемме 2.7 и замечанию, идущему сразу перед определнием 1, найдутся r_1- и r_B-редуцированные слова $t_0, t_1, \ldots, t_m$ такие, что $f(w) = t_0 \longleftrightarrow t_1 \longleftrightarrow \ldots \longleftrightarrow t_{m-1} \longleftrightarrow t_m = s$.

Применим сокращение r_A. Тогда по лемме, двойственной к лемме 2.7, найдутся такие слова $p_0, p_1, \ldots, p_\ell$, что $f(w) = p_0 \longleftrightarrow p_1 \longleftrightarrow \ldots \longleftrightarrow p_{\ell-1} \longleftrightarrow p_\ell = s$, причем p_i — редуцированы по r_1 и по r_A. Очевидно также, что слова p_i останутся r_B-редуцированными по той же причине, что и в предыдущем абзаце.

Покажем, что для любого i найдется слово w_i такое, что выполнено равенство $p_i = f(w_i)$. В самом деле, $p_0 = f(w) = f(w_0)$, $p_0 \longleftrightarrow p_1$. Если $p_0 = p_1$, то возьмем в качестве w_1 слово w. Пусть, к примеру, $p_0 = xy^2z$, $p_1 = xy^3z$. Тогда, поскольку p_0 и p_1 вполне редуцированы, в лемме 2.1 может иметь место только случай 1. Следовательно, $w_0 = x'y'^2z'$, причем $f(x'y'^kz') = xy^kz$ при $k \geq 2$. Поэтому в качестве w_1 можно взять $x'y'^3z'$. Заметим, что в любом случае $w_0 \longleftrightarrow w_1$.

Продолжая в том же духе, получаем, что $f^{-1}(r_i) = w_i$, причем $w_i \longleftrightarrow w_{i+1}$. Но тогда $s = f(w_n)$, поэтому положим $v = w_n$.

Предложение 3.2. *Для любого n, если $u_n \sim u_n \cdot x$, то $x = \lambda$.*

Доказательство. В самом деле, при $n \leq 1$ утверждение очевидно. Рассуждая от противного, рассмотрим наименьшее n, при котором оно не выполняется, т.е. $u_n \sim u_n \cdot x$ для некоторого непустого слова x. Рассмотрим цепочку соседних слов от u_n до $u_n \cdot x$. Применим к ней r_1. По лемме 2.2 цепочка остается цепочкой соседних слов. По лемме 2.6 все получившиеся слова, в том числе и $r_1(u_n \cdot x)$, являются $\widetilde{B}$- и $\widetilde{A}$-целыми.

Посмотрим, что представляет собой слово $r_1(u_n \cdot x)$. Сократим сначала слова u_n и x. Кстати, $r_1(u_n) = u_n$, поскольку слова Туэ–Морса не содержат третьих степеней букв. После этого сократим кубы на стыке слов u_n и $r_1(x)$. Здесь может возникнуть не более одного куба, поскольку слово u_n оканчивается на ab или ba, при этом слово $r_1(x)$ обязано иметь хотя бы две буквы. Итак, либо на стыке куба не возникает, и тогда $r_1(x)$ не пусто в силу непустоты x, либо мы сокращаем одну букву, а слово $r_1(x)$ имеет хотя бы две буквы. В любом случае $r_1(u_n \cdot x) = u_n \cdot y$, где y — некоторое непустое слово. Поэтому $u_n \cdot y$ являеися $\widetilde{A}$ и $\widetilde{B}$-целым.

Теперь применим r_A к слову $u_n \cdot y$. Тогда по лемме, двойственной к лемме 2.7, мы по-прежнему имеем цепочку соседних слов. Покажем, что при этом $u_n \cdot y$ сократится до $u_n \cdot y_1$, где y_1 — некоторое непустое слово. Сократим сначала слова u_n и y. Кстати, $r_A(u_n) = u_n$, поскольку слова Туэ–Морса не содержат $a\widetilde{A}a$. После этого произведем сокращения на стыке слов u_n и $r_A(y)$. Если u_n оканчивается на $abba$, сокращать на стыке нечего. Если же u_n имеет суффикс $baab$, то воспользуемся $\widetilde{A}$-целостью слова $u_n r_A(y)$. После возможного превращения $aba\,\widetilde{A}\,aba$ в $aba\,aba$ на стыке слов u_n и $r_A(y)$ слово $r_A(y)$ остается непустым, а слово u_n не изменяется.

Повторим все только что проделанное для процесса сокращения r_B. Таким образом, имеем $r_B(r_A(r_1(u_n \cdot x))) = u_n \cdot y_2$, где y_2 опять не пусто.

Теперь слово $u_n \cdot y_2$ вполне редуцировано, и по предложению 3.1 найдется непустое слово y' такое, что $u_{n-1} \sim u_{n-1} \cdot y'$. Это дает противоречие с минимальностью n.

Теорема. 1. *Элементы $\bar{u}_n$ в полугруппе $\Sigma^+/\!\sim$ различны и нерегулярны.*

2. *$\mathscr{D}$-классы элементов $\bar{u}_n$ тривиальны и образуют цепь типа ω^* в остове $\mathscr{D}$-классов этой полугруппы.*

Доказательство. 1. Покажем различность $\bar{u}_n$. Действительно, пусть $u_n \sim u_{n+m}$. Тогда $m = 0$ по предложению 3.2 Поскольку соотношение $u_n \sim u_n x u_n$

противоречит предложению 3.2, $\bar{u}_n$ не могут являться регулярными элементами исследуемой полугруппы.

2. Мы покажем тривиальность соответствующих $\mathscr{R}$-классов, доказательство для $\mathscr{L}$-классов аналогично. Из этого будет следовать тривиальность $\mathscr{D}$-классов.

Пусть w — какое-то слово Туэ–Морса и пусть $x \in R_w$. Тогда найдутся слова $w' \sim w$, $x' \sim x$ и y' такие, что $w' \sim x'y'$. Аналогично найдутся слова $w'' \sim w$, $x'' \sim x$ и y'' такие, что $x'' \sim w''y''$. Будем предполагать, что хотя бы одно из слов y' и y'' непусто. Тогда $w' = x'y' \sim x''y' \sim w''y''y'$. Заметим, что $y''y' \neq \lambda$. Поскольку $w \sim w' \sim w''$, имеем $w \sim wy''y'$, что противоречит предложению 3.2.

Для доказательства последнего утверждения рассмотрим элементы $\bar{u}_n$ и $\bar{u}_{n+1}$. Их $\mathscr{D}$-классы связаны соотношением $\mathscr{D}_{\bar{u}_{n+1}} \leq \mathscr{D}_{\bar{u}_n}$. Равенства здесь быть не может, так как иначе $\bar{u}_{n+1} \mathscr{D} \bar{u}_n$ и тогда $\bar{u}_{n+1} \sim \bar{u}_n$.

В заключение отметим два момента. Во-первых, на наш взгляд, представляет несомненный интерес задача о том, как распределяются по классам конгруэнции $\sim$ не только слова Туэ–Морса, но и произвольные сильно бескубные слова. Во-вторых, авторам стал доступен препринт [4], в котором, в частности, отмечается, что в полугруппе $\Sigma^+/\sim$ произвольные нерегулярные элементы порождают тривиальные $\mathscr{D}$-классы.

Авторы весьма признательны рецензенту, замечания которого способствовали значительному улучшению текста.

Мы с благодарностью вспоминаем А. Н. Петрова, беседы с которым стимулировали проведение данного исследования.

Литература

1. Шур А. М. Бинарная избегаемость и слова Туэ–Морса // Докл. РАН. 1996. Т.348, №5. С.598–599.
2. Brzozowski J., Culik K., Gabrielian A. Classification of non-counting events // J. Comp. Syst. Sci. 1971. Vol.5, №1. P.41–53.
3. Лаллеман Ж. Полугруппы и комбинаторные приложения. М.: Мир, 1985.
4. do Lago A. P., Simon I. Free Burnside semigroups. 1999 (preprint).

Статья поступила 07.07.1998 г.;
окончательный вариант 30.12.2000 г.