УДК 517.518.86

П. Ю. Глазырина

НЕРАВЕНСТВО ТРЕУГОЛЬНИКА ДЛЯ АЛГЕБРАИЧЕСКИХ МНОГОЧЛЕНОВ В ПРОСТРАНСТВЕ L_0 НА ОТРЕЗКЕ*

Пусть $L_p = L_p(-1,1)$, $0 < p < \infty$, есть пространство функций f, измеримых с суммируемой степенью $|f|^p$ на промежутке $(-1,1)$, а L_0 – пространство измеримых функций, у которых суммируем $\ln^+|f| = \ln(\max(1,|f|))$. На этих пространствах рассмотрим функционалы

$$\|f\|_p = \left(\frac{1}{2}\int_{-1}^{1} |f(t)|^p\,dt\right)^{1/p}, \quad 0 < p < \infty;$$
$$\|f\|_0 = \exp\left(\frac{1}{2}\int_{-1}^{1} \ln|f(t)|\,dt\right).$$

Может случиться, что у $f \in L_0$ функция $\ln|f|$ не является суммируемой, а точнее, (неположительная) функция $\ln^-|f| = \ln(\min(1,|f|))$ не является суммируемой (например, f обращается в нуль на множестве положительной меры), в этом случае полагаем $\|f\|_0 = 0$. Известно, что если $f \in L_p$ для некоторого $p > 0$, то $f \in L_0$ и $\|f\|_0 = \lim \|f\|_p$, $p \to +0$; доказательство этого факта можно найти в книге [1, гл. VI, 6.7].

Функционал $\|\cdot\|_p$ при $p \ge 1$ является нормой. В случае $0 < p < 1$ он является квазинормой, поскольку неравенство треугольника выполняется лишь с константой, большей единицы, а именно

$$\|f+g\|_p \le 2^{(1-p)/p}\left(\|f\|_p + \|g\|_p\right). \tag{1}$$

При $p = 0$ подобного неравенства (с конечной константой) нет. Однако для каждого $n \ge 1$ существует константа $\varkappa(n)$ такая, что на множестве $\mathcal{P}_n$ алгебраических многочленов степени не выше n с комплексными коэффициентами справедливо неравенство

$$\|P+Q\|_0 \le \varkappa(n)(\|P\|_0 + \|Q\|_0), \quad P, Q \in \mathcal{P}_n. \tag{2}$$

*Работа выполнена при финансовой поддержке РФФИ, проект № 02-01-00783, РФФИ–ГФЕН Китая, проект № 02-01-3900, а также президентской программы поддержки ведущих научных школ Российской Федерации, проект НШ-1347.2003.1.

Нас интересует точная (наилучшая) константа в (2), т. е. величина

$$\varkappa(n)=\sup\left\{\frac{\|P+Q\|_0}{\|P\|_0+\|Q\|_0}:\ P,\,Q\in\mathcal{P}_n\right\}.$$

Неравенство (2) достаточно хорошо изучено для алгебраических многочленов на окружности. Впервые оно возникло в работе К. Малера [2]. Он показал, что точная константа, обозначим ее в этом случае $\chi(n)$, не превосходит 2^n. Р. Данкен [3] получил лучшую оценку сверху, а именно $(C_{2n}^n)^{1/2}$. Наиболее точные оценки $\chi(n)$ получил в 1990 г. В. В. Арестов [4]. Он доказал, что

$$\frac{1}{2}\widetilde{r}^n\le\chi(n),\quad n\ge 1,$$

$$\chi(n)\le\frac{1}{2}\widetilde{R}^n,\quad n\ge 6,$$

где

$$\widetilde{r}=\exp\left(\frac{4}{\pi}\int_0^{\pi/4}\ln(2\cos t)\,dt\right)=1.7916\ldots,\quad \widetilde{R}=\sqrt[6]{40}=1.8493\ldots\ .$$

В данной работе выписаны аналогичные оценки для $\varkappa(n)$. При доказательстве оценки сверху мы будем использовать следующее неравенство:

$$\|P\|_p\le K(n,p)\|P\|_0,\quad P\in\mathcal{P}_n,\ p>0; \tag{3}$$

условимся через $K(n,p)$ обозначать точную константу. В работе автора [5] для константы $K(n,p)$ установлены соотношения

$$K(n,p)=K(1,np)^n; \tag{4}$$

$$K(1,p)=\frac{\mathrm{e}}{\eta^{\eta/(\eta+1)}}\left(\frac{\eta^p-1}{p\ln\eta}\right)^{1/p}, \tag{5}$$

где η – корень уравнения

$$(p+1)(x^p-1)(x+1)=p(x^{p+1}+1)\ln x,\quad x>1. \tag{6}$$

Введем функцию $\mathcal{R}(\theta)=2^{1/\theta}K(1,\theta),\theta>0$, и положим

$$R=\min\left\{\mathcal{R}(\theta):\ \theta>0\right\}.$$

Вычисления показывают, что наименьшее значение функции $\mathcal{R}$ достигается в точке $\theta=2.4732\ldots$ и при этом $R=2.6457\ldots$. Отсюда, в частности, следует, что

$$R=\min\{\mathcal{R}(\theta):\ 0<\theta\le 3\}; \tag{7}$$

в дальнейшем можно считать, что константа R определена именно этой формулой.

Теорема. *Для точной константы в неравенстве* (2) *справедливы оценки*

$$\frac{1}{2}r^n \le \varkappa(n), \quad n \ge 1, \tag{8}$$

$$\varkappa(n) \le \frac{1}{2}R^n, \quad n \ge 3, \tag{9}$$

в которых $r = 1 + \sqrt{2} = 2.4142\ldots$, *а величина* R *определена формулой* (7) *и имеет приближенное значение* $R = 2.6457\ldots$.

Доказательство. Построение оценки сверху константы $\varkappa(n)$ основано на идеях работы [4]. Для любых двух многочленов P, $Q \in \mathcal{P}_n$, воспользовавшись вначале тем, что функционал $\|\cdot\|_p$ по p не убывает, а затем неравенствами (1) и (3) при $0 < p \le 1$, получаем

$$\|P+Q\|_0 \le \|P+Q\|_p \le 2^{(1-p)/p}(\|P\|_p+\|Q\|_p) \le 2^{(1-p)/p}K(n,p)(\|P\|_0+\|Q\|_0)\,.$$

Отсюда следует оценка

$$\varkappa(n) \le 2^{(1-p)/p}K(n,p) \tag{10}$$

при любых $0 < p \le 1$. К правой части последнего неравенства применим соотношение (4) и введем новое переменное $\ell = np$, $\ell \in (0,n]$; в результате получим

$$2^{(1-p)/p}K(n,p) = 2^{1/p-1}K(1,np)^n = \frac{1}{2}\left(2^{1/\ell}K(1,\ell)\right)^n. \tag{11}$$

Соотношения (10), (11) влекут при $n \ge 3$ неравенство (9), в котором R есть константа (7).

Чтобы оценить $\varkappa(n)$ снизу, рассмотрим следующие многочлены:

$$P(t) = (b+t)^n, \quad Q(t) = (b-t)^n, \quad b \in [1/2, 1].$$

Нетрудно проверить, что $\|P\|_0 = \|Q\|_0$. Учитывая этот факт и мультипликативность функционала $\|\cdot\|_0$, имеем

$$\varkappa(n) \ge \frac{\|P+Q\|_0}{\|P\|_0+\|Q\|_0} = \frac{\|P+Q\|_0}{2\|P\|_0} = \frac{1}{2}\left\|\frac{P+Q}{P}\right\|_0 = \frac{1}{2}\left\|1+\frac{Q}{P}\right\|_0;$$

здесь

$$\left\|1+\frac{Q}{P}\right\|_0 = \exp\left(\frac{1}{2}\int_{-1}^{1}\ln\left|1+\left(\frac{b-t}{b+t}\right)^n\right|dt\right).$$

Введем обозначение

$$I(n,b)=\int_{-1}^{1}\ln\left|1+\left(\frac{b-t}{b+t}\right)^n\right|dt,\quad b\in[1/2,1].$$

Итак, справедлива оценка

$$\varkappa(n)\geq\frac{1}{2}\exp\left(I(n,b)/2\right). \tag{12}$$

Исследуем поведение $I(n,b)$ при $n\to\infty$. С этой целью выполним следующие преобразования. Разобьем интеграл по отрезку $[-1,1]$ на два: по $[-1,0]$ и по $[0,1]$. В первом из этих интегралов сделаем замену переменной $t=-u$ и вновь объединим два получившихся интеграла в один. В результате получим

$$\begin{aligned}I(n,b)&=\int_{-1}^{0}\ln\left|1+\left(\frac{b-t}{b+t}\right)^n\right|dt+\int_{0}^{1}\ln\left|1+\left(\frac{b-t}{b+t}\right)^n\right|dt=\\&=\int_{0}^{1}\ln\left(\left|1+\left(\frac{b+t}{b-t}\right)^n\right|\cdot\left|1+\left(\frac{b-t}{b+t}\right)^n\right|\right)dt.\end{aligned}$$

Далее, будем иметь

$$\begin{aligned}I(n,b)&=\int_{0}^{1}\ln\left|2+\left(\frac{b+t}{b-t}\right)^n+\left(\frac{b-t}{b+t}\right)^n\right|dt=\\&=\int_{0}^{1}\ln\left(\left|\frac{b+t}{b-t}\right|^n\cdot\left|1+2\left(\frac{b-t}{b+t}\right)^n+\left(\frac{b-t}{b+t}\right)^{2n}\right|\right)dt=\\&=\int_{0}^{1}\left\{\ln\left|\frac{b+t}{b-t}\right|^n+\ln\left|1+\left(\frac{b-t}{b+t}\right)^n\right|^2\right\}dt=\\&=n\int_{0}^{1}\ln\left|\frac{b+t}{b-t}\right|dt+2\int_{0}^{1}\ln\left|1+\left(\frac{b-t}{b+t}\right)^n\right|dt\end{aligned}$$

и, окончательно,

$$I(n,b)=nI_1(b)+\frac{1}{2}I_2(n,b), \tag{13}$$

где

$$I_1(b)=\int_{0}^{1}\ln\left|\frac{b+t}{b-t}\right|dt,\quad I_2(n,b)=\int_{0}^{1}\ln\left|1+\left(\frac{b-t}{b+t}\right)^n\right|dt.$$

Докажем, что при значениях b из промежутка $[1/2,1]$ справедливо неравенство $I_2(n,b)>0$. Для четных n утверждение очевидно, так как в интеграле для $I_2(n,b)$ подынтегральная функция в этом случае положительная. Пусть n – нечетное. Запишем интеграл в виде

$$I_2(n,b) = \int_0^{2b-1} \ln\left(1+\left(\frac{b-t}{b+t}\right)^n\right)dt + \\ + \int_{2b-1}^{b} \ln\left(1+\left(\frac{b-t}{b+t}\right)^n\right)dt + \int_b^1 \ln\left(1-\left(\frac{t-b}{b+t}\right)^n\right)dt;$$

Первое слагаемое в этом представлении неотрицательное, поэтому достаточно показать, что сумма второго и третьего больше нуля. Для этого сделаем во втором интеграле замену $u=b-t$, а в третьем $u=t-b$. На этом пути будем иметь

$$I_2(n,b) \ge \int_0^{1-b} \ln\left(1+\left(\frac{u}{2b-u}\right)^n\right) + \ln\left(1-\left(\frac{u}{2b+u}\right)^n\right)dt = \\ = \int_0^{1-b} \ln\left(1+\left(\frac{u}{2b-u}\right)^n - \left(\frac{u}{2b+u}\right)^n - \left(\frac{u^2}{4b^2-u^2}\right)^n\right)dt.$$

Рассмотрим отдельно выражение

$$X = X(n,u) = \left(\frac{u}{2b-u}\right)^n - \left(\frac{u}{2b+u}\right)^n - \left(\frac{u^2}{4b^2-u^2}\right)^n = \\ = u^n \frac{(2b+u)^n - (2b-u)^n - u^n}{(4b^2-u^2)^n}.$$

Раскрывая в числителе скобки по формуле бинома Ньютона, получаем

$$X = u^n \frac{u^n + 2\sum_{k=1}^{[n/2]} C_n^{2k}(2b)^{2k}u^{n-2k}}{(4b^2-u^2)^n} > 0, \quad u \in (0, 1-b].$$

Значит, $\ln(1+X) > 0$, и $I_2(n,b) > 0$.

Отсюда, в силу (12) и (13), следует оценка

$$\varkappa(n) \ge \frac{1}{2}\exp\left(nI_1(b)/2\right), \quad b \in \left[\frac{1}{2}, 1\right]. \tag{14}$$

Найдем наибольшее значение функции $I_1(b)$ по $b \in [1/2, 1]$. С помощью стандартных вычислений получаем для $I_1(b)$ выражение через элементарные функции $I_1(b) = (1+b)\ln(1+b) - (1-b)\ln(1-b) - 2b\ln(b)$. Нетрудно проверить, что

$$I_1'(b) = \ln(1+b) + \ln(1-b) - 2\ln(b) = \ln\left(1 + \frac{1-2b^2}{b^2}\right), \quad b \in (0,1).$$

Из этого выражения видно, что производная функции I_1 обращается в нуль в единственной точке $\beta = 1/\sqrt{2}$; более того, функция I_1 имеет в этой точке наибольшее значение на отрезке $[1/2, 1]$ (и даже на отрезке $[0, 1]$). Далее, легко убедиться, что $I_1(\beta) = \ln(1+\beta) - \ln(1-\beta) = 2\ln(1+\sqrt{2})$ и, следовательно, величина $r = \exp(1/2 I_1(\beta))$ имеет значение $r = 1+\sqrt{2}$. Тем самым обоснована оценка (8).

Теорема доказана.

Автор благодарит профессора В. В. Арестова за постановку задачи и внимание к работе.

Литература

1. Харди Г. Г., Литтлвуд Дж. Е., Полиа Г. Неравенства. М.: Иностр. лит., 1948.
2. Mahler K. An application of Jensen's formula to polynomials // Mathematika. 1960. Vol. 7, №14. P. 98–100.
3. Duncan R. L. Some inequalities for polynomials // Amer. Math. Monthly. 1966. Vol. 73, №1. P. 58–59.
4. Арестов В. В. Интегральные неравенства для алгебраических многочленов на единичной окружности // Матем. заметки. 1990. Т. 48, вып. 4. С. 7–18.
5. Glazyrina P. Yu. Limiting case of the inequality of different metrics for algebraic polynomials on an interval // East J. on Approx. 2003. Vol. 9, №1. P. 1–19.

Статья поступила 20.03.2003 г.