УДК 519.8

Е. А. Бердникова

ОЦЕНКА СКОРОСТИ СХОДИМОСТИ МЕТОДА ПОСЛЕДОВАТЕЛЬНОГО ПРОЕКТИРОВАНИЯ ДЛЯ ПЕРЕСЕЧЕНИЯ ДВУХ ЛИНЕЙНЫХ МНОГООБРАЗИЙ И ЕЕ ОБОБЩЕНИЯ*

1. Введение

В монографии [1] приводится анализ сходимости для широкого класса нестационарных фейеровских процессов, в частности, даны условия, при которых скорость сходимости этих методов имеет геометрический характер. В этой и других работах, например [2–4], получены также конкретные оценки скорости сходимости для методов проектирования при различных предположениях. В частности, в работах [3, 5] получены оценки скорости сходимости метода циклического проектирования применительно к системе линейных неравенств.

В настоящей работе такого рода оценки выводятся для метода циклического проектирования, примененного для отыскания общей точки двух линейных многообразий, а также для отыскания общей точки линейного многообразия и неотрицательного ортанта, т.е. для отыскания неотрицательного решения системы линейных уравнений. Последняя постановка является достаточно важной в прикладном отношении. В частности, к ней могут быть сведены многие вопросы анализа балансовых экономико-математических моделей, задач линейного программирования [2] и др.

2. Случай двух линейных многообразий

Пусть в n-мерном евклидовом пространстве даны два линейных многообразия L_1 и L_2 с непустым пересечением $M = L_1 \cap L_2$. Напомним, что отображение $\varphi : \mathbf{R}^n \to \mathbf{R}^n$ называется M-фейеровским, если

$$\varphi(y) = y, \quad \forall y \in M,$$

$$||\varphi(x) - y|| < ||x - y||, \quad \forall y \in M, \quad \forall x \notin M.$$

*Работа выполнена при поддержке РФФИ, гранты №00-15-96041, №01-01-00563.

Обозначим через $\pi_1(x)$ и $\pi_2(x)$ операторы проектирования на многообразия L_1 и L_2 соответственно. Тогда непрерывное отображение

$$\varphi(x) = \pi_2(\pi_1(x)) \tag{1}$$

будет M-фейеровским, а порожденная им последовательность

$$x^{(k+1)} = \varphi(x^{(k)}), \quad \text{где } x^{(0)} \text{ — произвольная начальная точка,} \tag{2}$$

либо принимает конечное число значений, либо сходится к некоторой точке из M [1, 5]. Для второго случая в [1] показана геометрическая скорость сходимости:

$$||x^{(k+1)} - M|| \leq \theta ||x^{(k)} - M||, \quad \theta \in (0,1), \tag{3}$$

для всех достаточно больших k. Нас будет интересовать случай, когда последовательность принимает бесконечное число значений, а именно вопрос оценки сверху параметра θ.

Пусть многообразия L_1 и L_2 заданы системами линейных уравнений

$$A_1 x = b_1 \quad \text{и} \quad A_2 x = b_2,$$

где матрицы A_1 и A_2 имеют полный ранг. Очевидно, что в рамках исследуемого вопроса можно считать системы однородными:

$$L_1 = \{x \in \mathbf{R}^n \mid A_1 x = 0\}, \quad L_2 = \{x \in \mathbf{R}^n \mid A_2 x = 0\}.$$

В этом случае L_1 и L_2 — линейные подпространства, а матрицы A_1, A_2 определяют базисы их ортогональных дополнений. Будем считать, что строки этих матриц ортогональны:

$$A_1 A_1^T = E_p, \quad A_2 A_2^T = E_q. \tag{4}$$

Рассмотрим для начала, насколько сильно оператор $\pi_1(\cdot)$ приближает точку z, лежащую в L_2, ко множеству M, то есть оценим сверху значение θ_1 такое, что

$$||\pi_1(z) - M|| \leq \theta_1 ||z - M||, \quad z \in L_2.$$

Пусть $\tilde{z}$ — ближайшая к z точка множества M. Путем линейной замены $z_1 = z - \tilde{z}$ перейдем к случаю, когда ближайшей к рассматриваемой точке точкой M будет ноль пространства $\mathbf{R}^n$, т.е. z_1 лежит в ортогональном дополнении к M: $z_1 \in M^\perp$. Не ограничивая общности будем полагать, что z лежит в $M^\perp$. В этом случае $||z - M|| = ||z||$. Легко показать, что для $z \in M^\perp \cap L_2$ точка $\pi_1(z)$ также будет лежать в $M^\perp$ и соответственно $||\pi_1(z) - M|| = ||\pi_1(z)||$.

Значение θ_1 такое, что

$$\|\pi_1(z)\| \le \theta_1 \|z\|, \quad z \in M^\perp \cap L_2,$$

может быть найдено как решение следующей оптимизационной задачи:

$$\theta_1 = \max\{\, \|\pi_1(z)\| : \|z\| = 1,\ z \in M^\perp \cap L_2 \,\},$$

или, что то же самое, задачи

$$\theta_1^2 = \max\{\, \|\pi_1(z)\|^2 : \|z\|^2 = 1,\ z \in M^\perp \cap L_2 \,\}. \tag{5}$$

Далее часть работы будет посвящена анализу и решению задачи (5).

Проведем серию эквивалентных преобразований указанной задачи.

Во-первых, заметим, что точки $z \in M^\perp \cap L_2$ — это точки, удовлетворяющие следующим двум условиям:

$$z = A_1^T u + A_2^T v,\ u \in \mathbf{R}^p,\ v \in \mathbf{R}^q \quad \text{и} \quad A_2 z = 0.$$

Подставляя первое равенство во второе и учитывая условие ортогональности матриц, получаем

$$0 = A_2^T z = A_2(A_1^T u + A_2^T v) = A_2 A_1^T u + A_2 A_2^T v = A_2 A_1^T u + v,$$

откуда

$$v = -A_2 A_1^T u.$$

Исходя из последнего соотношения, точки $z \in M^\perp \cap L_2$ будут иметь следующий вид:

$$z = (E - A_2^T A_2) A_1^T u, \quad u \in \mathbf{R}^p \text{ — произвольно.} \tag{6}$$

Во-вторых, привлечем формулу для вычисления оператора проектирования [2]:

$$\pi_1(z) = z - A_1^T (A_1 A_1^T)^{-1} A_1 z;$$

с учетом (4) она примет вид

$$\pi_1(z) = z - A_1^T A_1 z = (E - A_1^T A_1) z. \tag{7}$$

В итоге, в силу формул (6) и (7), задача (5) может быть переписана в следующем виде:

$$\theta_1^2 = \max\{\, \|(E - A_1^T A_1) z\|^2 : \|z\|^2 = 1,\ z = (E - A_2^T A_2) A_1^T u,\ u \in \mathbf{R}^p \,\}. \tag{8}$$

Отметим, что матрица $E - A_1^T A_1$ является симметрической, т.е.

$$(E - A_1^T A_1)^T = E - A_1^T A_1, \tag{9}$$

и идемпотентной, так как

$$(E - A_1^T A_1)(E - A_1^T A_1) = E - 2A_1^T A_1 + A_1^T A_1 = E - A_1^T A_1 \qquad (10)$$

вследствие условия (4) ортогональности матриц. Аналогично симметрической и идемпотентной будет матрица $E - A_2^T A_2$.

Преобразуем целевую функцию задачи (8) еще раз, воспользовавшись равенством (10), ограничением $||z||^2 = 1$ и равенствами (6),(4):

$$||(E - A_1^T A_1)z||^2 = z^T(E - A_1^T A_1)^T(E - A_1^T A_1)z = z^T(E - A_1^T A_1)z =$$

$$= ||z||^2 - z^T A_1^T A_1 z = 1 - u^T A_1(E - A_2^T A_2)^T A_1^T A_1(E - A_2^T A_2)A_1^T u =$$

$$= 1 - u^T \left(A_1(E - A_2^T A_2)A_1^T\right)^2 u = 1 - u^T \left(E - A_1 A_2^T A_2 A_1^T\right)^2 u.$$

Используем также представление (6) для преобразования ограничений задачи (8):

$$||z||^2 = z^T z = u^T A_1(E - A_2^T A_2)^T(E - A_2^T A_2)A_1^T u =$$

$$= u^T A_1(E - A_2^T A_2)A_1^T u = u^T(E - A_1 A_2^T A_2 A_1^T)u.$$

Положим далее

$$H = E - A_1 A_2^T A_2 A_1^T.$$

Вследствие последних выкладок задача (8) может бвіть переписана как

$$\theta_1^2 = \max\{\, (1 - u^T H^2 u) : \; u^T H u = 1, \; u \in \mathbf{R}^p \,\}. \qquad (11)$$

Далее воспользуемся равенством

$$\max_{u^T H u = 1}(1 - u^T H^2 u) \;=\; 1 \;-\; \min_{u^T H u = 1} u^T H^2 u$$

и преобразуем задачу (11) к виду

$$\eta_1 = \min\{\, u^T H^2 u : \; u^T H u = 1, \quad u \in \mathbf{R}^p \,\}. \qquad (12)$$

Воспользуемся теоремой о приведении симметрической матрицы к диагональной форме [6]: для матрицы H существует ортогональная матрица S такая, что

$$S^T H S = \Lambda = \begin{pmatrix} \lambda_1 & \dots & 0 \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & \dots & \lambda_p \end{pmatrix},$$

где $\lambda_1, \ldots, \lambda_p$ — собственные числа матрицы H. Следует отметить, что

$$S^T H^2 S = S^T H S S^T H S = \Lambda^2.$$

Сделав в задаче (12) замену переменных $w = Su$, перепишем ее в виде

$$\eta_1 = \min\{\, w^T \Lambda^2 w : \, w^T \Lambda w = 1, \quad w \in \mathbf{R}^p \,\},$$

т.е. в виде

$$\eta_1 = \min\{\, \sum_{i=1}^{p} \lambda_i^2 w_i^2 : \, \sum_{i=1}^{p} \lambda_i w_i^2 = 1 \,\}. \tag{13}$$

И наконец, заменой $w_i^2 = y_i$ задача (13) сводится к задаче линейного программирования

$$\eta_1 = \min\{\, \sum_{i=1}^{p} \lambda_i^2 y_i : \, \sum_{i=1}^{p} \lambda_i y_i = 1, \ \text{все } y_i \geq 0 \,\}. \tag{14}$$

Для того чтобы проанализировать разрешимость задачи (14), нам понадобится следующее утверждение.

Лемма. *Собственные числа матрицы $A_1 A_2^T A_2 A_1^T$ принадлежат отрезку $[0, 1]$. Кроме того, если собственные числа матрицы $A_1 A_2^T A_2 A_1^T$ либо все равны нулю, либо все равны единице, последовательность (2) конечна.*

Доказательство. Матрица $G = A_1 A_2^T A_2 A_1^T$ очевидным образом симметрическая и неотрицательно определенная, вследствие чего ее собственные числа, которые мы обозначим через μ_i, неотрицательны: $\mu_i \geq 0, \ i = 1, \ldots, p$. Таким образом, для доказательства леммы достаточно оценить эти числа сверху.

Известно [6], что для максимального из собственных чисел симметрической матрицы справедливо представление

$$\mu_{max} = \max\{\frac{y^T G y}{||y||^2} \mid y \neq 0\}. \tag{15}$$

Покажем, что $y^T G y \leq ||y||^2$ для всех $y \neq 0$.

Обозначим через $a_i^{(1)}$ $(i = 1, 2, \ldots, p)$ и $a_j^{(2)}$ $(j = 1, 2, \ldots, q)$ строки матриц A_1 и A_2 соответственно. По исходным предположениям каждая из систем $\{a_i^{(1)}\}_{i=1}^p$ и $\{a_i^{(2)}\}_{j=1}^q$ является ортонормированной системой векторов в пространстве $\mathbf{R}^n$. Дополним обе эти системы до базиса всего пространства: $\{a_i^{(1)}\}_{i=1}^n$ и $\{a_j^{(2)}\}_{j=1}^n$. Обозначим

$$\overline{A}_1 = \begin{pmatrix} a_1^{(1)} \\ \vdots \\ a_n^{(1)} \end{pmatrix}, \quad \overline{A}_2 = \begin{pmatrix} a_1^{(2)} \\ \vdots \\ a_n^{(2)} \end{pmatrix}.$$

Тогда $\overline{A}_1\overline{A}_1^T = E_n$, $\overline{A}_2\overline{A}_2^T = E_n$, и, следовательно $\overline{A}_1^T = \overline{A}_1^{-1}$, $\overline{A}_2^T = \overline{A}_2^{-1}$.

Положим $\overline{D} = \overline{A}_2\overline{A}_1^T$. Имеем $\overline{D}\ \overline{D}^T = \overline{A}_2\overline{A}_1^T\overline{A}_1\overline{A}_2^T = E_n$, т.е. матрица $\overline{D}$ ортогональная. Через $\overline{D}_l$, $l = 1, \dots, n$, обозначим столбцы матрицы $\overline{D}$.

Ортогональная матрица сохраняет расстояния [6], т.е. $||\overline{D}\bar{y}||^2 = ||\bar{y}||^2$ для всех $\bar{y} \in \mathbf{R}^n$. Возьмем в качестве $\bar{y}$ вектор вида

$$\bar{y} = (y, 0, \dots, 0)^T, \quad y \in \mathbf{R}^p.$$

Тогда $\overline{D}\bar{y} = Dy$, где $D = (\overline{D}_1, \dots, \overline{D}_p)$ — матрица, составленная из первых p столбцов матрицы $\overline{D}$. Пусть d_j обозначает j-ю строку матрицы D. Заметим, что

$$\begin{pmatrix} d_1 \\ \vdots \\ d_q \end{pmatrix} = A_2A_1^T.$$

Выполняется цепочка равенств

$$||Dy||^2 = ||\overline{D}\bar{y}||^2 = ||\bar{y}||^2 = ||y||^2,$$

таким образом, $||Dy||^2 = ||y||^2$. Тогда

$$||y||^2 = ||Dy||^2 = \sum_{i=1}^{n}(d_iy)^2 \geq \sum_{i=1}^{q}(d_iy)^2 = ||A_2A_1^Ty||^2,$$

т.е. неравенство $||y||^2 \geq ||A_2A_1^Ty||^2$ ввыполняется для всех $y \in \mathbf{R}^p$. Так как $y^TGy = ||A_2A_1^Ty||^2$, то $y^TGy \leq ||y||^2$ для всех y, и, исходя из формулы (15), $\mu_{max} \leq 1$. Первая часть леммы доказана.

Перейдем ко второй части. Рассмотрим случай, когда все собственные числа равны единице: $\mu_i = 1$, $i = 1, \dots, p$. Тогда по теореме о приведении симметрической матрицы к диагональному виду для матрицы $G = A_1A_2^TA_2A_1^T$ существует ортогональная матрица F: $FF^T = E_p$ такая, что $F^TGF = E_p$. Домножив это равенство слева на F и справа на F^T, получаем $G = E_p$.

Так как $G_{ii} = a_i^{(1)}A_2^TA_2a_i^{(1)^T}$, то для рассматриваемого случая

$$a_i^{(1)}A_2^TA_2a_i^{(1)^T} = 1 \tag{16}$$

для всех $i = 1, \ldots, p$. Разложив векторы $a_i^{(1)}$, $i = 1, \ldots, p$, по базису $\{a_j^{(2)}\}_{j=1}^n$, получим

$$a_i^{(1)} = \sum_{j=1}^{n} \gamma_{ij} a_j^{(2)}. \tag{17}$$

Строки матрицы A_1 ортонормированны, $\|a_i^{(1)}\| = 1$, и потому

$$\sum_{j=1}^{n} \gamma_{ij}^2 = 1. \tag{18}$$

Подсчитаем теперь произведение $a_i^{(1)} A_2^T$, подставляя вместо $a_i^{(1)}$ разложение (17) и учитывая взаимную ортогональность строк матрицы A_2:

$$a_i^{(1)} A_2^T = \left(\sum_{j=1}^{n} \gamma_{ij} a_j^{(2)} \right) ({a_1^{(2)}}^T, \ldots, {a_q^{(2)}}^T) = \sum_{j=1}^{q} \gamma_{ij} e_j.$$

Таким образом,

$$a_i^{(1)} A_2^T = \sum_{j=1}^{q} \gamma_{ij} e_j. \tag{19}$$

Соотношения (16), (19) порождают цепочку равенств

$$1 = a_i^{(1)} A_2^T A_2 {a_i^{(1)}}^T = \left(\sum_{j=1}^{q} \gamma_{ij} e_j \right) \left(\sum_{j=1}^{q} \gamma_{ij} e_j^T \right) = \sum_{j=1}^{q} \gamma_{ij}^2. \tag{20}$$

Таким образом, исходя из полученнвых соотношений (18) и (20), имеем следующее равенство:

$$\sum_{j=1}^{n} \gamma_{ij}^2 = \sum_{j=1}^{q} \gamma_{ij}^2,$$

откуда следует, что

$$\sum_{j=q+1}^{n} \gamma_{ij}^2 = 0$$

и, значит,

$$\gamma_{ij} = 0 \quad j = q+1, \ldots, n.$$

В итоге разложение (17) примет вид

$$a_i^{(1)} = \sum_{j=1}^{q} \gamma_{ij} a_j^{(2)},$$

что означает, что каждый из векторов $a_i^{(1)}$, $i = 1, \dots, p$, есть линейная комбинация векторов $\{a_j^{(2)}\}_{j=1}^q$. Это соответствует тому, что $L_2 \subset L_1$ и, следовательно, M совпадает с L_2, $\varphi(x)$ совпадает с $\pi_2(x)$ и $\varphi(x^{(0)})$ принадлежит $M = L_2$. Таким образом, последовательность (2) стабилизируется уже на первом шаге.

Если $\mu_i = 0$ для всех номеров i, то $G = 0$ и все скалярные произведения ${a_i^{(1)}}^T a_j^{(2)}$ равны нулю т.е. все векторы $\{a_i^{(1)}\}$ и $\{a_j^{(2)}\}$ попарно ортогональнвы. Это соответствует тому, что ортогональны подпространства L_1 и L_2. В этом случае выполнено $\varphi(x^{(0)}) \in M$, и последовательность (2) конечна. Доказательство леммы окончено.

З а м е ч а н и е. Так как $H = E - G$, то легко показать, что если $\{\mu_i\}$ — множество всех собственных чисел матрицы G, то $\{1 - \mu_i\}$ — множество всех собственных чисел матрицы H. Отсюда следует, что все собственные числа матрицы H также принадлежат отрезку $[0, 1]$, а для случая, когда последовательность (2) принимает бесконечное число значений, невозможно, чтобы все собственные значения равнялись нулю либо единице.

Итак, все λ_i принадлежат отрезку $[0, 1]$, и для рассматриваемой ситуации не все они равны нулю и не все они равны единице.

Вернемся к анализу разрешимости задачи (14). Выпишем двойственную ей задачу:

$$\max\{\, t \mid \ \lambda_i t \le \lambda_i^2, \ i = 1, \dots, p\}. \tag{21}$$

Покажем, что системы ограничений как прямой, так и двойственной задач совместны. Выберем произвольное i_0 так, чтобы $\lambda_{i_0} \ne 0$ (вследствие сделанного выше замечания такой номер существует). Тогда вектор

$$y = \frac{1}{\lambda_{i_0}} e_{i_0} = [0, \dots, 0, \frac{1}{\lambda_{i_0}}, 0, \dots, 0]$$

удовлетворяет системе ограничений задачи (14). Можно также убедиться, что допустимым множеством задачи (21) будет множество

$$\{\, t \mid \ t \le \min\{\lambda_i : \lambda_i > 0\}\}. \tag{22}$$

Это множество непусто благодаря неотрицательности значений λ_i и тому, что вследствие замечания к лемме существует λ_i, отличное от нуля. Указанный в выражении (22) минимум есть минимум конечного множества чисел и потому существует.

Из того, что допустимые множества задач (14), (21) не пусты, и из теоремы двойственности в линейном программировании [2] следует, что обе задачи разрешимы и их оптимальные значения совпадают. Из вида допустимого множества задачи (21) следует, что оптимальное значение этой задачи есть

$$t = \min\{\lambda_i \mid \lambda_i > 0\}.$$

Оптимальное значение задачи (14) будет тем же самым, и, таким образом,

$$\eta_1 = \min\{\lambda_i \mid \lambda_i > 0\}. \tag{23}$$

Далее, из связи между собственными числами матриц H и G и из свойств максимумов и минимумов функций вытекает следующая цепочка равенств:

$$\min\{\lambda_i \mid \lambda_i > 0\} = \min\{1 - \mu_i \mid 1 - \mu_i > 0\} = 1 - \max\{\mu_i \mid \mu_i < 1\}. \tag{24}$$

Из того, что $\theta_1^2 = 1 - \eta_1$, и из (23), (24) получаем

$$\theta_1^2 = \max\{\mu_i^{(1)} \mid \mu_i^{(1)} < 1\}, \tag{25}$$

где $\mu_i^{(1)}$ — собственные числа матрицы $A_1 A_2^T A_2 A_1^T$. При этом из доказанной выше леммы следует, что $\theta_1 \in (0, 1)$. Таким образом, было показано, что для $z \in L_2$ выполняется

$$\|\pi_1(z) - M\|^2 \leq \theta_1 \|z - M\|^2, \tag{26}$$

где θ_1^2 задается формулой (25). Аналогично будет выполняться симметричное неравенство для $z \in L_1$:

$$\|\pi_2(z) - M\|^2 \leq \theta_2 \|z - M\|^2, \tag{27}$$

где

$$\theta_2^2 = \max\{\mu_i^{(2)} \mid \mu_i < 1\}, \tag{28}$$

$\mu_i^{(2)}$ — собственные числа матрицы $A_2 A_1^T A_1 A_2^T$.

Переходим теперь к суперпозиции операторов проектирования. Так как $\pi_1(z) \in L_1$, $\pi_2(z) \in L_2$, то из неравенств (26), (27) получаем

$$\|\varphi(x^{(k)}) - M\| = \|\pi_2(\pi_1(x^{(k)})) - M\| \leq \theta_2 \|\pi_1(x^{(k)}) - M\| \leq \theta_2 \theta_1 \|x^{(k)} - M\|,$$

где θ_1 и θ_2 определяются формулами (25),(28). Таким образом, имеет место следующий результат.

Теорема 1. *Для процесса (2), порожденного заданным формулой (1) отображением $\varphi(\cdot)$, справедлива оценка*

$$\|\varphi(x^{(k)}) - M\| \leq \theta \|x^{(k)} - M\|, \quad \theta = \theta_1 \theta_2 \in (0, 1),$$

где

$\theta_1^2 = \max\{\mu_i^{(1)} \mid \mu_i^{(1)} < 1\}, \mu_i^{(1)}$ *— собственные числа матрицы* $A_1 A_2^T A_2 A_1^T$;

$\theta_2^2 = \max\{\mu_i^{(2)} \mid \mu_i^{(2)} < 1\}, \mu_i^{(2)}$ *— собственные числа матрицы* $A_2 A_1^T A_1 A_2^T$.

3. Случай пересечения линейного многообразия и неотрицательного ортанта

Для нахождения точки, удовлетворяющей системе

$$Ax = b, \quad x \geq 0,$$

можно воспользоваться итерационным процессом, норожденным следующим фейеровским отображением $\varphi(\cdot)$:

$$\varphi(x) = [\pi(x)]^+, \tag{29}$$

где $\pi(x)$ — оператор проектирования на многообразие $L = \{x \mid Ax = b\}$, а $[.]^+$ обозначает положительную срезку (проектирование на неотрицательный ортант).

Зададимся вопросом об оценке скорости сходимости такого итерационного процесса.

Проектирование на неотрицательный ортант есть проектирование на одну из его граней, т.е. на линейное многообразие L_2, задаваемое системой уравнений

$$e_j x = 0, \quad j \in J \subset \{1, 2, \ldots, n\}.$$

Здесь e_j — j-й единичный вектор-строка (вектор из нулей с единственной единицей на j-м месте).

Для получения оценки скорости сходимости воспользуемся аналогичным результатом для случая пересечения двух многоообразий, положив

$$A_1 = A, \quad A_2 = \begin{pmatrix} e_{j_1} \\ \vdots \\ e_{j_{q=|J|}} \end{pmatrix}.$$

Для того чтобы получить выражения для матриц $A_1 A_2^T A_2 A_1^T$ и $A_2 A_1^T A_1 A_2^T$ в данном случае, подсчитаем произведения $A_1 A_2^T$ и $A_2 A_1^T$. Первое из них равно

$$A_1 A_2^T = \begin{pmatrix} a_1 \\ \vdots \\ a_p \end{pmatrix} \left(e_{j_1}^T \ldots e_{j_q}^T \right) = \begin{pmatrix} A_{1j_1} & \cdots & A_{1j_q} \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ A_{pj_1} & \cdots & A_{pj_q} \end{pmatrix},$$

т.е. это матрица, составленная из тех столбцов матрицы A, номера которых принадлежат J. Обозначим эту матрицу через $A(J)$. Второе произведение равно

$$A_2 A_1^T = \begin{pmatrix} e_{j_1} \\ \vdots \\ e_{j_q} \end{pmatrix} \left(a_1^T \ldots a_p^T \right) = \begin{pmatrix} A_{j_1 1} & \cdots & A_{j_q p} \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ A_{j_q 1} & \cdots & A_{j_q p} \end{pmatrix} = A(J)^T.$$

Таким образом,

$$A_1 A_2^T A_2 A_1^T = A_1 A_2^T (A_1 A_2^T)^T = A(J) A(J)^T,$$

$$A_2 A_1^T A_1 A_2^T = A_2 A_1^T (A_2 A_1^T)^T = A(J)^T A(J)$$

и имеет место следующий результат.

Теорема 2. *Пусть $J \subset \{1, 2, \ldots, n\}$ и $A(J)$ обозначает матрицу, составленную из тех столбцов матрицы A, номера которых принадлежат множеству J. Для процесса (2), порожденного заданным формулой (29) отображением $\varphi(\cdot)$, справедлива оценка*

$$||\varphi(x^{(k)}) - M|| \le \theta ||x^{(k)} - M||, \quad \theta \in (0, 1),$$

где

$$\theta = \max\ \{\theta(J) \mid J \subset \{1, 2, \ldots, n\}\}, \quad \theta(J) = \theta_1(J)\theta_2(J);$$

$$\theta_1(J)^2 = \max\{\mu_i^{(1)}(J) \mid \mu_i^{(1)}(J) < 1\}; \quad \theta_2(J)^2 = \max\{\mu_i^{(2)}(J) \mid \mu_i^{(2)}(J) < 1\};$$

$$\mu_i^{(1)}(J) \text{ — собственные числа матрицы } A(J)A(J)^T;$$

$$\mu_i^{(2)}(J) \text{ — собственные числа матрицы } A(J)^T A(J).$$

В заключение автор хотел бы выразить признательность И. И. Еремину за постановку задачи и внимание к работе.

Литература

1. Еремин И. И., Мазуров В. Д. Нестационарные процессы математического программирования. М.: Наука, 1979.

2. Еремин И. И. Теория линейной оптимизации. Екатеринбург: УрГУ, 1999.

3. Булавский В. А. Методы релаксации для систем неравенств. Новосибирск: НГУ, 1981.

4. Mandel J. Convergence of the cyclical relaxation method for linear inequalities // Math. Progr. 1984. Vol.30, №2. P.218–228.

5. Combettes P. L., Trussell H. J. Method of successive projection for finding a common point of sets in metric spaces // J. Optimization Theory and Application. 1990. Vol.67, №3. P.487–507.

6. Беллман Р. Ввведение в теорию матриц. М.: Наука, 1976.

Статья поступила 17.12.2001 г.