УДК 517.929

Ю. Ф. Долгий, Е. В. Кукушкина

ПРЕДСТАВЛЕНИЯ РЕШЕНИЙ СТАЦИОНАРНЫХ ФУНКЦИОНАЛЬНО-РАЗНОСТНЫХ УРАВНЕНИЙ*

1. Введение

Рассматривается линейная система функционально-разностных уравнений

$$x(t)=\int_{-r}^{0}d_{\vartheta}\eta(\vartheta)\,x(t+\vartheta)+h(t), \tag{1.1}$$

где $x:\mathbb{R}\to\mathbb{R}^n$; $h\in\mathbb{C}(\mathbb{R},\mathbb{R}^n)$; матричная функция η имеет ограниченную вариацию на $[-r,0]$, $\eta(0)=\eta(-0)=0$.

Для указанной системы изучается начальная задача Коши в пространстве непрерывных функций. Пусть начальный момент $t_0\in\mathbb{R}$, начальная функция $\varphi\in\mathbb{C}([t_0-r,t_0],\mathbb{R}^n)$. Функция $x\in\mathbb{C}([t_0-r,+\infty),\mathbb{R}^n)$ является решением начальной задачи Коши, если $x(t)=\varphi(t)$ при $t\in[t_0-r,t_0]$ и для нее равенство (1.1) выполняется тождественно на полуоси $[t_0,+\infty)$.

Так как однородная часть системы (1.1) стационарна, то далее, без ограничения общности, положим $t_0=0$.

Для существования непрерывного решения начальной задачи Коши необходимо, чтобы выполнялось условие согласования

$$\varphi(0)=\int_{-r}^{0}d_{\vartheta}\eta(\vartheta)\,\varphi(\vartheta)+h(0). \tag{1.2}$$

Условие (1.2) при заданной функции h накладывает ограничения на выбор начальной функции φ.

Понятие функционально-разностного уравнения обобщает понятие разностного уравнения с непрерывным временем так же, как понятие функционально-дифференциального уравнения обобщает понятие дифференциально-разностного уравнения. В работе для линейных стационарных систем функционально-разностных уравнений установлены условия существования

*Работа выполнена при поддержке грантов РФФИ №99-01-00145 и Министерства образования Российской Федерации №Е00-10-91.

© Ю. Ф. Долгий, Е. В. Кукушкина, 2002

и единственности решений начальной задачи Коши в пространстве непрерывных функций. Получена формула, дающая аналитическое представление общего решения изучаемой системы функционально-разностных уравнений. Рассмотрены методы нахождения указанного представления. Полученные результаты иллюстрируются примерами. Указанный круг вопросов исследовался для линейных систем функционально-дифференциальных уравнений [1–3]. Для линейных систем разностных уравнений с непрерывным временем рассматриваемые проблемы изучались в работах [4–6]. Специальные решения линейных разностных уравнений с непрерывным временем построены в работе [7]. Для линейных систем разностных уравнений с дискретным временем решения рассматриваемых проблем изложены в работах [8, 9].

2. Существование и единственность решения начальной задачи Коши

Решение начальной задачи Коши для системы функционально-разностных уравнений с заданной начальной функцией φ удовлетворяет уравнению

$$x(t) = L(x)(t), \quad t \geq 0, \tag{2.1}$$

где оператор L определяется формулами

$$L(x)(t) = \begin{cases} \int_{-r}^{-t} d_\vartheta \eta(\vartheta)\, \varphi(t+\vartheta) + \int_{-t}^{0} d_\vartheta \eta(\vartheta)\, x(t+\vartheta) + h(t), & 0 \leq t < r, \\ \int_{-r}^{0} d_\vartheta \eta(\vartheta)\, x(t+\vartheta) + h(t), & r \leq t < \infty. \end{cases} \tag{2.2}$$

Теорема 2.1. *Пусть h и φ — непрерывные вектор-функции, выполнено условие согласования* (1.2)*, матричная функция η имеет ограниченную вариацию на $[-r,0]$ и $\eta(0) = \eta(-0) = 0$. Тогда начальная задача Коши для уравнения* (1.1) *имеет единственное непрерывное решение.*

Доказательство. Пусть

$$x \in \mathbb{C}_{\varphi(0)}([0,+\infty), \mathbb{R}^n) = \{x : \ x \in \mathbb{C}([0,+\infty), \mathbb{R}^n), \quad x(0) = \varphi(0)\}.$$

Тогда функция $x_\varphi(t) = \varphi(t)$ при $t \in [-r,0]$ и $x_\varphi(t) = x(t)$ при $t > 0$ принадлежит пространству $\mathbb{C}([-r,+\infty), \mathbb{R}^n)$. Для любого $T > 0$ и любых $t_1,\ t_2 \in [0,T]$ имеем

$$|L(x)(t_1) - L(x)(t_2)| \leq \operatorname*{var}_{\vartheta \in [-r,0]} \eta(\vartheta) \max_{\vartheta \in [-r,0]} |x_\varphi(t_2+\vartheta) - x_\varphi(t_1+\vartheta)|.$$

Из равномерной непрерывности функции x_φ на $[-r,T]$ следует непрерывность функции $L(x)$ на $[0,T]$. Тогда $L(x) \in \mathbb{C}([0,+\infty),\mathbb{R}^n)$, $L(x)(0) = \varphi(0)$ и $L(x) \in \mathbb{C}_{\varphi(0)}([0,+\infty),\mathbb{R}^n)$. Оператор L является вольтерровым по Тихонову [10]. Поэтому можно ввести для него сужение на отрезок $[0,T]$ ($T > 0$) с помощью формулы $L_T(x)(t) = L(x)(t)$, $t \in [0,T]$. Здесь для сужения функции x на отрезок $[0,T]$ мы оставляем то же обозначение. Имеем $L_T : \mathbb{C}([0,T],\mathbb{R}^n) \to \mathbb{C}([0,T],\mathbb{R}^n)$. На отрезке $[0,T]$ уравнение (2.1) совпадает с уравнением

$$x(t) = L_T(x)(t), \quad t \in [0,T]. \tag{2.3}$$

При $0 < T < r$ из (2.2) находим

$$L_T(x)(t) = \int_{-t}^{0} d_\vartheta\eta(\vartheta)\left(x(t+\vartheta) - \varphi(0)\right) + \int_{-r}^{-t} d_\vartheta\eta(\vartheta)\left(\varphi(t+\vartheta) - \varphi(0)\right) +$$
$$+h(t) - \eta(-r)\varphi(0), \quad t \in [0,T],$$

или

$$L_T(x)(t) = \widetilde{L}_T(\widetilde{x})(t) + \widetilde{h}(t) + \varphi(0), \quad t \in [0,T], \tag{2.4}$$

где

$$\widetilde{x}(t) = x(t) - \varphi(0),$$
$$\widetilde{h}(t) = h(t) + \int_{-r}^{-t} d_\vartheta\eta(\vartheta)\left(\varphi(t+\vartheta) - \varphi(0)\right) - \left(I_n + \eta(-r)\right)\varphi(0),$$
$$\widetilde{L}_T(\widetilde{x})(t) = \int_{-t}^{0} d_\vartheta\eta(\vartheta)\,\widetilde{x}(t+\vartheta), \quad t \in [0,T].$$

Здесь $\widetilde{x} \in \mathbb{C}_0([0,T],\mathbb{R}^n)$, $\widetilde{h}(0) = 0$ и $\widetilde{L}_T(\widetilde{x})(0) = 0$. Можно показать, что $\widetilde{h}$, $\widetilde{L}_T(\widetilde{x}) \in \mathbb{C}([0,T],\mathbb{R}^n)$. Следовательно, $\widetilde{h}$, $\widetilde{L}_T(\widetilde{x}) \in \mathbb{C}_0([0,T],\mathbb{R}^n)$ и с учетом (2.4) уравнение (2.3) преобразуется в уравнение

$$\widetilde{x}(t) = \widetilde{L}_T(\widetilde{x})(t) + \widetilde{h}(t), \quad t \in [0,T], \tag{2.5}$$

решение которого следует искать в пространстве $\mathbb{C}_0([0,T],\mathbb{R}^n)$. Находим

$$\left\|\widetilde{L}_T\right\| \le \sup_{t\in[0,T]} \operatorname*{var}_{\vartheta\in[-t,0]} \eta(\vartheta) = \operatorname*{var}_{\vartheta\in[-T,0]} \eta(\vartheta).$$

Число $T = T_1$ можно выбрать так, чтобы $\operatorname*{var}\limits_{\vartheta\in[-T,0]} \eta(\vartheta) < 1$ [11, с. 197]. Тогда при $T = T_1$ решение уравнения (2.5) задается формулой [12, с. 211]

$$\widetilde{x}(t) = \left(I - \widetilde{L}_{T_1}\right)^{-1}\left(\widetilde{h}\right)(t), \quad t \in [0,T_1],$$

где I — тождественный оператор, и позволяет определить решение уравнения (1.1) на отрезке $[0, T_1]$.

Построим решение уравнения (1.1) на отрезке $[T_1, T]$ $(T > T_1)$. Уравнение (1.1) на отрезке $[T_1, T]$ запишем в следующем виде:

$$x(t) = L_{T_1}(x)(t), \quad t \in [T_1, T], \tag{2.6}$$

где оператор $L_{T_1} : \mathbb{C}([T_1, T], \mathbb{R}^n) \to \mathbb{C}([T_1, T], \mathbb{R}^n)$. Используя (2.2), находим представление оператора L_{T_1}:

$$L_{T_1}(x)(t) = \widetilde{L}_{T_1}(\widetilde{x}_1)(t) + \widetilde{h}_1(t) + x(T_1), \quad t \in [T_1, T],$$

где

$$\widetilde{x}_1(t) = x(t) - x(T_1),$$
$$\widetilde{L}_{T_1}(\widetilde{x}_1)(t) = \int_{T_1 - t}^{0} d_\vartheta \eta(\vartheta)\, \widetilde{x}_1(t+\vartheta),$$
$$\widetilde{h}_1(t) = h(t) + \int_{-r}^{T_1 - t} d_\vartheta \eta(\vartheta)\, x_{\varphi_1}(t+\vartheta) - (I_n + \eta(-r))\, x(T_1),$$
$$x_{\varphi_1}(t+\vartheta) = x_\varphi(t+\vartheta) - x(T_1), \quad \vartheta \in [-r, T_1 - t], \quad t \in [T_1, T].$$

Для уравнения (2.6) повторяем рассуждения, используемые при изучении уравнения (2.3). Находим $T = T_2$, для которого уравнение (2.6) однозначно разрешимо. Решение этого уравнения при $T = T_2$ опишем формулой

$$x_1(t) = \left(I - \widetilde{L}_{T_2}\right)^{-1}\left(\widetilde{h}_1\right)(t) + x(T_1), \quad t \in [T_1, T_2].$$

Решение уравнения (1.1) на отрезке $[T_1, T_2]$ задается формулой

$$x(t) = \left(I - \widetilde{L}_{T_2}\right)^{-1}\left(\widetilde{h}_1\right)(t) + \left(I - \widetilde{L}_{T_1}\right)^{-1}\left(\widetilde{h}\right)(T_1) + \varphi(0).$$

Продолжая приведенные рассуждения, докажем существование единственного решения уравнения (1.1) на произвольном отрезке $[0, T]$ $(T > 0)$ и построим его. Теорема доказана.

Пусть $h \in \mathbb{C}^m([0, +\infty), \mathbb{R}^n)$, $\varphi \in \mathbb{C}^m([-r, 0], \mathbb{R}^n)$ и выполнены условия согласования

$$\varphi^{(k)}(0) = \int_{-r}^{0} d_\vartheta \eta(\vartheta)\, \varphi^{(k)}(\vartheta) + h^{(k)}(0), \quad 0 \le k \le m. \tag{2.7}$$

Здесь $\varphi^{(0)} = \varphi$, $h^{(0)} = h$, $\varphi^{(k)}(0)$ $(1 \le k \le m)$ — левая k-я производная, $h^{(k)}(0)$ $(1 \le k \le m)$ — правая k-я производная. Если уравнение (1.1) имеет решение $x \in \mathbb{C}^m([-r,+\infty),\mathbb{R}^n)$, то его k-я производная является решением уравнения

$$y(t)=\int_{-r}^{0} d_\vartheta\eta(\vartheta)\,y(t+\vartheta)+h^{(k)}(t)\quad(1\le k\le m),\quad t\ge 0, \tag{2.8}$$

с начальным условием

$$y(t)=\varphi^{(k)}(t)\quad(1\le k\le m),\quad t\in[-r,0].$$

Предложение 2.1. *Пусть h и φ — m раз непрерывно дифференцируемые функции, выполнены условия согласования* (2.7), *матричная функция η имеет ограниченную вариацию на $[-r,0]$ и $\eta(0)=\eta(-0)=0$. Тогда существует единственное m раз непрерывно дифференцируемое решение системы* (1.1).

Доказательство. Согласно теореме 2.1 существует единственное непрерывное решение m-го уравнения (2.8) $y=y_m(t)$, удовлетворяющее начальному условию: $y_m(t)=\varphi^{(m)}(t)$ при $t\in[-r,0]$. Тогда искомое решение системы (1.1) определяется формулами

$$x(t)=\underbrace{\int_0^t\dots\int_0^{s_{m-1}}}_{m} y_m(s_m)\,ds_m ds_{m-1}\dots ds_1+\sum_{k=0}^{m-1}\frac{\varphi^{(k)}(0)}{k!}t^k=$$

$$=\int_0^t\frac{(t-s)^{m-1}}{(m-1)!}y_m(s)\,ds+\sum_{k=0}^{m-1}\frac{\varphi^{(k)}(0)}{k!}t^k,\quad 0<t<\infty,$$

$$x(t)=\varphi(t),\quad -r\le t\le 0.$$

Предложение доказано.

3. Представления решений стационарных функционально-разностных уравнений

Уравнение (2.3) при произвольном $\Delta>0$ можно преобразовать к следующему виду:

$$\widetilde{x}(t)=(D_\Delta\widetilde{x})(t)+(H_\Delta\widetilde{\varphi})(t)+\widetilde{h}_\Delta(t),\quad t\in[0,\Delta], \tag{3.1}$$

где $\widetilde{\varphi}(s)=\varphi(s)-\varphi(0)$, $s\in[-r,0]$; $\widetilde{x}(t)=x(t)-\varphi(0)$, $\widetilde{h}(t)=h(t)-h(0)$, $t\in[0,\Delta]$; $\widetilde{\varphi}\in\mathbb{C}_0([-r,0],\mathbb{R}^n)$; $\widetilde{h}\in\mathbb{C}_0([0,\Delta],\mathbb{R}^n)$ при $0<\Delta<r$.

$$(D_\Delta\widetilde{x})(t)=\int_{-t}^{0} d_\vartheta\eta(\vartheta)\,\widetilde{x}(t+\vartheta),\quad 0\le t\le\Delta,$$

$$(H_\Delta\widetilde{\varphi})(t)=\int_{-r}^{-t} d_\vartheta\eta(\vartheta)\,\widetilde{\varphi}(t+\vartheta)-\int_{-r}^{0} d_\vartheta\eta(\vartheta)\,\widetilde{\varphi}(\vartheta),\quad 0\le t\le\Delta,$$

а при $\Delta > r$

$$(D_\Delta \widetilde{x})(t) = \begin{cases} \int_{-t}^{0} d_\vartheta \eta(\vartheta)\, \widetilde{x}(t+\vartheta), & 0 \le t \le r, \\ \int_{-r}^{0} d_\vartheta \eta(\vartheta)\, \widetilde{x}(t+\vartheta), & r < t < \Delta, \end{cases}$$

$$(H_\Delta \widetilde{\varphi})(t) = \begin{cases} \int_{-r}^{-t} d_\vartheta \eta(\vartheta)\, \widetilde{\varphi}(t+\vartheta) - \int_{-r}^{0} d_\vartheta \eta(\vartheta)\, \widetilde{\varphi}(\vartheta), & 0 \le t < r, \\ -\int_{-r}^{0} d_\vartheta \eta(\vartheta)\, \widetilde{\varphi}(\vartheta), & r \le t < \Delta, \end{cases}$$

$D_\Delta : \mathbb{C}_0([0,\Delta], \mathbb{R}^n) \to \mathbb{C}_0([0,\Delta], \mathbb{R}^n)$, $H : \mathbb{C}_0([-r,0], \mathbb{R}^n) \to \mathbb{C}_0([0,\Delta], \mathbb{R}^n)$ — линейные непрерывные операторы. Разрешимость уравнения (3.1) связана с существованием оператора $(I - D_\Delta)^{-1}$. Из доказательства теоремы 2.1 следует вывод.

Следствие 3.1. *При любом $\Delta > 0$ существует линейный непрерывный вольтерровый по Тихонову оператор*

$$(I - D_\Delta)^{-1} : C_0([0,\Delta], \mathbb{R}^n) \to C_0([0,\Delta], \mathbb{R}^n).$$

Решение уравнения (3.1) определяется формулой

$$\widetilde{x}(t) = \widetilde{x}_{\widetilde{\varphi}}^{\Delta}(t) + \widetilde{x}_{\widetilde{h}_\Delta}^{\Delta}(t), \quad t \in [0,\Delta],$$

где

$$\widetilde{x}_{\widetilde{\varphi}}^{\Delta} = (I - D_\Delta)^{-1} H_\Delta \widetilde{\varphi},$$
$$\widetilde{x}_{\widetilde{h}_\Delta}^{\Delta} = (I - D_\Delta)^{-1} \widetilde{h}_\Delta.$$

Здесь функция $\widetilde{x}_{\widetilde{h}_\Delta}^{\Delta}$ является непрерывным решением уравнения (1.1) на отрезке $[0,\Delta]$ с начальной функцией $\varphi = 0$ и непрерывной неоднородностью $h = \widetilde{h}_\Delta$, удовлетворяющей условию $\widetilde{h}_\Delta(0) = 0$, т. е. $\widetilde{h}_\Delta \in C_0([0,\Delta], \mathbb{R}^n)$; функция $\widetilde{x}_{\widetilde{\varphi}}^{\Delta}$ является решением уравнения (1.1) на отрезке $[0,\Delta]$ с непрерывной начальной функцией $\varphi = \widetilde{\varphi}$, удовлетворяющей условию $\widetilde{\varphi}(0) = 0$, т. е. $\widetilde{\varphi} \in C_0([-r,0], \mathbb{R}^n)$, и неоднородностью h, определяемой формулой $h(t) = h(0) = -\int_{-r}^{0} d_\vartheta \eta(\vartheta)\, \widetilde{\varphi}(\vartheta)$, $t \in [0,\Delta]$.

Используя формулу представления линейного непрерывного оператора в пространстве непрерывных функций [13, с. 556], запишем

$$\widetilde{x}_{\widetilde{\varphi}}^{\Delta}(t) = \int_{-r}^{0} dT(t,s,\Delta)\, \widetilde{\varphi}(s), \quad t \in [0,\Delta], \tag{3.2}$$

$$\widetilde{x}_{\widetilde{h}_\Delta}^{\Delta}(t) = \int_{0}^{\Delta} dS(t,s,\Delta)\, \widetilde{h}_\Delta(s), \quad t \in [0,\Delta], \tag{3.3}$$

где $T(t,-r,\Delta)=0$, $S(t,\Delta,\Delta)=0$ при $0\le t\le\Delta$; $\sup\limits_{0\le t\le\Delta}\operatorname*{var}\limits_{s\in[-r,0]}T(t,s,\Delta)<\infty$, $\sup\limits_{0\le t\le\Delta}\operatorname*{var}\limits_{s\in[0,\Delta]}S(t,s,\Delta)<\infty$; при любом $0<\Delta'\le\Delta$ функции $\int_0^{\Delta'}T(t,s,\Delta)\,ds$, $\int_0^{\Delta'}S(t,s,\Delta)\,ds$ непрерывны по t на отрезке $[0,\Delta]$.

Так как $\widetilde{x}^{\Delta}_{\widetilde{\varphi}},\widetilde{x}^{\Delta}_{\widetilde{h}_\Delta}\in C_0([0,\Delta],\mathbb{R}^n)$ при любых $\widetilde{\varphi}\in C_0([-r,0],\mathbb{R}^n)$ и $\widetilde{h}_\Delta\in C_0([0,\Delta],\mathbb{R}^n)$, то $T(0,s,\Delta)=0$ и $S(0,s,\Delta)=0$ при $s\in[0,\Delta]$.

Из вольтерровости оператора $(I-D_\Delta)^{-1}$ и формулы (3.3) следует, что

$$\widetilde{x}^{\Delta}_{\widetilde{h}_\Delta}(t)=\int_0^t dS(t,s,\Delta)\,\widetilde{h}_\Delta(s),\quad t\in[0,\Delta]. \tag{3.4}$$

При использовании формулы (3.4) считаем, что $S(t,s,\Delta)=0$ при $s\in[t,\Delta]$.

Лемма 3.1. *Функции T и S не зависят от Δ.*

Доказательство. Для $\Delta'>\Delta$ $\widetilde{x}^{\Delta'}_{\widetilde{\varphi}}(t)=\widetilde{x}^{\Delta}_{\widetilde{\varphi}}(t)$, $\widetilde{x}^{\Delta'}_{\widetilde{h}_{\Delta'}}(t)=\widetilde{x}^{\Delta}_{\widetilde{h}_\Delta}(t)$ при $t\in[0,\Delta]$, если $\widetilde{h}_{\Delta'}=\widetilde{h}_\Delta$ при $t\in[0,\Delta]$. Следовательно,

$$\int_{-r}^0 d\left(T(t,s,\Delta)-T(t,s,\Delta')\right)\widetilde{\varphi}(s)=0,$$
$$\int_0^t d\left(S(t,s,\Delta)-S(t,s,\Delta')\right)\widetilde{h}_\Delta(s)=0$$

при любых $\widetilde{\varphi}\in C_0([-r,0],\mathbb{R}^n)$, $\widetilde{h}_\Delta\in C_0([0,\Delta],\mathbb{R}^n)$. Тогда $T(t,s,\Delta)=T(t,s,\Delta')=T(t,s)$ при $s\in[-r,0]$, $t\in[0,\Delta]$; $S(t,s,\Delta)=S(t,s,\Delta')=S(t,s)$ при $s\in[0,t]$, $t\in[0,\Delta]$. Лемма доказана.

Так как функции T и S не зависят от выбора отрезка $[0,\Delta]$, то можно найти решения $x_{\widetilde{\varphi}}$ и $x_{\widetilde{h}}$ уравнения (1.1) на полуоси $[0,\infty)$. Решение $x_{\widetilde{\varphi}}$ уравнения (1.1) с непрерывной начальной функцией $\varphi=\widetilde{\varphi}$, удовлетворяющей условию $\widetilde{\varphi}(0)=0$, и неоднородностью h, определяемой формулой $h(t)=h(0)=-\int_{-r}^0 d_\vartheta\eta(\vartheta)\,\widetilde{\varphi}(\vartheta)$, $t\in[0,\infty)$, задается формулой

$$x_{\widetilde{\varphi}}(t)=\int_{-r}^0 dT(t,s)\,\widetilde{\varphi}(s),\quad t\ge 0, \tag{3.5}$$

где $T(t,-r)=0$ при $t\ge0$; $T(0,s)=0$ при $s\in[-r,0]$, при любом $\tau>0$ $\sup\limits_{0\le t<\tau}\operatorname*{var}\limits_{s\in[-r,0]}T(t,s)<\infty$ и функция $\int_0^\tau T(t,s)\,ds$ непрерывна по t на полуинтервале $[0,\infty)$. Решение $x_{\widetilde{h}}$ уравнения (1.1) с начальной функцией $\varphi=0$ и неоднородностью $\widetilde{h} \in C_0([0,\Delta],\mathbb{R}^n)$ задается формулой

$$x_{\widetilde{h}}(t) = \int_0^t dS(t,s)\,\widetilde{h}(s), \quad t \geq 0, \tag{3.6}$$

где $S(t,s) = 0$ при $0 \leq t \leq s < \infty$, $S(0,s) = 0$ при $s \geq 0$; при любом $\tau > 0$ $\sup\limits_{0\leq t\leq\tau} \operatorname*{var}\limits_{s\in[0,t]} S(t,s) < \infty$ и функция $\int_0^\tau S(t,s)\,ds$ непрерывна по t на полуинтервале $[0,\infty)$.

Лемма 3.2. *Функция S зависит от разности аргументов.*

Доказательство. Продолжаем функции $x_{\widetilde{h}}$ и $\widetilde{h}$ на отрицательную полуось, полагая $x_{\widetilde{h}}(t) = 0$, $\widetilde{h}(t) = 0$ при $t < 0$. Для произвольного числа $\tau < 0$ функция $x_{\widetilde{h}}(\tau + \bullet)$ является решением уравнения

$$x(t) = \int_{-r}^0 d_s\eta(s)\,x(t+s) + \widetilde{h}(t+\tau), \quad t \geq 0,$$

и находится с помощью формулы (3.6), т. е.

$$x_{\widetilde{h}}(t+\tau) = \int_0^t dS(t,s)\,\widetilde{h}(s+\tau), \quad t \geq 0.$$

С другой стороны, используя формулу (3.6), находим

$$x_{\widetilde{h}}(t+\tau) = \int_0^{t+\tau} dS(t+\tau,s)\,\widetilde{h}(s), \quad t \geq 0.$$

Отсюда при $t \geq -\tau$ имеем

$$\int_0^{t+\tau} dS(t+\tau,s)\,\widetilde{h}(s) = \int_{-\tau}^t dS(t+\tau,s+\tau)\,\widetilde{h}(s+\tau) = \int_{-\tau}^t dS(t,s)\,\widetilde{h}(s+\tau).$$

Из последнего равенства следует, что $S(t+\tau,s+\tau) = S(t,s)$ при $-\tau \leq s \leq t$. Пользуясь свободой выбора числа τ, полагаем $\tau = -s$. Получим $S(t,s) = S(t-s,0) = S(t-s)$ при $0 \leq s \leq t$. При $s \geq t$ полагаем $S(t,s) = S(t-s) = 0$. Лемма доказана.

Согласно доказанной лемме

$$x_{\widetilde{h}}(t) = \int_0^t dS(t-s)\,\widetilde{h}(s), \quad t \geq 0, \tag{3.7}$$

где $S(t) = 0$ при $t \leq 0$; S — функция с ограниченной вариацией на любом конечном отрезке, принадлежащем множеству $[0,\infty)$.

Теорема 3.1. *Пусть h и φ — непрерывные вектор-функции, выполнено условие согласования* (1.2), *матричная функция η имеет ограниченную вариацию на $[-r,0]$ и $\eta(0)=\eta(-0)=0$. Тогда непрерывное решение начальной задачи Коши допускает представление*

$$x(t)=\varphi(0)+\int_{-r}^{0}dT(t,s)\,\widetilde{\varphi}(s)+\int_{0}^{t}dS(t-s)\,\widetilde{h}(s),\quad t\geq 0,$$

где $\widetilde{\varphi}(s)=\varphi(s)-\varphi(0)$, $s\in[-r,0]$; $\widetilde{h}(t)=h(t)-h(0)$, $t\geq 0$; $T(t,-r)=0$ при $t\geq 0$, $T(0,s)=0$ при $s\in[-r,0]$; $S(t)=0$ при $t\leq 0$; при любом $\tau>0$ $\sup\limits_{0\leq t\leq\tau}\operatorname*{var}\limits_{-r\leq s\leq 0}T(t,s)<\infty$, $\operatorname*{var}\limits_{0\leq t\leq\tau}S(t)<\infty$ и функция $\int_0^\tau T(t,s)\,ds$ непрерывна по t на полуинтервале $[0,\infty)$.

4. Уравнение для функции S

Получение представления (3.7) решения $x_{\widetilde{h}}$ уравнения (1.1) связано с нахождением функции S. Рассмотрим уравнение

$$S(t)+\frac{d}{dt}\int_{-r}^{0}\eta(\vartheta)\,S(t+\vartheta)\,d\vartheta+\eta(-r)\,S(t-r)+I_n=0. \tag{4.1}$$

Под решением уравнения (4.1) понимается матричная функция с ограниченной вариацией на любом конечном отрезке полуоси $[-r,+\infty)$, совпадающая с заданной функцией на отрезке $[-r,0]$ и удовлетворяющая уравнению (4.1) на множестве $(0,+\infty)$ почти всюду.

Теорема 4.1. *Функция S является решением уравнения* (4.1) *с начальной функцией $S(t)=0$ при $t\in[-r,0]$.*

Доказательство. Рассмотрим решения уравнения (1.1) с нулевыми начальными функциями и неоднородностями $h\in\mathbb{C}^2([0,+\infty),\mathbb{R}^n)$, $h(0)=\dot{h}(0)=0$. Такие решения определяются формулой (3.7), т. е.

$$x(t)=\int_{0}^{t}d_\tau S(t-\tau)\,h(\tau)=-\int_{0}^{t}d_\tau S(\tau)\,h(t-\tau),\quad t\geq 0. \tag{4.2}$$

Из формулы (4.2), применив формулу интегрирования по частям и учитывая, что $h(0)=0$ и $S(0)=0$, находим

$$x(t)=-\int_{0}^{t}S(\tau)\,\dot{h}_\tau(t-\tau)\,d\tau,\quad t\geq 0. \tag{4.3}$$

Применяя формулу интегрирования по частям к полученному интегралу и учитывая, что $\dot{h}(0) = 0$, имеем

$$x(t) = \int_0^t \int_t^\tau S(t-s)\, ds\ddot{h}_{\tau\tau}(\tau)\, d\tau, \quad t \geq 0. \tag{4.4}$$

Согласно предложению 2.1 производная рассматриваемого решения x существует и удовлетворяет уравнению (2.8) в случае $k = 1$. Искомое решение $\dot{x}$ уравнения (2.8) с нулевой начальной функцией определяется формулой (4.2) с неоднородностью $\widetilde{h} = \dot{h}$, т. е.

$$\dot{x}(t) = -\int_0^t d_\tau S(\tau)\, \dot{h}(t-\tau), \quad t \geq 0.$$

Интегрируя по частям, получим

$$\dot{x}(t) = -\int_0^t S(t-\tau)\, \ddot{h}(\tau)\, d\tau, \quad t \geq 0. \tag{4.5}$$

Для функции h справедливо представление

$$h(t) = \int_0^t (t-\tau)\, \ddot{h}(\tau)\, d\tau, \quad t \geq 0. \tag{4.6}$$

Преобразуем интеграл в правой части уравнения (1.1), используя формулу интегрирования по частям и условие $\eta(0) = 0$,

$$\int_{-r}^0 d_\vartheta \eta(\vartheta)\, x(t+\vartheta) = -\eta(-r)\, x(t-r) - \int_{-r}^0 \eta(\vartheta)\, \dot{x}(t+\vartheta)\, d\vartheta, \quad t \geq 0. \tag{4.7}$$

Из (4.4) и (4.5) имеем

$$x(t-r) = \int_0^{t-r} \int_{t-r}^\tau S(t-r-s)\, ds\ddot{h}(\tau)\, d\tau, \quad t \geq 0,$$
$$\dot{x}(t+\vartheta) = \int_0^{t+\vartheta} S(t+\vartheta-\tau)\, \ddot{h}(\tau)\, d\tau, \quad t \geq 0, \quad \vartheta \in [-r, 0].$$

После подстановок представлений функций $x(t-r)$ и $\dot{x}(t+\vartheta)$, $t \geq 0$, $\vartheta \in [-r, 0]$ в (4.7) меняем порядок интегрирования во втором интеграле. В результате получим

$$\int_{-r}^0 d_\vartheta \eta(\vartheta)\, x(t+\vartheta) = -\eta(-r) \int_0^{t-r} \int_{t-r}^\tau S(t-r-s)\, ds\ddot{h}(\tau)\, d\tau +$$
$$+ \int_0^t \int_{-r}^0 \eta(\vartheta)\, S(t+\vartheta-\tau)\, d\vartheta \ddot{h}(\tau)\, d\tau. \tag{4.8}$$

Подставим (4.4), (4.6) и (4.8) в исходное уравнение (1.1):

$$\int_0^t \int_t^\tau S(t-s)\,ds\ddot{h}(\tau)\,d\tau = -\eta(-r)\int_0^t \int_{t-r}^\tau S(t-r-s)\,ds\ddot{h}(\tau)\,d\tau +$$
$$+\int_0^t \int_{-r}^0 \eta(\vartheta)\,S(t+\vartheta-\tau)\,d\vartheta\ddot{h}(\tau)\,d\tau - \int_0^t (\tau-t)\,\ddot{h}(\tau)\,d\tau, \quad t \geq 0. \tag{4.9}$$

Равенство (4.9) должно выполняться для любой функции $\ddot{h} \in \mathbb{C}([0,\infty),\mathbb{R}^n)$. Следовательно,

$$\int_t^\tau S(t-s)\,ds = -\eta(-r)\int_{t-r}^\tau S(t-r-s)\,ds + \int_{-r}^0 \eta(\vartheta)\,S(t+\vartheta-\tau)\,d\vartheta +$$
$$+(t-\tau)\,I_n, \quad 0 \leq \tau \leq t.$$

При помощи замены переменных получим равенство

$$-\int_0^t S(\xi)\,d\xi = \eta(-r)\int_0^{t-r} S(\zeta)\,d\zeta +$$
$$+\int_{-r}^0 \eta(\vartheta)\,S(t+\vartheta)\,d\vartheta + tI_n, \quad t \geq 0. \tag{4.10}$$

Поскольку левая часть, первое и третье слагаемые правой части равенства (4.10) — абсолютно непрерывные функции на любом отрезке полуоси $[0,\infty)$, то функция $\int_{-r}^0 \eta(\vartheta)\,S(t+\vartheta)\,d\vartheta$ является абсолютно непрерывной на любом отрезке полуоси $[0,\infty)$. Продифференцировав по t равенство (4.10), получим, что функция S с ограниченной вариацией на любом отрезке полуоси $[-r,\infty)$ является решением уравнения (4.1). Теорема доказана.

Предложение 4.1. *В случае абсолютно непрерывной функции η функция S является единственным решением уравнения*

$$S(t) = \int_{-r}^0 \eta'(\vartheta)\,S(t+\vartheta)\,d\vartheta - I_n, \quad t > 0, \tag{4.11}$$

с начальной функцией $S(t) = 0$ при $t \in [-r,0]$. Это решение непрерывно на множестве $(0,\infty)$.

Доказательство. Преобразуем уравнение (4.1):

$$S(t) = -\eta(-r)\,S(t-r) - \left(-\eta(-r)\,S(t-r) - \int_{t-r}^t \eta'(s-t)\,S(s)\,ds\right) - I_n =$$
$$= \int_{-r}^0 \eta'(\vartheta)\,S(t+\vartheta)\,d\vartheta - I_n, \quad t > 0.$$

Следовательно, функция S с ограниченным изменением на любом отрезке полуоси $[-r,\infty)$ является решением уравнения (4.11).

На полуинтервале $0<t\le r$ уравнение (4.11) принимает вид

$$S(t)=\int_{t-r}^{t}\eta'(s-t)\,S(s)\,ds-I_n=\int_{0}^{t}\eta'(s-t)\,S(s)\,ds-I_n. \qquad (4.12)$$

Рассмотрим линейный оператор $(T_0S)(t)=\int_{-t}^{0}\eta'(\vartheta)\,S(t+\vartheta)\,d\vartheta$, $t\in(0,r]$. Он переводит пространство $L_\infty\left((0,r],\mathbb{R}^{n\times n}\right)$ в себя и является ограниченным. Поэтому в этом пространстве уравнение (4.12) является уравнением Вольтерра второго рода и имеет единственное решение [14, с. 45]. Это решение совпадает с искомым решением с ограниченным изменением на полуинтервале $(0,r]$.

Пусть мы нашли решение уравнения (4.11) при $0<t\le kr$ (k — натуральное число). Тогда на полуинтервале $kr<t\le(k+1)\,r$ уравнение (4.11) преобразуется к виду

$$S(t)=\int_{kr}^{t}\eta'(s-t)\,S(s)\,ds+\int_{t-r}^{kr}\eta'(s-t)\,S(s)\,ds-I_n. \qquad (4.13)$$

Линейный оператор $(T_kS)(t)=\int_{kr-t}^{0}\eta'(\vartheta)\,S(t+\vartheta)\,d\vartheta$, $t\in(kr,(k+1)\,r]$, переводит пространство $L_\infty\left((kr,(k+1)\,r],\mathbb{R}^{n\times n}\right)$ в себя и является ограниченным. Поэтому в этом пространстве уравнение (4.13) — уравнение Вольтерра второго рода и имеет единственное решение. Это решение совпадает с искомым решением с ограниченным изменением на полуинтервале $(kr,(k+1)\,r]$.

Оператор T_0 переводит пространство $\mathbb{C}\left([0,r],\mathbb{R}^{n\times n}\right)$ в себя и является ограниченным. Поэтому решение уравнения (4.12) непрерывно. Пусть решение уравнения (4.11) непрерывно при $0<t\le kr$. Тогда в уравнении (4.13) неоднородность $f_k(t)=\int_{-r}^{kr-t}\eta'(\vartheta)\,S(t+\vartheta)\,d\vartheta$ непрерывна на $[kr,(k+1)\,r]$, оператор T_k переводит пространство $\mathbb{C}\left([kr,(k+1)\,r],\mathbb{R}^{n\times n}\right)$ в себя и является ограниченным. Поэтому решение уравнения (4.13) непрерывно. Из (4.11) следует, что построенное решение непрерывно стыкуется с предыдущим. Предложение доказано.

Уравнения (4.12) и (4.13) принадлежат к классу уравнений восстановления. Методы решения таких уравнений изложены в работе [2].

Пример 4.1. *Дано однородное скалярное уравнение* (1.1) *с функцией* $\eta(\vartheta)=\sin(\vartheta)$, $\vartheta\in[-\pi,0]$, *и* $r=\pi$.

Уравнение (4.11) имеет вид

$$S(t)=\int_{-\pi}^{0}\cos(\vartheta)\,S(t+\vartheta)\,d\vartheta-1,\quad t>0. \qquad (4.14)$$

При $0 < t \le \pi$ преобразуем это уравнение:

$$S(t) = \int_0^t \cos(y-t)\, S(y)\, dy - 1.$$

Полученное интегральное уравнение равносильно дифференциальному уравнению

$$\frac{d^2}{dt^2} S(t) = \frac{d}{dt} S(t) - S(t) - 1$$

с начальными условиями

$$\frac{d}{dt} S(+0) = S(+0) = -1.$$

Решая начальную задачу, находим

$$S(t) = -1 - \frac{2\sqrt{3}}{3} e^{\frac{1}{2}t} \sin\left(\frac{\sqrt{3}}{2} t\right). \tag{4.15}$$

При $\pi < t < \infty$ уравнение (4.14) эквивалентно дифференциальному уравнению с запаздыванием

$$S''(t) - S'(t) + S(t) = S'(t-\pi) - 1 \tag{4.16}$$

с известной начальной функцией (4.15) и начальными условиями

$$S(\pi + 0) = S(\pi - 0), \quad \frac{d}{dt} S(\pi + 0) = \frac{d}{dt} S(\pi - 0) - 1.$$

Решение этого уравнения ищется методом шагов [15]. На полуинтервале $(\pi, 2\pi]$ уравнение (4.16) эквивалентно уравнению

$$S''(t) - S'(t) + S(t) = -e^{\frac{1}{2}(t-\pi)} \left(\frac{\sqrt{3}}{3} \sin\left(\frac{\sqrt{3}}{2}(t-\pi)\right) + \cos\left(\frac{\sqrt{3}}{2}(t-\pi)\right)\right) - 1$$

с начальными условиями

$$S(\pi + 0) = -1 - \frac{2\sqrt{3}}{3} e^{\frac{1}{2}\pi} \sin\left(\frac{\sqrt{3}}{2}\pi\right),$$

$$\frac{d}{dt} S(\pi + 0) = -e^{\frac{1}{2}\pi} \left(\frac{\sqrt{3}}{3} \sin\left(\frac{\sqrt{3}}{2}\pi\right) + \cos\left(\frac{\sqrt{3}}{2}\pi\right)\right) - 1.$$

Решение последнего уравнения имеет вид

$$S(t) = -1 - \frac{2\sqrt{3}}{3} e^{\frac{1}{2}t} \sin\left(\frac{\sqrt{3}}{2}t\right) + \left(\frac{1}{3}(t-\pi) - \frac{1}{4}\right) e^{\frac{1}{2}(t-\pi)} \cos\left(\frac{\sqrt{3}}{2}(t-\pi)\right) +$$
$$+ \frac{\sqrt{3}}{3}\left(-t + \pi - \frac{8}{3}\right) e^{\frac{1}{2}(t-\pi)} \sin\left(\frac{\sqrt{3}}{2}(t-\pi)\right).$$

Пусть η является матричной функцией скачков с конечным числом точек разрыва, определяемой формулой

$$\eta(\vartheta) = \sum_{m=1}^{N} A_m 1(\vartheta_m - \vartheta), \quad \vartheta \in [-r, 0], \quad -r \le \vartheta_N < \cdots < \vartheta_1 < 0, \tag{4.17}$$

где $1(t) = \begin{cases} 0, & t < 0, \\ 1, & t \ge 0, \end{cases}$ $A_m(m = \overline{1, N})$ — заданные постоянные матрицы.

Предложение 4.2. *Если η — матричная функция скачков с конечным числом точек разрыва (4.17), то функция S является единственным решением разностного уравнения с непрерывным временем*

$$S(t) = -\sum_{m=1}^{N} A_m S(t + \vartheta_m) - I_n, \quad t > 0, \tag{4.18}$$

с начальной функцией $S(t) = 0$ при $t \in [-r, 0]$. Это решение S — матричная функция скачков с конечным числом точек разрыва на произвольном отрезке положительной полуоси.

Доказательство. Подставим выражение (4.17) в уравнение (4.1) и преобразуем входящий в него интеграл:

$$\int_{-r}^{0} \eta(\vartheta) S(t + \vartheta) d\vartheta = \sum_{m=1}^{N} A_m \int_{t-r}^{t+\vartheta_m} S(s) ds, \quad t > 0.$$

Уравнение (4.1) принимает вид

$$S(t) = -\sum_{m=1}^{N} A_m S(t - r) - \sum_{m=1}^{N} A_m \frac{d}{dt} \int_{t-r}^{t+\vartheta_m} S(s) ds - I_n =$$
$$= -\sum_{m=1}^{N} A_m S(t + \vartheta_m) - I_n, \quad t > 0.$$

Следовательно, искомая функция S имеет ограниченную вариацию на любом отрезке положительной полуоси и удовлетворяет уравнению (4.18). Уравнение (4.18) является матричным стационарным разностным уравнением с непрерывным временем. Поэтому при заданной (нулевой) начальной функции оно имеет единственное решение. Требуемое решение можно найти методом шагов [2].

Из методов шагов следует, что функция S кусочно постоянна и непрерывна слева. Ее точки разрыва принадлежат множеству

$$\left\{t:\ t=\sum_{m=1}^{N} i_m\left|\vartheta_m\right|,\quad \sum_{m=1}^{N} i_m\geq 1,\quad i_m\geq 0,\quad m=\overline{1,N}\right\}.$$

Предложение доказано.

При выполнении условий предложения 4.1 матричная функция S может быть описана формулой

$$S(t)=\sum_{m=0}^{\infty} S_m\left(1-1\left(t_m-t\right)\right), \tag{4.19}$$

где $0=t_0<t_1<\cdots<t_{m-1}<t_m<\ldots$, $\{t_m\}_0^{\infty}$ — множество точек разрыва функции S; S_m $(m\geq 0)$ — постоянные матрицы, которые находятся при решении уравнения (4.18).

Пример 4.2. *Рассмотрим стационарное разностное уравнение с непрерывным временем*

$$x(t)=Ax(t-1)+h(t),\quad t>0,$$

где A — постоянная матрица размера $n\times n$.

Это уравнение можно записать в форме (1.1) с функцией η:

$$\eta(\vartheta)=\begin{cases}0, & -1<\vartheta\leq 0,\\ -A, & \vartheta=-1,\end{cases}$$

и $r=1$. Здесь η — матричная функция скачков: $N=1$, $\vartheta_1=-1$, $A_1=-A$.

Уравнение (4.18) имеет вид

$$S(t)=AS(t-1)-I_n,\quad t>0.$$

Используя метод шагов, находим

$$S(t)=-\sum_{k=0}^{m-1} A^k,\quad m-1<t\leq m,$$

где m — произвольное натуральное число. Здесь $t_0=0$, $t_m=m$, $m=1,2,\ldots$, $S_0=-I_n$, $S_m=-A^m$, $m=1,2,\ldots$.

5. Связь функций S и T

Найдем функцию T.

Теорема 5.1. *Функция T определяется формулой*

$$T(t,s)=\frac{d}{ds}\int_{-r}^{s}S(t-s+\vartheta)(\eta(\vartheta)-\eta(-r))\,d\vartheta,\quad s\in(-r,0),\quad t\geq 0. \tag{5.1}$$

Доказательство. Пусть $\widetilde{\varphi}\in\mathbb{C}^2([-r,0],\mathbb{R}^n)$, а $x_{\widetilde{\varphi}}$ — решение с этой начальной функцией. Это решение при $t>0$ совпадает с решением $x_{\widetilde{h}}$, где $\widetilde{h}$ определяется формулами

$$\widetilde{h}(t)=h_1(t)-\int_{-r}^{0}d_\vartheta\eta(\vartheta)\,\widetilde{\varphi}(\vartheta),\quad t\geq 0, \tag{5.2}$$

$$h_1(t)=\begin{cases}\int_{-r}^{-t}d_\vartheta\eta(\vartheta)\,\widetilde{\varphi}(t+\vartheta), & t\in[0,r],\\ 0, & t>r.\end{cases}$$

Преобразуем h_1 на отрезке $[0,r]$:

$$h_1(t)=-\eta(-r)\,\widetilde{\varphi}(t-r)-\int_{-r}^{-t}\eta(\vartheta)\,\widetilde{\varphi}'(t+\vartheta)\,d\vartheta,\quad t\in[0,r],$$

или

$$h_1(t)=-\int_{-r}^{-t}[\eta(\vartheta)-\eta(-r)]\,\widetilde{\varphi}'(t+\vartheta)\,d\vartheta,\quad t\in[0,r].$$

Следовательно,

$$\widetilde{h}'(t)=-(\eta(-r)-\eta(-t))\,\widetilde{\varphi}'(0)+\int_{-r}^{-t}(\eta(-r)-\eta(\vartheta))\,\widetilde{\varphi}''(\vartheta+t)\,d\vartheta,\quad t\in[0,r].$$

Подставив $\widetilde{h}'$ в формулу (4.3) и поменяв порядок интегрирования, получим

$$x_{\widetilde{h}}(t)=\int_{0}^{r}S(t-\tau)(\eta(-r)-\eta(-\tau))\,d\tau\,\widetilde{\varphi}'(0)-$$
$$-\int_{-r}^{0}\int_{0}^{s+r}S(t-\tau)(\eta(-r)-\eta(s-\tau))\,d\tau\,\widetilde{\varphi}''(s)\,ds,\quad t\geq 0. \tag{5.3}$$

Преобразуем формулу, определяющую решение (3.5):

$$x_{\widetilde{\varphi}}(t)=-\int_{-r}^{0}T(t,\tau)\,\widetilde{\varphi}'(\tau)\,d\tau=-\int_{-r}^{0}T(t,\tau)\,d\tau\,\widetilde{\varphi}'(0)+$$
$$+\int_{-r}^{0}\int_{-r}^{s}T(t,\tau)\,d\tau\,\widetilde{\varphi}''(s)\,ds,\quad t\geq 0. \tag{5.4}$$

Решения (5.3) и (5.4) совпадают. Это возможно тогда и только тогда, когда выполнены условия

$$\int_{-r}^{0} T(t,\tau)\,d\tau = -\int_{0}^{t} S(t-\tau)\,(\eta(-r)-\eta(-\tau))\,d\tau, \tag{5.5}$$

$$\int_{-r}^{s} T(t,\tau)\,d\tau = -\int_{0}^{s+r} S(t-\tau)\,(\eta(-r)-\eta(s-\tau))\,d\tau, \tag{5.6}$$

$$s\in[-r,0], \quad t\geq 0.$$

Равенство (5.5) является следствием (5.6) при $s=0$. Следовательно, дифференцируя (5.6) по s и делая замену переменной, получаем искомую формулу (5.1). Теорема доказана.

Предложение 5.1. *Если η — матричная функция скачков с конечным числом точек разрыва* (4.17), *то функция T представима в виде*

$$T(t,s) = -\sum_{m=1}^{N}\sum_{k=0}^{\infty} 1\,(s-\vartheta_m)\,S_k\,(1-1\,(t_k-t+s-\vartheta_m))\,A_m,$$
$$s\in(-r,0), \quad t\geq 0. \tag{5.7}$$

Доказательство. Подставим выражение (4.17) в уравнение (5.1) для T и будем преобразовывать полученное равенство. Применяя свойства функции $1\,(\cdot)$ и замену переменных, получим

$$T(t,s) = \frac{d}{ds}\int_{-r}^{s} S(t-s+\vartheta)\sum_{m=1}^{N}(A_m 1\,(\vartheta_m-\vartheta)-1)\,d\vartheta =$$
$$= -\sum_{m=1}^{N}\frac{d}{ds}\left[1\,(s-\vartheta_m)\int_{t-s+\vartheta_m}^{t} S(z)\,dz\right]A_m = 1\,(s-\vartheta_m)\,S(t-s+\vartheta_m).$$

Используя представление (4.19) функции S, получим искомое представление (5.7). Предложение доказано.

Пример 5.1. *Рассмотрим стационарное разностное уравнение с непрерывным временем*

$$x(t) = Ax(t-1)+h(t), \quad t>0,$$

где A — постоянная матрица размера $n\times n$.

В примере 4.2 было установлено, что $r = 1$, $N = 1$, $\vartheta_1 = -1$, $A_1 = -A$, $t_0 = 0$, $t_k = k$, $k = 1, 2, \ldots$, $S_0 = -I_n$, $S_k = -A^k$, $k = 1, 2, \ldots$. Тогда представление (5.7) функции T на полуинтервале $(m-1, m]$ (m — натуральное число) имеет вид

$$T(t,s) = -\sum_{k=0}^{\infty} 1(s+1)\, A^k \left(1 - 1(k - t + s + 1)\right) A =$$
$$= -\sum_{k=0}^{\infty} A^{k+1} \left(1 - 1(k - t + s + 1)\right) = -\sum_{k=0}^{m-1} A^k A = -\sum_{k=0}^{m-1} A^{k+1}.$$

Предложение 5.2. *В случае абсолютно непрерывной функции η функция T представима в виде*

$$T(t,s) = \int_0^{s+r} S(t-\tau)\, \eta'(s-\tau)\, d\tau, \quad s \in (-r, 0), \quad t \geq 0. \tag{5.8}$$

Доказательство. Преобразовав (5.1), получим

$$T(t,s) = -S(t-s-r)\,\eta(-r) + \frac{d}{ds}\int_0^{s+r} S(t-\tau)\,\eta(s-\tau)\, d\tau =$$
$$= \int_0^{s+r} S(t-\tau)\,\eta'(s-\tau)\, d\tau.$$

Предложение доказано.

Пример 5.2. *Дано однородное скалярное уравнение* (1.1) *с функцией* $\eta(\vartheta) = \sin(\vartheta)$, $\vartheta \in [-\pi, 0]$, *и* $r = \pi$.

Формула (5.8) имеет вид

$$T(t,s) = \int_0^{s+r} S(t-\tau) \cos(s-\tau)\, d\tau.$$

Учитывая вид (4.15) функции S на полуинтервале $(0, \pi]$, полученный в примере 4.1, имеем

$$T(t,s) = -\frac{2\sqrt{3}}{3} e^{\frac{1}{2}(t-s-\pi)} \sin\left(\frac{\sqrt{3}}{2}(t-s-\pi)\right) + \frac{\sqrt{3}}{6} e^{\frac{1}{2}t} \cos\left(s - \frac{\sqrt{3}}{2}t\right) -$$
$$- \sin s + \frac{\sqrt{3}}{6} e^{\frac{1}{2}t} \cos\left(s + \frac{\sqrt{3}}{2}t\right) + \left(\frac{1}{2} - \frac{\sqrt{3}}{3}\right) e^{\frac{1}{2}t} \sin\left(s + \frac{\sqrt{3}}{2}t\right) +$$
$$+ \left(\frac{\sqrt{3}}{3} + \frac{1}{2}\right) e^{\frac{1}{2}t} \sin\left(s - \frac{\sqrt{3}}{2}t\right), \quad 0 < t \leq \pi, \quad s \in (-\pi, 0).$$

Литература

1. Мышкис А. Д. Линейные дифференциальные уравнения с запаздывающим аргументом. М.: Наука, 1972.
2. Беллман Р., Кук К. Л. Дифференциально-разностные уравнения. М.: Мир, 1967.
3. Хейл Дж. Теория функционально-дифференциальных уравнений. М.: Мир, 1984.
4. Колмановский В. Б., Носов В. Р. Устойчивость и периодические режимы регулируемых систем с последействием. М.: Наука, 1981.
5. Долгий Ю. Ф., Леонтьева Т. В. Устойчивость разностных систем с непрерывным временем. Екатеринбург, 1984. Деп. в ВИНИТИ 06.07.84, №4765-84.
6. Близоруков М. Г. К вопросу о построении решений линейных разностных систем с непрерывным временем // Дифференциальные уравнения. 1996. Т. 32, №1. С. 127–128.
7. Миролюбов А. А., Солдатов М. А. Линейные неоднородные разностные уравнения. М.: Наука, 1986.
8. Халанай А., Векслер Д. Качественная теория импульсных систем. М.: Мир, 1971.
9. Гельфонд А. О. Исчисление конечных разностей. М.: Наука, 1972.
10. Тихонов А. Н. О функциональных уравнениях типа Вольтерра и их применении к некоторым задачам математической физики // Бюл. МГУ. Секция А. 1938. Т. 1, №8. С. 1–25.
11. Натансон И. П. Теория функций вещественной переменной. М.: Наука, 1950.
12. Канторович Л. В., Акилов Г. П. Функциональный анализ. М.: Наука, 1977.
13. Данфорд Н., Шварц Дж. Линейные операторы. Общая теория. М.: Мир, 1962.
14. Забрейко П. П., Кошелев А. И., Красносельский М. А. и др. Интегральные уравнения. М.: Наука, 1968.
15. Эльсгольц Л. Э., Норкин С. Б. Введение в теорию дифференциальных уравнений с отклоняющим аргументом. М.: Наука, 1971.

Статья поступила 18.09.2001 г.