УДК 517.977.55

Л. А. Сазанова

УСТОЙЧИВОСТЬ ОПТИМАЛЬНОГО СИНТЕЗА В ЛИНЕЙНЫХ ДИСКРЕТНЫХ СИСТЕМАХ ПРИ ЗАПАЗДЫВАНИИ СИГНАЛОВ ОБРАТНОЙ СВЯЗИ*

1. Постановка задачи

Дискретные процессы управления приобрели большое значение в теории и практике оптимального управления. В частности, многие задачи экономического планирования, технологии и организации производства, исследования операций описываются разностными уравнениями, поскольку на практике часто и получение информации о состоянии процесса, и управление процессом осуществляются в дискретные моменты времени, по шагам. Важным классом задач дискретного управления являются задачи, в которых процесс представлен линейными уравнениями. Кроме того, в управляемой системе возможно наличие запаздывания [1, с. 216]; такая ситуация часто возникает при управлении экономическими системами, системами с распределенными параметрами.

В данной работе рассматривается задача о приведении линейной дискретной системы в заданное конечное состояние при условии минимума квадратичного по управлению функционала и наличии запаздывания в сигналах обратной связи (задача, подобная указанной, но при другом критерии качества, была рассмотрена в [2]). Кроме того, доказана устойчивость построенного оптимального синтеза к помехам в каналах обратной связи.

Пусть система первых разностей

$$x(k+1) = A\,x(k) + Bu(k), \quad k = k_0,\, k_0+1, \dots, N-1, \tag{1.1}$$

описывает поведение управляемого процесса, где $x \in \mathbb{R}_n$ — вектор фазовых координат; $u \in \mathbb{R}_m$ — вектор управляющих сил; $A_{n\times n}$ и $B_{n\times m}$ — постоянные матрицы. Система (1.1) предполагается вполне управляемой [3, с. 138]. Заданы момент начала процесса $k = k_0$ и исходное состояние $x(k_0) = x_0$, а также момент $k = N$ окончания процесса управления системой (1.1) и желаемое конечное состояние $x(N) = x_1$.

*Работа выполнена при финансовой поддержке РФФИ, грант №0001-00753.

Проблема состоит в определении оптимального управления u^0, конструируемого по принципу обратной связи [3, с. 251] $\big($т. е. в виде функции $u = u(k, x)\big)$ и приводящего систему (1.1) из $x(k_0) = x_0$ в $x(N) = x_1$, минимизируя величину

$$I\big[u\big] = \sum_{k=k_0}^{N-1} u^\top\big(k, x(k)\big)\, u\big(k, x(k)\big), \tag{1.2}$$

каково бы ни было допустимое управление $u = u\big(k, x(k)\big)$, приводящее систему (1.1) в заданное конечное состояние за время $N - k_0$.

Предполагается также, что в каждый текущий момент времени k, $k_0 \le k \le N - 1$, в управляющее устройство подается недостаточная информация о текущем состоянии объекта. А именно имеет место запаздывание h, $0 < h < N - k_0 - 1$, которое исключает возможность точного задания в регулятор состояния объекта $x(k)$, причем запаздывание предполагается не зависящим от управления u.

Уточним постановку задачи. Будем рассматривать процесс $x(k)$ на отрезке времени $k_0 \le k \le N$ $(N < \infty)$. В момент $k = k_0$ точно известно начальное состояние системы $x(k_0) = x_0$. При $k_0 \le k \le N - 1$ в регуляторе известны значения величин $x(k-h)$ и $u(k+l)$, $-h \le l < 0$ (при $k - k_0 \ge h$) или величин $u(l)$, $k_0 \le l < k$ (при $k - k_0 < h$). Эти величины позволят спрогнозировать состояние объекта в момент k. Обозначим

$$\lambda(k) = \begin{cases} x(k_0),\, u(l) \quad (k_0 \le l < k) \;\text{ при }\; k - k_0 < h; \\ x(k-h),\, u(k+l) \;\; (-h \le l < 0) \;\text{ при }\; k \ge h. \end{cases} \tag{1.3}$$

Таким образом, оптимальное управление u^0 есть величина, зависящая от k и известной информации $\lambda(k)$: $u^0 = u^0\big(k; \lambda(k)\big)$. Заметим, что родственная задача для системы дифференциальных уравнений, подверженной влиянию вероятностных факторов, рассматривалась в [4].

2. Построение оптимального управления

Решение поставленной задачи находим, используя метод, предложенный в [4, с. 1030]. Построение оптимального управления при этом будем проводить в три этапа:

1) решаем задачу о приведении системы (1.1) из $x(k_0) = x_0$ в $x(N) = x_1$ при условии (1.2) оптимальным управлением, построенным по принципу обратной связи, но в случае, когда запаздывание сигналов в каналах обратной связи отсутствует; находим оптимальное управление $u^0\big(k, x(k)\big)$;

2) решаем задачу о прогнозе $x^*\left(k\middle|\ \lambda(k)\right) = x^*(k)$ величин $x(k)$ на время $\Delta k = h$ при $k - k_0 \geq h$ и на время $\Delta k = k - k_0$ при $k - k_0 < h$, используя доступную информацию $\lambda(k)$;

3) оптимальное управление для первоначальной задачи получается из построенного в п. 1 $u^0\big(k,\, x(k)\big)$ введением в закон управления вместо неизвестных величин $x(k)$ их прогноза $x^*(k)$.

Рассмотрим подробнее реализацию предложенного метода. Оптимальное управление по принципу обратной связи, решающее задачу, аналогичную поставленной, но без запаздывания, имеет вид [5]

$$u^0\big(k,\, x(k)\big) = S^\top(k)\, \mathcal{D}^+(k)\, c\big(k,\, x(k)\big), \quad k = k_0,\, k_0 + 1, \ldots, N-1, \tag{2.1}$$

где

$$c\big(k,\, x(k)\big) = x_1 - A^{N-k}x(k),\ S(k) = A^{N-k-1}B,\ \mathcal{D}(k) = \sum_{i=k}^{N-1} S(i)\, S^\top(i). \tag{2.2}$$

Здесь $\mathcal{D}(k)$ — симметрическая неотрицательно определенная матрица размерности $n \times n$; $\mathcal{D}^+(k)$ — матрица, псевдообратная к ней. Согласно [6, с. 276],

$$\mathcal{D}^+(k) = \sum_{i=1}^{r} \lambda_i^{-1}\, v_i\, v_i^\top, \tag{2.3}$$

где $\lambda_1 \geq \ldots \geq \lambda_r > 0$ — собственные числа матрицы $\mathcal{D}(k)$; $v_1, \ldots, v_r$ — отвечающие им ортонормированные собственные векторы.

Замечание 2.1. В указанных обозначениях оптимальное программное управление [3, с. 251] может быть найдено по формуле

$$u^0(k) = S^\top(k)\, \mathcal{D}^+(k_0)\, c\big(k_0,\, x_0\big) \quad (k = k_0,\, k_0 + 1, \ldots, N-1). \tag{2.4}$$

Кроме того, на оптимальном движении $x^0(k)$ системы (1.1) справедливы равенства [5]

$$u^0(k) = u^0\big(k,\, x^0(k)\big) = S^\top(k)\, \mathcal{D}^+(k)\, c\big(k,\, x^0(k)\big) \quad (k = k_0,\, k_0 + 1, \ldots, N-1). \tag{2.5}$$

Для решения задачи о прогнозе, т. е. для нахождения предполагаемого состояния системы (1.1) $x^*\left(k\middle|\ \lambda(k)\right) = x^*(k)$ в каждый текущий момент времени k, $k_0 < k < N-1$, по известной информации $\lambda(k)$ (1.3) поступаем следующим образом.

В момент $k = k_0$ начальное состояние системы (1.1) $x(k_0) = x_0$ нам известно точно, следовательно, $x^*(k_0) = x(k_0)$ и

$$u^0\big(k_0,\, x^*(k_0)\big) = u^0\big(k_0,\, x(k_0)\big) = S^\top(k_0)\, \mathcal{D}^+(k_0)\, c\big(k_0,\, x(k_0)\big).$$

Зная $x(k_0)$ и $u^0\big(k_0,\, x^*(k_0)\big)$, находим прогнозируемое состояние $x^*(k_0+1)$ системы (1.1) в момент k_0+1, используя которое, строим оптимальное управление на следующем шаге, и т. д.

Пусть $k < k_0 + h$. Построив описанным способом управления $u^0\big(l,\, x^*(l)\big)$, $k_0 \le l \le k-1$, и используя дискретный аналог формулы Коши [7, с. 51], получаем прогнозируемое состояние системы (1.1) в k-й момент времени:

$$x^*(k) = A^{k-k_0}x(k_0) + \sum_{l=k_0}^{k-1} A^{k-l-1}Bu^0\big(l,\, x^*(l)\big). \tag{2.6}$$

Пусть теперь $k \ge k_0 + h$; тогда в регулятор начинает с запаздыванием поступать информация о реализовавшемся «k шагов назад» состоянии системы (1.1). Величина $\lambda(k)$, согласно (1.3), имеет компоненты

$$\lambda(k) = \Big\{\, x(k-h),\, u^0\big(k+l,\, x^*(k+l)\big) \;\; (-h \le l < 0)\,\Big\}\,,$$

где $u^0\big(k+l,\, x^*(k+l)\big)$ уже найдены с использованием предыдущей информации. В этом случае прогнозируемое состояние системы (1.1) в k-й момент имеет вид

$$x^*(k) = A^h x(k-h) + \sum_{l=-h}^{-1} A^{-(l+1)}Bu^0(k+l,\, x^*(k+l)). \tag{2.7}$$

Полученное таким образом $x^*(k)$ подставляем в (2.1) и находим $u^0\big(k,\, x^*(k)\big)$.

Замечание 2.2. Очевидно, что в обеих ситуациях прогнозируемое состояние системы (1.1) $x^*(k)$ совпадает с действительным ее состоянием: $x^*(k) = x^0(k)$. Другими словами, если бы запаздывания в каналах обратной связи не было и известная реализация состояния $x^0(k)$ сразу поступала в регулятор, то величины оптимального управляющего воздействия были бы теми же и лишь находились бы без использования промежуточной операции прогнозирования. Сказанное следует, в частности, из того, что $x^*(k_0) = x^0(k_0)$ и $u^0\big(k_0,\, x^*(k_0)\big) = u^0\big(k_0,\, x^0(k_0)\big)$. Равенства же

$$x^*(k) = x^0(k)\,;\;\; u^0\big(k,\, x^*(k)\big) = u^0\big(k,\, x^0(k)\big), \quad k_0 < k \le N-1,$$

нетрудно доказать индуктивными рассуждениями, учитывая (2.1) и (2.4).

Как мы увидим далее, указанное совпадение будет нарушено, если информация $\lambda(k)$ (1.3) передается в регулятор не точно.

3. Устойчивость оптимального синтеза к помехам в каналах обратной связи

Предположим, что сигналы обратной связи, доставляющие в регулятор информацию о реализовавшихся значениях фазового вектора x в каждый текущий момент времени k, сопровождаются помехами $p(k)$ и возмущенное движение $y(k)$ управляемого объекта является решением системы первых разностей

$$y(k+1) = A\,y(k) + B\,u^0\bigl(k,\, y^*(k) + p(k)\bigr), \quad k = k_0,\, k_0+1, \ldots, N-1, \tag{3.1}$$

при начальном условии

$$y(k_0) = x_0 + p(k_0). \tag{3.2}$$

Здесь, как и раньше, предполагается наличие запаздывания h, а через $y^*(k)$ обозначена величина прогнозируемого состояния системы (3.1) в k-й момент.

Определение. Оптимальный синтез $u^0\bigl(k,\, x(k)\bigr)$ (2.1) в задаче с запаздыванием будем называть *устойчивым* при постоянно действующих возмущениях, если для любого $\varepsilon > 0$ можно указать $\delta = \delta(\varepsilon) > 0$ такое, что возмущенное движение $y(k)$ системы (3.1), порождаемое начальным условием (3.2), при всех k, $k_0 \le k \le N$, удовлетворяет неравенству

$$\bigl\|y(k) - x^0(k)\bigr\| < \varepsilon, \tag{3.3}$$

если только

$$\|p(k)\| < \delta \quad (k_0 \le k \le N-1). \tag{3.4}$$

Здесь под $x^0(k)$, $k_0 \le k \le N$, будем понимать оптимальную траекторию невозмущенной системы (1.1) при условии, что движение порождается оптимальным программным управлением $u^0(k)$ (2.4) и запаздывание отсутствует. Таким образом, в силу равенства (2.5), $x^0(k)$ есть решение системы

$$x^0(k+1) = Ax^0(k) + BS^\top(k)\mathcal{D}^+(k)\,c\bigl(k,\, x^0(k)\bigr) \tag{3.5}$$

при начальном условии $x(k_0) = x_0$.

Известно [5], что в случае отсутствия запаздывания в системе (3.1) оптимальный синтез $u^0\bigl(k,\, x(k)\bigr)$, (2.1) устойчив к помехам в каналах обратной связи. Более того, при выполнении условий (3.3), (3.4) справедливо неравенство

$$\Bigl\|u^0(k) - u^0\bigl(k,\, y(k) + p(k)\bigr)\Bigr\| < \varepsilon \quad (k_0 \le k \le N-1), \tag{3.6}$$

где, в силу замечания 2.1, $u^0(k) = u^0\bigl(k,\, x(k)\bigr)$.

Прежде чем перейти к доказательству устойчивости в нашем случае, обратим внимание на следующее важное обстоятельство. В каждый текущий момент времени k нам известна реализация управляющего воздействия

$$u^0\big(k,\, y^*(k)+p(k)\big) = S^\top(k)\,\mathcal{D}^+(k)\,\Big(x_1 - A^{N-k}\big(y^*(k)+p(k)\big)\Big), \qquad (3.7)$$
$$k = k_0,\, k_0+1, \dots, N-1,$$

но мы не знаем саму величину помехи $p(k)$, известно лишь, что ее норма удовлетворяет ограничению (3.4). Поэтому при $k < k_0 + h$ реально мы располагаем лишь информацией об $x(k_0)$ а также об $u^0\big(k_0,\, y^*(k_0)+p(k_0)\big)$, $u^0\big(k_0+1,\, y^*(k_0+1)+p(k_0+1)\big), \dots,\ u^0\big(k-1,\, y^*(k-1)+p(k-1)\big)$. Следовательно, для нахождения прогнозируемого состояния системы (3.1) при указанных значениях k имеем право использовать лишь величину $x(k_0) = x_0$ и реализовавшиеся управления.

Геометрически это можно представить так: при прогнозировании мы стартуем из точки x_0 — центра шара радиуса δ, хотя на самом деле движение начинается из некоторой неизвестной управляющему устройству точки $\big(x_0+p(k_0)\big)$ этого шара. Исключение представляет лишь момент $k = k_0$, так как добавляющаяся в управлении к x_0 помеха $p(k_0)$ делает прогноз реализацией, а управление — оптимальным:

$$u^0\big(k_0,\, y^*(k_0)+p(k_0)\big) = S^\top(k)\,\mathcal{D}^+(k)\,\Big(x_1 - A^{N-k_0}\big(x_0+p(k_0)\big)\Big).$$

При остальных значениях k, $k_0 < k < k_0 + h$, во-первых, в регулятор передается такое $y^*(k)$, как если бы мы реально стартовали из точки x_0, а во-вторых, добавляется помеха $p(k)$. Следовательно, реализующееся управление $u^0\big(k,\, y^*(k)+p(k)\big)$ не является оптимальным.

При $k \geq k_0 + h$ ситуация немного лучше в том смысле, что становится точно известно состояние системы (3.1) в момент $k-h$. Значит, прогнозируемое $y^*(k)$ совпадает с реализацией состояния системы $y(k)$ и неоптимальность управления $u^0\big((k,\, y^*(k)+p(k)\big)$ есть следствие лишь действия помехи $p(k)$.

Итак, прогноз состояния при различных k имеет следующий вид:

$$y^*(k) = \begin{cases} A^{k-k_0}x(k_0) \;+\; \sum\limits_{l=k_0}^{k-1} A^{k-l-1}Bu^0\big(l,\, y^*(l)+p(l)\big) \\ \qquad\qquad \text{при}\ \ k_0 \leq k < k_0+h, \\ A^h y(k-h) \;+\; \sum\limits_{l=-h}^{-1} A^{-l-1}Bu^0\big(k+l,\, y^*(k+l)+p(k+l)\big) \\ \qquad\qquad \text{при}\ \ k_0+h \leq k \leq N-1. \end{cases} \qquad (3.8)$$

Справедлива

Теорема 3.1. *Оптимальный синтез* $u^0(k, x^*) = S^\top(k)\mathcal{D}^+(k)\, c\big(k, x^*(k)\big)$, $k = k_0, k_0+1, \ldots, N-1$, *в задаче с запаздыванием устойчив при постоянно действующих возмущениях, ограниченных в каждый момент времени.*

Доказательство. Будем доказывать справедливость трех утверждений: для произвольно малого заданного $\varepsilon > 0$ существует $\delta = \delta(\varepsilon) > 0$ такое, что при условии (3.4) выполняются неравенства:

(1_k) $\big\|y(k) - x^0(k)\big\| \le \varepsilon$, т. е. состояние системы (3.1) в каждый k-й момент сколь угодно мало отличается от соответствующей точки оптимальной программной траектории системы (1.1);

(2_k) $\big\|y^*(k) - x^0(k)\big\| \le \varepsilon$, т. е. аналогичное утверждение справедливо и для прогноза $y^*(k)$;

(3_k) $\Big\|u^0(k) - u^0\big(k, y^*(k) + p(k)\big)\Big\| \le \varepsilon \quad (k_0 \le k \le N-1)$ — неравенство, подобное (3.6), но при наличии запаздывания.

Доказательство проведем, используя метод математической индукции.

База индукции. При $k = k_0$ $\big\|y(k_0) - x^0(k_0)\big\| = \|p(k_0)\|$, и достаточно взять $\delta(\varepsilon) = \varepsilon$. Кроме того, в силу (3.8) при $k = k_0$, $\big\|y^*(k_0) - x^0(k_0)\big\| = 0$. Наконец, учитывая (2.1) и (3.7), находим

$$\Big\|u^0(k_0) - u^0\big(k, y^*(k_0) + p(k_0)\big)\Big\| \le \big\|S^\top(k_0)\mathcal{D}^+(k_0)\big\| \cdot \big\|A^{N-k_0}\big\| \cdot \|p(k_0)\| \le$$
$$\le FM\|p(k_0)\| \le FM\delta = \varepsilon,$$

если выбрано $\delta = \varepsilon/(FM)$. Здесь введены следующие обозначения:

$$F = \max_{k_0 \le k \le N-1}\Big(\big\|S^\top(k)\big\| \cdot \big\|\mathcal{D}^+(k)\big\|\Big) > 0, \quad M = \max_{k_0 \le k \le N-1}\big\|A^{N-k}\big\|.$$

Итак, база индукции выполняется.

Шаг индукции. Будем считать, что для всех k таких, что $k_0 \le k \le q < N$, предположение индукции об устойчивости оптимального синтеза $u^0(k, x)$ верно и справедливы неравенства (1_k)–(3_k). Докажем справедливость этих высказываний для $k = q+1$. Рассмотрим две ситуации.

С и т у а ц и я 1. Пусть $q < h$. Из (3.5), (3.1) и (3.7) получаем

$$y(q+1) - x^0(q+1) = A\big(y(q) - x^0(q)\big) - BS^\top(q)\mathcal{D}^+(q)A^{N-q}\big(y^*(q) - x^0(q) + p(q)\big). \tag{3.9}$$

В силу индуктивного предположения для любого $\varepsilon_1 > 0$ можно указать $\delta_1 = \delta_1(\varepsilon_1)$ такое, что из неравенства $\|p(k)\| < \delta_1,\ k_0 \le k \le q$, следует справедливость неравенств (1_k)–(3_k) для всех k таких, что $k_0 \le k \le q$. Тогда при произвольно малом $\varepsilon > 0$, взяв $\varepsilon_1 = \min\Big\{\varepsilon/(3M),\ \varepsilon/\big(3\|B\|FM\big)\Big\}$, находим $\delta_1(\varepsilon_1) = \delta_1$. Из (3.9), полагая $\delta = \delta(\varepsilon) = \min\Big\{\delta_1,\ \varepsilon/\big(3\|B\|FM\big)\Big\}$, получаем

$$\big\|y(q{+}1)-x^0(q{+}1)\big\| \le \|A\|\cdot\big\|y(q)-x^0(q)\big\|+\|B\|\,FM\Big(\big\|y^*(q)-x^0(q)\big\|+\|p(q)\|\Big)\le$$
$$\le M\varepsilon_1 + \|B\|FM\varepsilon_1 + \|B\|FM\delta \le \varepsilon$$

при условии $\|p(k)\| < \delta \quad (k_0 \le k \le q)$.

Докажем аналогичное неравенство для $y^*(q+1)$. Учитывая (3.8), имеем

$$y^*(q+1) = A^{q+1-k_0}x_0 + \sum_{l=k_0}^{q} A^{q-l}Bu^0\big(l,\, y^*(l)+p(l)\big);$$
$$x^0(q+1) = A^{q+1-k_0}x_0 + \sum_{l=k_0}^{q} A^{q-l}Bu^0(l).$$

В силу предположения индукции

$$\big\|y^*(q+1)-x^0(q+1)\big\| \le \sum_{l=k_0}^{q}\|A^{q-l}\|\cdot\|B\|\cdot\Big\|u^0\big(l,\, y^*(l)+p(l)\big)-u^0(l)\Big\| \le$$
$$\le \|B\|\,M(q-k_0+1)\,\varepsilon_2 \le \varepsilon$$

при $\varepsilon_2 = \varepsilon/\big(\|B\|M(q-k_0+1)\big),\ \delta = \delta_2$.

Наконец, докажем неравенство (3_{q+1}). В самом деле, в силу (2.5), (3.7) и уже доказанного (2_{q+1}), для любого $\varepsilon_2 > 0$ существует $\delta_2 = \delta_2(\varepsilon_2)$ такое, что

$$\Big\|u^0(q+1)-u^0\big(q+1,\, y^*(q+1)+p(q+1)\big)\Big\| \le$$
$$\le \big\|S^\top(q{+}1)\big\|\cdot\big\|\mathcal{D}^+(q{+}1)\big\|\cdot\big\|A^{N-q-1}\big\|\,\big(\|x^0(q{+}1)-y^*(q{+}1)\|+\|p(q{+}1)\|\big)\le$$
$$\le FM\big(\varepsilon_2+\|p(q+1)\|\big),$$

если только $\|p(k)\| < \delta_2,\ k_0 \le k \le q$. Выбрав произвольное $\varepsilon > 0$ и взяв $\varepsilon_2 = \varepsilon/(2FM)$, находим δ_2. Теперь, полагая $\delta = \delta(\varepsilon) = \min\Big\{\varepsilon/(2FM),\ \delta_2\Big\}$, получаем справедливость неравенства

$$\Big\|u^0(q+1)-u^0\big(q+1,\, y^*(q+1)+p(q+1)\big)\Big\| \le \varepsilon$$

при условии $\|p(k)\| < \delta,\ k_0 \le k \le q+1,$ что и требовалось доказать.

С и т у а ц и я 2. Пусть $q \geq h$. Находя $y^*(q+1)$ теперь из нижней части формулы (3.8) и рассуждая так же, как и в ситуации 1, имеем

$$\big\|y(q+1) - x^0(q+1)\big\| \leq M\varepsilon_1 + \|B\|\,FM\,\big(\varepsilon_1 + \delta_1\big) \leq \varepsilon,$$

если при заданном $\varepsilon > 0$ выбрано $\varepsilon_1 = \min\Big\{\varepsilon/(3M),\, \varepsilon/\big(3\|B\|\,FM\,\big)\Big\}$ и $\delta = \min\Big\{\delta_1,\, \varepsilon/\big(3\|B\|\,FM\,\big)\Big\}$. Этим доказано неравенство (1_{q+1}).

Для $y^*(q+1)$ справедливо представление

$$y^*(q+1) = A^h y(q+1-h) + \sum_{l=-h}^{-1} A^{-l-1}Bu^0\big(q+1+l,\, y^*(q+1+l) + p(q+1+l)\big).$$

Согласно дискретному аналогу формулы Коши [7, с. 51]

$$x^0(q+1) = A^h x^0(q+1-h) + \sum_{l=-h}^{-1} A^{-l-1}Bu^0(q+1+l).$$

Отсюда получаем, что, в силу предположения индукции, для любого $\varepsilon_2 > 0$ найдется $\delta_2 = \delta_2(\varepsilon_2)$ такое, что

$$\big\|y^*(q+1) - x^0(q+1)\big\| \leq \big\|A^h\big\| \cdot \big\|y(q+1-h) - x^0(q+1-h)\big\| +$$
$$+ \sum_{l=-h}^{-1} \big\|A^{-l-1}\big\| \cdot \|B\| \cdot \Big\|u^0\big(q+1+l,\, y^*(q+1+l) + p(q+1+l)\big) - u^0(q+1+l)\Big\| \leq$$
$$\leq\ M\varepsilon_2 + M\|B\|h\,\varepsilon_2.$$

При $\varepsilon_2 = \min\Big\{\varepsilon/\big(2M\big),\, \varepsilon/\big(2\|B\|\,Mh\big)\Big\}$ и $\delta = \delta_2$ справедливо неравенство

$$\big\|y^*(q+1) - x^0(q+1)\big\| \leq\ \varepsilon,$$

т. е. неравенство (2_{q+1}).

Доказательство того, что при $q \geq h$ выполняется и неравенство (3_{q+1}), полностью повторяет рассуждения, сделанные в ситуации 1 для аналогичного неравенства.

Следствие 3.1. *При выполнении условий* (3.3) *и* (3.4) *справедливы неравенства*

$$\big\|y^*(k) - x^0(k)\big\| \leq\ \varepsilon,$$
$$\Big\|u^0(k) - u^0\big(k,\, y^*(k) + p(k)\big)\Big\| \leq \varepsilon \quad (k_0 \leq k \leq N-1)$$

для любого сколь угодно малого $\varepsilon > 0$.

4. Пример

Проиллюстрируем изложенное в §2 и 3 на следующем примере. Дана система

$$\begin{cases} x_1(k+1) \ = \ x_2(k), \\ x_2(k+1) \ = \ x_1(k) + u(k)\,, \quad k = 0,\, 1, \ldots,\, 6, \end{cases} \tag{4.1}$$

которую требуется привести из состояния $x(0) = x_0 = (1 \quad 1)^\top$ в состояние $x(7) = x_1 = (2 \quad 2)^\top$ оптимальным управлением $u^0\big(k,\, x^*(k)\big)$, минимизирующим функционал (1.2). При этом величина запаздывания сигналов в каналах обратной связи составляет $h = 3$. Предположим сначала, что возмущения отсутствуют.

4.1. Построение оптимального управления $u^0\big(k,\, x(k)\big)$

Систему (4.1) запишем следующим образом:

$$x(k+1) = A\,x(k) + B\,u(k),\ \ k = 0,\, 1, \ldots,\, 6,$$

где

$$A = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{bmatrix}, \qquad B = \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \end{bmatrix}, \qquad x(k) = \begin{bmatrix} x_1(k) \\ x_2(k) \end{bmatrix}, \quad u(k) \in \mathbb{R}.$$

Из вида матриц A и B, используя (2.2), находим

$$S(k) = A^{N-k-1}B = A^{6-k}B = \begin{cases} (0 \quad 1)^\top & \text{при} \ \ k = 0,\, 2,\, 4,\, 6; \\ (1 \quad 0)^\top & \text{при} \ \ k = 1,\, 3,\, 5. \end{cases}$$

При $k = 0, 1, \ldots, 5$ имеем $\mathcal{D}^+(k) = \mathcal{D}^{-1}(k)$. Исключение составляет лишь случай $k = 6$, когда $\mathcal{D}(6) = BB^\top = \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}$. Для нахождения $\mathcal{D}^+(6)$ используем формулу (2.3). Собственные числа матрицы $\mathcal{D}(6)$ суть $\lambda_1 = 0$ и $\lambda_2 = 1$. Последнему отвечает собственный вектор $V_2 = [0 \quad 1]^\top$, следовательно,

$$\mathcal{D}^+(6) = V_2\,V_2^\top = \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}.$$

Для простоты дальнейших вычислений составим следующую таблицу.

Таблица 1

k	$S^\top(k)\mathcal{D}^+(k)$	$S^\top(k)\mathcal{D}^+(0)$	$c\big(k, x^0(k)\big)$	$u^0(k) = u^0\big(k, x^0(k)\big)$	$x^0(k)$
0	$\big(0 \quad 1/4\big)$	$\big(0 \quad 1/4\big)$	$(1 \quad 1)^\top$	$1/4$	$(1 \quad 1)^\top$
1	$\big(1/3 \quad 0\big)$	$\big(1/3 \quad 0\big)$	$\big(1 \quad 3/4\big)^\top$	$1/3$	$\big(1 \quad 5/4\big)^\top$
2	$\big(0 \quad 1/3\big)$	$\big(0 \quad 1/4\big)$	$\big(2/3 \quad 3/4\big)^\top$	$1/4$	$\big(5/4 \quad 4/3\big)^\top$
3	$\big(1/2 \quad 0\big)$	$\big(1/3 \quad 0\big)$	$\big(2/3 \quad 1/2\big)^\top$	$1/3$	$\big(4/3 \quad 3/2\big)^\top$
4	$\big(0 \quad 1/2\big)$	$\big(0 \quad 1/4\big)$	$\big(1/3 \quad 1/2\big)^\top$	$1/4$	$\big(3/2 \quad 5/3\big)^\top$
5	$(1 \quad 0)$	$\big(1/3 \quad 0\big)$	$\big(1/3 \quad 1/4\big)^\top$	$1/3$	$\big(5/3 \quad 7/4\big)^\top$
6	$(0 \quad 1)$	$\big(0 \quad 1/4\big)$	$\big(0 \quad 1/4\big)^\top$	$1/4$	$\big(7/4 \quad 2\big)^\top$
7	—	—	—	—	$(2 \quad 2)^\top$

Как видно из таблицы, использование формул (2.4) и (2.1) дает один и тот же результат, т. е. оптимальное управление по принципу обратной связи $u^0\big(k,\, x^0(k)\big)$ совпадает с программным $u^0(k)$. Проводя вычисления в соответствии с формулами (2.6), (2.7), нетрудно убедиться, что

$$x^*(k) = x^0(k), \quad u^0\big(k,\, x^*(k)\big) = u^0\big(k,\, x^0(k)\big), \ k = 0, 1, \ldots, 6.$$

4.2. Устойчивость оптимального синтеза

Покажем, что оптимальный синтез $u^0\big(k,\, x^*(k)\big)$ устойчив к помехам в каналах обратной связи. Пусть задано произвольно малое значение $\varepsilon > 0$. Предположим, что в момент $k = 0$ на $x^0(0)$ и на управляющее воздействие $u^0\big(0,\, x^*(0)\big)$ оказывает влияние возмущение $p(0) = \big(p_1(0); p_2(0)\big)^\top$, причем $\|p(0)\| = \sqrt{p_1^2(0) + p_2^2(0)} \le \delta$, где $\delta = \delta(\varepsilon) > 0$ определим позже. Имеем

$$c\big(0,\, y^*(0)\big) = c\big(0,\, x_0 + p(0)\big) = x_1 - A^7\big(x_0 + p(0)\big) =$$
$$= \begin{bmatrix} 2 \\ 2 \end{bmatrix} - \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} 1 + p_1(0) \\ 1 + p_2(0) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 - p_2(0) \\ 1 - p_1(0) \end{bmatrix},$$
$$u\big(0;\, y^*(0)\big) = S^\top(0)\mathcal{D}^+(0)\, c\big(0,\, y^*(0)\big) = \big(1 - p_1(0)\big)/4\,,$$
$$y(1) = A\big(x_0 + p(0)\big) + Bu\big(0;\, y^*(0)\big) =$$
$$= \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} 1 + p_1(0) \\ 1 + p_2(0) \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 0 \\ \big(1 - p_1(0)\big)/4 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 + p_2(0) \\ 5/4 + 3p_1(0)/4 \end{bmatrix},$$
$$\big\|y(1) - x^0(1)\big\| = \sqrt{p_2^2(0) + 9p_1^2(0)/16} \le \|p(0)\| \le \delta.$$

Следовательно, $\|y(1) - x^0(1)\| \le \varepsilon$ при $\delta = \varepsilon$.

Рассмотрим момент времени $k = 1$. Учитывая возмущение $p(1)$ и то, что $k = 1 < 3$, получаем величину прогнозируемого состояния системы (3.1)

$$y^*(1) = Ax_0 + Bu\big(0;\, y^*(0) + p(0)\big) = \begin{bmatrix} 1 \\ 5/4 - p_1(0)/4 \end{bmatrix},$$

откуда находим

$$c\big(1,\, y^*(1) + p(1)\big) = x_1 - A^6\big(y^*(1) + p(1)\big) =$$

$$= \begin{bmatrix} 2 \\ 2 \end{bmatrix} - \begin{bmatrix} 1 + p_1(1) \\ 5/4 - p_1(0) + p_2(1) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 - p_1(1) \\ 3/4 + p_1(0)/4 - p_2(1) \end{bmatrix},$$

следовательно, реализация управляющего воздействия имеет вид

$$u\big(1;\, y^*(1) + p(1)\big) = S^\top(1)\mathcal{D}^+(1)\, c\big(1,\, y^*(1) + p(1)\big) = \frac{1}{3}\big(1 - p_1(1)\big).$$

Используя найденное управление, сдвигаемся в следующую точку:

$$y(2) = Ay(1) + Bu\big(1;\, y^*(1) + p(1)\big) = \begin{bmatrix} 5/4 + 3p_1(0)/4 \\ 4/3 + p_2(0) - p_1(1)/3 \end{bmatrix}.$$

При этом норма разности между текущим состоянием возмущенной системы и соответствующей точкой оптимальной траектории невозмущенной системы составляет

$$\|y(2) - x^0(2)\| = \sqrt{9p_1^2(0)/16 + \big(p_2(0) - p_1(1)\big)^2} \le$$

$$\le \sqrt{p_1^2(0) + p_2^2(0) - 2p_2(0)p_1(1)/3 + p_1^2(1)/9} \le$$

$$\le \sqrt{\|p(0)\|^2 + |p_2(0)| \cdot |p_1(0)| + p_1^2(1)} \le \sqrt{\delta^2 + \delta \cdot \delta + \delta^2} = \sqrt{3}\,\delta.$$

Итак, $\|y(2) - x^0(2)\| \le \varepsilon$, если только $\delta = \varepsilon/\sqrt{3}$. Далее действуем аналогично при $k = 2, \ldots, 6$. Результаты вычислений представлены в табл. 2.

Вывод. Оптимальный синтез $u^0\big(k,\, x^*(k)\big)$ в системе (4.1) при наличии запаздывания устойчив к возмущениям в каналах обратной связи, если для любого сколь угодно малого $\varepsilon > 0$ выбрано $\delta = \varepsilon/6$ и возмущения $p(k)$, $k = 0,\, 1, \ldots,\, 6$, удовлетворяют условию $\|p(k)\| \le \delta$.

Следует обратить внимание на совпадение $y^*(k) = y(k)$ прогнозируемого значения состояния системы и реализации состояния при $k = 3, \ldots, 6$. Указанное равенство есть следствие того, что начиная с $k = 3$ реализация состояния в момент $k-h$ нам точно известна. При этом реализующиеся для $k \geq 3$ управления «нейтрализуют» влияние большинства накопленных ранее помех, в результате чего конечное значение $y(7)$ отличается по норме от заданного $x_1 = \begin{pmatrix} 2 & 2 \end{pmatrix}^\top$ не более чем на ε. Отличие вызвано лишь действием помех $p(6)$ и $p(5)$, ибо последняя не может быть устранена за один шаг в силу структуры матрицы A системы (4.1).

Таблица 2

k	Реализация, $y(k)$	Прогноз, $y^*(k)$	$u\big(k,\, y^*(k)+p(k)\big)$	$\delta(\varepsilon)$
0	$1+p_1(0)$ $1+p_2(0)$	1 1	$\big(1-p_1(0)\big)/4$	ε
1	$1+p_2(0)$ $5/4+3p_1(0)/4$	1 $5/4-p_1(0)/4$	$\big(1-p_1(1)\big)/3$	ε
2	$5/4+3p_1(0)/4$ $4/3+p_2(0)-p_1(1)/3$	$5/4-p_1(0)/4$ $4/3-p_1(1)/3$	$1/4+p_1(0)/12-$ $-p_1(2)/3$	$\varepsilon/\sqrt{3}$
3	$4/3+p_2(0)-p_1(1)/3$ $3/2+5p_1(0)/6-$ $-p_1(2)/3$	$4/3+p_2(0)-p_1(1)/3$ $3/2+5p_1(0)/6-$ $-p_1(2)/3$	$1/3-p_2(0)/2+$ $+p_1(1)/6-p_1(3)/2$	$\varepsilon/4$
4	$3/2+5p_1(0)/6-$ $-p_1(2)/3$ $5/3+p_2(0)/2-$ $-p_1(1)/6-p_1(3)/2$	$3/2+5p_1(0)/6-$ $-p_1(2)/3$ $5/3+p_2(0)/2-$ $-p_1(1)/6-p_1(3)/2$	$1/4-5p_1(0)/12+$ $+p_1(2)/6-p_1(4)/2$	$\varepsilon/5$
5	$5/3+p_2(0)/2-$ $-p_1(1)/6-p_1(3)/2$ $7/4+5p_1(0)/12-$ $-p_1(2)/6-p_1(4)/2$	$5/3+p_2(0)/2-$ $-p_1(1)/6-p_1(3)/2$ $7/4+5p_1(0)/12-$ $-p_1(2)/6-p_1(4)/2$	$1/3-p_2(0)/2+$ $+p_1(1)/6+p_1(3)/2-$ $-p_1(5)$	$\varepsilon/6$
6	$7/4+5p_1(0)/12-$ $-p_1(2)/6-p_1(4)/2$ $2-p_1(5)$	$7/4+5p_1(0)/12-$ $-p_1(2)/6-p_1(4)/2$ $2-p_1(5)$	$1/4-5p_1(0)/12+$ $+p_1(2)/6+p_1(4)/2-$ $-p_1(6)$	$\varepsilon/4$
7	$2-p_1(5)$ $2-p_1(6)$	—	—	$\varepsilon/2$

Примечание. Величина $\delta=\delta(\varepsilon)$ в каждый k-й момент времени определяется из условия $\big\|y(k)-x^0(k)\big\| \leq \varepsilon$.

Автор благодарит Э. Г. Альбрехта, своего научного руководителя, за постановку задачи и полезные обсуждения результатов работы.

Литература

1. Пропой А. И. Элементы теории оптимальных дискретных процессов. М.: Наука, 1973.

2. Фам Хыу Шак. Об оптимальном управлении дискретными системами с запаздыванием // Автоматика и телемеханика. 1970. Т. 31, вып. 7. С. 40–49.

3. Красовский Н. Н. Теория управления движением. М.: Наука, 1968.

4. Красовский Н. Н. Об оптимальном регулировании при запаздывании сигналов обратной связи // Автоматика и телемеханика. 1963. Т. 24, вып. 8. С. 1021–1036.

5. Sazanova L. A. Optimal control of linear discrete systems // Proc. of the Steklov Institute of Mathematics. Suppl. 2. 2000. P. S141–S157.

6. Воеводин В. В. Линейная алгебра. М.: Наука, 1980.

7. Габасов Р. Ф., Кириллова Ф. М. Оптимизация линейных систем. Минск: Изд-во БГУ им. В. И. Ленина, 1973.

Статья поступила 05.01.2002 г.