УДК 517.926

А. В. Ким, Л. С. Волканин

К СИНТЕЗУ УПРАВЛЕНИЯ ДЛЯ СИСТЕМ С ПОСЛЕДЕЙСТВИЕМ В УПРАВЛЯЮЩИХ ПАРАМЕТРАХ*

1. Введение

Многие задачи теории устойчивости и управления для систем с последействием эффективно решаются на основе функционального подхода [1–5]. Исследованию задач синтеза управления в системах с запаздыванием посвящены работы [2, 5–11] и др.

В настоящей статье в рамках функционального подхода и с использованием конструкций i-гладкого анализа [10, 11] рассматривается ряд аспектов формализации и исследования свойств синтеза управления в системах с последействием в управляющих параметрах.

2. Синтез управления в нелинейных системах

Рассмотрим нелинейную систему

$$\dot{x}(t) = f(t, x(t), u(t), u_t), \tag{1}$$

где $f(t, x, u, w(\cdot)) : \mathbb{R} \times \mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^r \times Q^r[-\Delta, 0) \to \mathbb{R}^n$; $x(t) \in \mathbb{R}^n$; $u(t) \in \mathbb{R}^r$; $u_t = \{u(t+\nu) : -\Delta \leq \nu < 0\} \in Q^r[-\Delta, 0)$; $Q^r[-\Delta, 0)$ – пространство r-мерных кусочно-непрерывных на $[-\Delta, 0)$ функций $w(\cdot)$, имеющих не более конечного числа точек разрыва первого рода (в которых они непрерывны справа) и имеющих в нуле конечный левый предел.

В системе (1) управление осуществляется за счет выбора конечномерного вектора $u(t) \in \mathbb{R}^r$, при этом предыстория управления u_t считается известной.

Состоянием системы (1) является пара $\{x, w(\cdot)\} \in \mathbb{R}^n \times Q^r[-\Delta, 0)$, поэтому для системы (1) управление с обратной связью (синтез управления) ищется в классе отображений

$$v[t, x, w(\cdot)] : \mathbb{R} \times \mathbb{R}^n \times Q^r[-\Delta, 0) \to \mathbb{R}^r. \tag{2}$$

*Работа выполнена при поддержке РФФИ (грант №01-01-00576) и Министерства образования РФ (грант №E00-1.0-88).

Определение 1. *Отображение* (2) *называется синтезом управления, если для любых начальных данных* $(t_0, x^0, w^0(\cdot)) \in \mathbb{R} \times \mathbb{R}^n \times Q^r[-\Delta, 0)$ *существует единственное решение* $\{x(t), u(t)\}$, $t \geq t_0$, *системы функционально-дифференциальных и функциональных уравнений*

$$\begin{cases} \dot{x}(t) = f(t, x(t), u(t), u_t), \\ u(t) = v[t, x(t), u_t)] \end{cases} \tag{3}$$

с начальными условиями

$$\begin{cases} x(t_0) = x^0, \\ u(t_0 + \nu) = w^0(\nu), \ -\Delta \leq \nu < 0. \end{cases} \tag{4}$$

Пара $\{x(t), u(t)\}$, $t \geq t_0$, называется *допустимым процессом*, а функция $x(t), t \geq t_0$, – *траекторией* системы (1), соответствующей управлению (2) и начальным данным $(t_0, x^0, w^0(\cdot))$.

Система (3) может быть представлена в симметричной форме, если отображение (2) инвариантно дифференцируемо (см. [10, 11]) в области определения. Продифференцировав по t второе уравнение в (3), получаем

$$\begin{cases} \dot{x}(t) = f(t, x(t), u(t), u_t), \\ \dot{u}(t) = \frac{\partial v[t, x(t), u_t]}{\partial t} + \frac{\partial v[t, x(t), u_t]}{\partial x} \ \dot{x}(t) + \partial_w v[t, x(t), u_t], \end{cases}$$

здесь $\frac{\partial v}{\partial t}$ – частная производная по t, $\frac{\partial v}{\partial x}$ – градиент по x, $\partial_w v$ – инвариантная производная по управлению. Подставив во второе уравнение вместо $\dot{x}(t)$ правую часть первого уравнения, получим следующую *симметричную форму* представления системы (3):

$$\begin{cases} \dot{x}(t) = f(t, x(t), u(t), u_t) \ , \\ \dot{u}(t) = \frac{\partial v[t, x(t), u_t]}{\partial t} + \frac{\partial v[t, x(t), u_t]}{\partial x} f(t, x(t), u(t), u_t) + \partial_w v[t, x(t), u_t]. \end{cases} \tag{5}$$

Приведем условия существования и единственности решений системы (5). Рассмотрим множество $E_{\varkappa}[x^0, u^0, w^0(\cdot)]$, $\varkappa > 0$, состоящее из пар функций $\{x(\cdot), u(\cdot)\}$, удовлетворяющих условиям:

1) $x(\cdot) : [0, \varkappa] \to \mathbb{R}^n$, $u(\cdot) : [-\Delta, \varkappa] \to \mathbb{R}^r$;
2) $x(0) = x^0$, $u(0) = u^0$;
3) $x(\cdot)$, $u(\cdot)$ непрерывны на $[0, \varkappa]$;
4) $u(t + s) = w^0(s)$ при $s \in [-\Delta, 0)$.

Систему (5) можно записать в форме

$$\dot{z}(t) = F[t, z(t), z_t] \ , \tag{6}$$

где $z = (x, u) \in \mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^r$, $z_t \equiv u_t = \{u(t + \nu) : -\Delta \leq \nu < 0\} \in Q^r[-\Delta, 0)$;

$$F[t, x, u, w(\cdot)] = \begin{pmatrix} f(t, x, u, w(\cdot)) \\ \frac{\partial v[t, x, w(\cdot)]}{\partial t} + \frac{\partial v[t, x, w(\cdot)]}{\partial x} f(t, x, u, w(\cdot)) + \partial_w v[t, x, w(\cdot)] \end{pmatrix}. \tag{7}$$

Теорема 1. *Пусть отображения* $f(t,x,u,w(\cdot))$ *и* $v[t,x,w(\cdot)]$ *таковы, что отображение* $F[t,x,u,w(\cdot)]$ *является*

а) *локально липшицевым по переменным* $\{x,u,w(\cdot)\}$, *т. е. существуют положительные константы* K_1, K_2 *и* K_3 *такие, что*

$$\|F[t,x^{(1)},u^{(1)},w^{(1)}(\cdot)]-F[t,x^{(2)},u^{(2)},w^{(2)}(\cdot)]\|\le$$
$$\le K_1\|x^{(1)}-x^{(2)}\|_{(n)}+K_2\|u^{(1)}-u^{(2)}\|_{(r)}+K_3\|w^{(1)}(\cdot)-w^{(2)}(\cdot)\|_Q;$$

б) *непрерывным по сдвигу, т. е. для каждой четверки* $\{t_0,x^0,u^0,w^0(\cdot)\}\in\in\mathbb{R}\times\mathbb{R}^n\times\mathbb{R}^r\times Q[-\Delta,0)$ *существует такое* $\varkappa>0$, *что для всех* $\{x(\cdot),u(\cdot)\}\in\in E_\varkappa[x^0,u^0,w^0(\cdot)]$ *функция* $\Psi(t)=F[t,x(t),u(t),u_t]$ *непрерывна на* $[t_0,t_0+\varkappa]$.

Тогда для любых $\{t_0,x^0,u^0,w^0(\cdot)\}\in\mathbb{R}\times\mathbb{R}^n\times\mathbb{R}^r\times Q[-\Delta,0)$ *существует* $\bar\varkappa\in(0,\varkappa]$ *такое, что на отрезке* $[t_0-\Delta,t_0+\bar\varkappa]$ *решение системы* (5) *существует и единственно.*

Доказательство. Отображение F в правой части системы (6) удовлетворяет условиям теоремы 2.1 [10] о существовании и единственности решений функционально-дифференциальных уравнений. Следовательно, для начальных данных $\{t_0,x^0,u^0,w^0(\cdot)\}$ существует единственное (локальное) решение системы (6), определенное на некотором интервале $[t_0-\Delta,t_0+\bar\varkappa]$.

3. Синтез управления в линейных системах

В данном параграфе рассматривается линейная система

$$\dot x(t)=Ax(t)+Bu(t)+B_\Delta u(t-\Delta)+\int_{-\Delta}^{0}G(\nu)u(t+\nu)d\nu\ , \tag{8}$$

где A, B, B_Δ – постоянные матрицы размерностей $n\times n$, $n\times r$, $n\times r$ соответственно; $G(\cdot)$ – $n\times r$-матрица с кусочно-непрерывными на $[-\Delta,0)$ коэффициентами; $x\in\mathbb{R}^n$; $u\in\mathbb{R}^r$.

Синтез управления рассматривается в форме линейного отображения

$$v[x,w(\cdot)]=Ex+\int_{-\Delta}^{0}L(\nu)w(\nu)d\nu, \tag{9}$$

где E – матрица размера $r\times n$; $L(\cdot)$ – матрица размера $r\times r$ с кусочно-непрерывными на $[-\Delta,0)$ коэффициентами.

Для системы (8) и управления (9) замкнутая система имеет вид

$$\begin{cases}\dot x(t)=Ax(t)+Bu(t)+B_\Delta u(t-\Delta)+\displaystyle\int_{-\Delta}^{0}G(\nu)u(t+\nu)d\nu\ ,\\ u(t)=Ex(t)+\displaystyle\int_{-\Delta}^{0}L(\nu)u(t+\nu)d\nu\ .\end{cases} \tag{10}$$

В дальнейшем предполагаем выполненным

Условие 1. *Элементы матрицы* $L(\cdot)$ *непрерывны и кусочно-дифференцируемы на* $[-\Delta, 0]$.

Если $L(\cdot)$ имеет кусочно-непрерывную производную, то отображение (9) имеет в каждой точке $\{x, u, w(\cdot)\}$ производные

$$\frac{\partial v[x, w(\cdot)]}{\partial t} = 0, \quad \frac{\partial v[x, w(\cdot)]}{\partial x} = E,$$

$$\partial_w v[x, w(\cdot)] = L(0)u - L(-\Delta)u(t-\Delta) - \int_{-\Delta}^{0} \frac{dL(\nu)}{d\nu} w(\nu) d\nu.$$

Следовательно, продифференцировав по t второе уравнение в (10), мы приведем систему к однородному виду:

$$\begin{cases} \dot{x}(t) = Ax(t) + Bu(t) + B_\Delta u(t-\Delta) + \displaystyle\int_{-\Delta}^{0} G(\nu)u(t+\nu)d\nu, \\ \dot{u}(t) = E\dot{x}(t) + L(0)u(t) - L(-\Delta)u(t-\Delta) - \displaystyle\int_{-\Delta}^{0} \frac{dL(\nu)}{d\nu} u(t+\nu)d\nu. \end{cases}$$

Подставив во второе уравнение вместо $\dot{x}(t)$ правую часть первого уравнения, получим

$$\begin{cases} \dot{x}(t) = & Ax(t) + Bu(t) + B_\Delta u(t-\Delta) + \displaystyle\int_{-\Delta}^{0} G(\nu)u(t+\nu)d\nu, \\ \dot{u}(t) = & EAx(t) + [EB + L(0)]u(t) + [EB_\Delta - L(-\Delta)]u(t-\Delta) + \\ & + \displaystyle\int_{-\Delta}^{0} \left[EG(\nu) - \frac{dL(\nu)}{d\nu} \right] u(t+\nu)d\nu. \end{cases} \tag{11}$$

Отображение в правой части системы (11) удовлетворяет всем условиям теоремы 1, поэтому для любых начальных данных существует локальное решение системы. Однако в линейном случае это решение может быть продолжено на весь полуинтервал $[0, \infty)$.

Теорема 2. *Пусть заданы система* (8) *и линейный синтез управления* (9), *причем элементы матрицы* $L(\cdot)$ *непрерывны и имеют кусочно-непрерывные производные. Для любого начального условия* $\{x^0, w^0(\cdot)\}$ *существует единственный допустимый процесс* $\{x(\cdot), u(\cdot)\}$, *удовлетворяющий системе* (10) *при* $t > 0$, *начальному условию*

$$\begin{cases} x(t_0) = x^0, \\ u(t_0+\nu) = w^0(\nu), \ -\Delta \le \nu < 0, \end{cases}$$

и условию

$$u(0) = Ex^0 + \int_{-\Delta}^{0} L(\nu) w^0(\nu) d\nu. \tag{12}$$

При этом функция $u(\cdot)$ *является непрерывной и кусочно-дифференцируемой при* $t \geq 0$ *и, следовательно, удовлетворяет системе* (11).

Доказательство. Рассмотрим систему (11) как систему линейных автономных функционально-дифференциальных уравнений относительно переменных $\{x(t), u(t)\}$ с начальными условиями

$$\begin{cases} x(0) = & x^0, \\ u(0) = & Ex^0 + \int_{-\Delta}^{0} L(\nu) w^0(\nu) d\nu, \\ u(\nu) = & w^0(\nu)\ , -\Delta \leq \nu < 0. \end{cases} \tag{13}$$

Задача Коши (11), (13) имеет единственное решение $\{x^*(\cdot), u^*(\cdot)\}$, определенное при всех $t \geq 0$. Покажем, что пара $\{x^*(\cdot), u^*(\cdot)\}$ является допустимым процессом и удовлетворяет системе (10).

Так как функция $u^*(t)$, $t \geq t_0$, удовлетворяет соотношению

$$\begin{aligned} \dot{u}^*(t) = \ & EAx^*(t) + [EB + L(0)]u^*(t) + [EB_\Delta - L(-\Delta)]u^*(t-\Delta) + \\ & + \int_{-\Delta}^{0} \left[EG(\nu) - \frac{dL(\nu)}{d\nu} \right] u^*(t+\nu) d\nu, \end{aligned}$$

то, учитывая, что

$$\dot{x}^*(t) = Ax^*(t) + Bu^*(t) + B_\Delta u^*(t-\Delta) + \int_{-\Delta}^{0} G(\nu) u^*(t+\nu) d\nu,$$

получаем

$$\dot{u}^*(t) = E\dot{x}^*(t) + L(0)u^*(t) - L(-\Delta)u^*(t-\Delta) - \int_{-\Delta}^{0} \frac{dL(\nu)}{d\nu} u^*(t+\nu) d\nu.$$

Далее, интегрируем обе части получившегося выражения:

$$u^*(t) - u^*(0) = E\left[x^*(t) - x^*(0)\right] + \int_{-\Delta}^{0} L(\nu) u^*(t+\nu) d\nu - \int_{-\Delta}^{0} L(\nu) w^0(\nu) d\nu.$$

Отсюда, учитывая, что $u^*(0) = Ex^*(0) + \int_{-\Delta}^{0} L(\nu) w^0(\nu) d\nu$, получаем

$$u^*(t) = Ex^*(t) + \int_{-\Delta}^{0} L(\nu) u^*(t+\nu) d\nu.$$

Итак, при выполнении условия 1 системы (10) и (11) эквивалентны.

4. Заключение

Полученные в статье результаты дают основу для исследования и построения синтеза управления в различных постановках задач для систем с последействием в управлении. Использование данного подхода при исследовании линейно-квадратичных задач управления для систем с последействием позволяет получить ряд конструктивных результатов, которые будут представлены в дальнейших работах авторов.

Литература

1. Красовский Н. Н. Некоторые задачи теории устойчивости движения. М.: Гостехиздат, 1959.
2. Красовский Н. Н. Об аналитическом конструировании оптимального регулятора в системе с запаздываниями времени // Прикладная математика и механика. 1962. Т. 26, № 1. С. 39–51.
3. Шиманов С. Н. О неустойчивости движения систем с запаздыванием по времени // Там же. 1960. Т. 24, № 1. С. 55–63.
4. Шимаиов С. Н. К теории линейных дифференциальных уравнений с последействием // Дифференц. уравнения. 1965. Т. 1, № 1. С. 102–116.
5. Осипов Ю. С. Стабилизация управляемых систем с запаздыванием // Там же. 1965. Т. 1, № 5. С. 463–473.
6. Осипов Ю. С., Пименов В. Г. К теории дифференциальных игр в системах с последействием // Прикладная математика и механика. 1978. Т. 42, № 6. С. 969–977.
7. Пименов В. Г. К задаче о регулировании системой с запаздыванием в управлении. Некоторые методы позиционного и программного управления. Свердловск: ИММ УНЦ АН СССР, 1987. С. 107–121.
8. Колмановский В. Б., Королева Н. И. О синтезе билинейных систем с запаздыванием в управлении // Прикладная математика и механика. 1993. Т. 57, № 1. С. 238–243.
9. Янушевский Р. Т. Управление объектами с запаздыванием. М.: Наука, 1978.
10. Ким А. В. i-Гладкий анализ и функционально-дифференциальные уравнения. Екатеринбург: ИММ УрО РАН, 1996.
11. Kim A. V. Functional Differential Equations. Application of i-smooth calculus. Kluwer Academic Publishers, 1999.

Статья поступила 23.07.2002 г.
Окончательный вариант 09.12.2002 г.