УДК 517.929

**Ю. Ф. Долгий**

# МЕТОД ВСПОМОГАТЕЛЬНЫХ СИСТЕМ ШИМАНОВА В ЗАДАЧЕ ПОСТРОЕНИЯ УРАВНЕНИЙ РАЗВЕТВЛЕНИЯ*

## 1. Локальная постановка задачи нахождения периодических колебаний в неавтономных системах

Рассмотрим систему дифференциальных уравнений с последействием

$$\frac{dx(t)}{dt} = \Phi(t, x_t, \nu), \tag{1.1}$$

где $x : \mathbb{R} \to \mathbb{R}^n$; $x_t = x(t + \vartheta)$, $\vartheta \in [-r, 0]$; $x_t \in D \subseteq C = C([-r, 0], \mathbb{R}^n)$, $t \in \mathbb{R}$, $\nu \in (\alpha, \beta)$; отображение $\Phi : \mathbb{R} \times D \times (\alpha, \beta) \to \mathbb{R}^n$ непрерывно, имеет в указанной области непрерывную производную $\frac{\partial \Phi(t, x_t, \nu)}{\partial x_t}$ и периодически, с периодом $\omega$, зависит от аргумента $t$; $r \leq \omega$.

Предположим, что система (1.1) имеет $\omega$-периодическое решение $x = \chi(t)$ при значении параметра $\nu = \nu_0$. Ставится задача изучить периодические колебания в системе (1.1) в малой окрестности выделенного периодического решения. В теории бифуркаций периодических решений важное значение имеет уравнение разветвления. В рамках теории периодических колебаний Ляпунова–Пуанкаре методы построения уравнения разветвления описаны в работах [1–5]. Автор использует для нахождения уравнения разветвления метод вспомогательных систем Шиманова [6–8]. Метод вспомогательных систем позволяет разделять задачи нахождения условий существования и построения периодических решений. В настоящей работе предлагается при разделении этих задач использовать специальное интегральное уравнение. Рассматриваемый подход развивается в общей ситуации, когда не задается скорость убывания по малому параметру нелинейной части системы. Метод вспомогательных систем Шиманова использовался ранее автором настоящей работы при изучении бифуркаций Хопфа в автономных системах дифференциальных уравнений с малым запаздыванием [9].

*Работа выполнена при поддержке гранта Министерства образования РФ №E00-1.0-91 и программы фундаментальных исследований Президиума РАН «Управление механическими системами».

В системе дифференциальных уравнений с последействием (1.1) произведем замену переменных

$$\nu = \nu_0 + \mu, x(t) = \chi(t) + y(t). \tag{1.2}$$

В результате система (1.1) преобразуется к виду

$$\frac{dy(t)}{dt} = a(t)y_t + f(t, y_t, \mu), \tag{1.3}$$

где $y : \mathbb{R} \to \mathbb{R}^n$; $y_t = y(t + \vartheta)$, $\vartheta \in [-r, 0]$; $y_t \in D_* \subseteq C, t \in \mathbb{R}$, $\mu \in (-\mu_*, \mu_*)$; $a : \mathbb{R} \times C \to \mathbb{R}^n$ – линейное непрерывное отображение; отображение $f : \mathbb{R}^+ \times D_* \times (-\mu_*, \mu_*) \to \mathbb{R}^n$ непрерывно, имеет в указанной области непрерывную производную $\frac{\partial f(t,y_t,\mu)}{\partial y_t}$; отображения $a$ и $f$ периодически, с периодом $\omega$, зависят от аргумента $t$. Отображение $a$ допускает аналитическое представление [10, с. 556]

$$a(t)y_t = \int_{-r}^{0} d\eta(t, s)y(t + s),$$

где отображение $\eta : \mathbb{R} \times [-r, 0] \to \mathbb{R}^{n\times n}$ периодически, с периодом $\omega$, зависит от аргумента $t$, а также удовлетворяет условиям: $\eta(t, 0) = 0$ при $t \in [0, \omega]$; при каждом фиксированном значении $t \in [0, \omega]$ функция $\eta(t, \cdot)$ имеет ограниченную вариацию на отрезке $[-r, 0]$; $\sup\limits_{t\in[0,\omega]} \mathop{var}\limits_{-r\le s\le 0} \eta(\vartheta, s) < \infty$ и при любом $0 \le \tau \le \omega$ функция $\int_0^\tau \eta(t, s)\, ds$ непрерывна по $t$ на отрезке $[0, \omega]$.

**Утверждение 1.1.** *Справедливы оценки*

$$|f(t, z, \mu)| \le \Omega(\Phi, |\mu|) + \|z\|\Omega(\frac{\partial\Phi}{\partial x_t}, \|z\|, 0), \tag{1.4}$$

$$|\frac{\partial f(t, z, \mu)}{\partial z}| \le \Omega(\frac{\partial\Phi}{\partial x_t}, \|z\|, |\mu|), z \in D_* \subseteq C, t \in \mathbb{R}; \mu \in (-\mu_*, \mu_*). \tag{1.5}$$

*Здесь* $\Omega(\Phi, |\mu|) = \sup(\|\Phi(t, u, \nu) - \Phi(t, u, \nu_0)\| : |\nu - \nu_0| \le |\mu|, u \in D \subseteq C,\ t \in \mathbb{R})$, $\Omega(\frac{\partial\Phi}{\partial x_t}, \|z\|, |\mu|) = \sup(\|\frac{\partial\Phi(t,u,\nu)}{\partial x_t} - \frac{\partial\Phi(t,\chi_t,\nu_0)}{\partial x_t}\| : |\nu - \nu_0| \le |\mu|, \|u - \chi_t\| \le \|z\|$, $u \in D \subseteq C, t \in \mathbb{R})$.

В результате замены (1.2) мы пришли к задаче нахождения периодических решений системы дифференциальных уравнений с последействием в малой окрестности нуля. В системе дифференциальных уравнений с последействием (1.1) нелинейность мала. Степень ее малости определяется неравенствами (1.4), (1.5). В отличие от традиционной постановки задачи в теории периодических колебаний Ляпунова–Пуанкаре в данной работе мы не вводим перед нелинейностью в качестве множителя малый параметр $\mu$.

## 2. Функция Грина периодической задачи для системы дифференциальных уравнений с последействием

Рассматривается система (1.3) в случае, когда функция $f$ явно не зависит от $y_t$, т. е. система (1.3) является линейной неоднородной системой дифференциальных уравнений с последействием

$$\frac{dy(t)}{dt} = \int_{-r}^{0} d\eta(t,s)y(t+s) + f(t,\mu). \tag{2.1}$$

Общее решение системы (2.1) определяется формулой [4, с. 180]

$$y(t,\varphi) = V(t,0)\varphi(0) + \int_{-r}^{-0} d_\beta\Big(\int_0^t V(t,\alpha)\eta(\alpha,\beta-\alpha)\,d\alpha\Big)\varphi(\beta) + \\ + \int_0^t V(t,s)f(s,\mu)\,ds, t \geq 0,$$

где начальная функция $\varphi \in C$; $\eta(t,s) = \eta(t,-r)$ при $s \leq -r$; $V$ – решение уравнения $V(t,\alpha) = I_n - \int_\alpha^t V(t,s)\eta(s,\alpha-s)ds$ при $t \geq \alpha$; $V(t,\alpha) = 0$ при $t < \alpha$. Существование $\omega$-периодических решений системы (2.1) связано с разрешимостью уравнения

$$((I-U))\varphi)(\vartheta) = \int_0^{\omega+\vartheta} V(\omega+\vartheta,s)f(s,\mu)\,ds, \vartheta \in [-r,0],\ \varphi \in C, \tag{2.2}$$

где $U$ – оператор монодромии [11], определяемый формулой

$$(U\varphi)(\vartheta) = V(\omega+\vartheta,0)\varphi(0) + \\ + \int_{-r}^{-0} d_\beta\Big(\int_0^{\omega+\vartheta} V(\omega+\vartheta,\alpha)\eta(\alpha,\beta-\alpha)\,d\alpha\Big)\varphi(\beta),\ \vartheta \in [-r,0],\ \varphi \in C.$$

Мы рассматриваем резонансный случай, когда оператор монодромии $U$ имеет полупростое собственное число $\rho = 1$, которому отвечает $d$ линейно независимых собственных функций $\varphi_1, \ldots, \varphi_d \in C$. Сопряженный оператор $U^*$ имеет полупростое собственное число $\rho = 1$, которому отвечает $d$ линейно независимых собственных элементов $\varphi_1^*, \ldots, \varphi_d^* \in C^*$. Здесь $C^*$ – сопряженное пространство к пространству $C$, т. е. пространство линейных непрерывных функционалов. Функционалы $\varphi_1^*, \ldots, \varphi_d^*$ можно выбрать таким образом, чтобы $\varphi_k^*\varphi_m = \delta_{km}$, $k,m = \overline{1,d}$, где $\delta_{km}$ $(k,m = \overline{1,d})$ – символы Кронекера.

Необходимые и достаточные условия разрешимости уравнения (2.2) имеют вид [12, с. 474]

$$\varphi_k^* \int_0^{\omega} V(\omega+\cdot,s)f(s,\mu)\,ds = 0,\ k = \overline{1,d}.$$

Введем функции $\psi_k^*(s) = \varphi_k^* V(\omega + \cdot, s)$, $k = \overline{1,d}$, $s \in [0, \omega]$. Периодические продолжения функций $\psi_k^*$, $k = \overline{1,d}$, являются линейно независимыми $\omega$-периодическими решениями системы интегральных уравнений [4, с. 189]

$$\psi^*(\alpha) + \int_\alpha^{[\alpha/\omega+2]\omega} \psi^*(s)\eta(s, \alpha - s)\, ds = \text{const}, \ \alpha \in \mathbb{R}. \tag{2.3}$$

В результате необходимые и достаточные условия существования $\omega$-периодических решений системы (2.1) принимают вид

$$\int_0^\omega \psi_k^*(s) f(s, \mu)\, ds = 0, \ k = \overline{1,d}. \tag{2.4}$$

**Лемма 2.1.** *При выполнении условий* (2.4) *общее решение уравнения* (2.2) *определяется формулой*

$$\varphi(\vartheta, \gamma) = \sum_{k=1}^{d} \varphi_k(\vartheta)\gamma_k + S^{-1}\Big(\int_0^\omega V(\omega + \cdot, s) f(s, \mu)\, ds\Big)(\vartheta), \ \vartheta \in [-r, 0].$$

*Здесь $\gamma_1, \ldots, \gamma_d$ — произвольные действительные числа, $\gamma = (\gamma_1, \ldots, \gamma_d)^\tau$; $\tau$ – значок транспонирования; линейный ограниченный оператор $S : C \to C$ определяется формулой*

$$(S\varphi)(\vartheta) = ((I - U)\varphi)(\vartheta) - \sum_{k=1}^{d} (\varphi_k^*\varphi)\varphi_k(\vartheta), \vartheta \in [-r, 0], \ \varphi \in C,$$

*и имеет ограниченный обратный оператор.*

Обратный оператор $S^{-1}$ допускает следующее аналитическое представление [10, с. 556]:

$$(S^{-1}\psi)(s) = \int_{-r}^{0} dK(\vartheta, s)\psi(s), \vartheta \in [-r, 0], \psi \in C,$$

где отображение $K : [-r, 0] \times [-r, 0] \to \mathbb{R}^{n \times n}$ удовлетворяет условиям: $K(\vartheta, 0) = 0$ при $\vartheta \in [-r, 0]$; при каждом фиксированном значении $\vartheta$ из $[-r, 0]$ функция $K(\vartheta, \cdot)$ имеет ограниченную вариацию на отрезке $[-r, 0]$; $\sup\limits_{\vartheta \in [-r,0]} \operatorname*{var}\limits_{-r \le s \le 0} K(\vartheta, s) < \infty$ и при любом $-r \le \tau \le 0$ функция $\int_{-r}^{\tau} K(\vartheta, s)\, ds$ непрерывна по $\vartheta$ на отрезке $[-r, 0]$.

Пусть $\rho_k^*$ ($k = \overline{1,d}$) – функции с ограниченным изменением на отрезке $[-r, 0]$, порождающие функционалы $\varphi_k^*$ ($k = \overline{1,d}$). Считаем, что $\rho_k^*(0) = 0$, $k = \overline{1,d}$.

**Лемма 2.2.** *Матричная функция $K$ удовлетворяет уравнениям*

$$-K(\vartheta,-0)-\int_{-r}^{0}d_sK(\vartheta,s)V(\omega+s,0)+$$
$$+\sum_{k=1}^{d}\int_{-r}^{0}d_sK(\vartheta,s)\varphi_k(s)\rho_k^*(-0)=I_n,\ \vartheta\in[-r,0],$$
$$K(\vartheta,\beta)-\int_{-r}^{0}d_sK(\vartheta,s)\int_{0}^{\omega+s}V(\omega+s,\alpha)\eta(\alpha,\beta-\alpha)\,d\alpha-$$
$$-\sum_{k=1}^{d}\int_{-r}^{0}d_sK(\vartheta,s)\varphi_k(s)\rho_k^*(\beta)=1(\vartheta-\beta)I_n,\ \beta\in[-r,0),\ \vartheta\in[-r,0],$$

*а также уравнению*

$$-V(\omega+\vartheta,0)K(0,s)-\int_{-r}^{0}d_\beta(\int_{0}^{\omega+\vartheta}V(\omega+\vartheta,\alpha)\eta(\alpha,\beta-\alpha)\,d\alpha)K(\beta,s)+$$
$$+K(\vartheta,s)-\sum_{k=1}^{d}\varphi_k(\vartheta)\int_{-r}^{0}d\rho_k^*(\beta)K(\beta,s)=1(\vartheta-s)I_n,\vartheta,s\in[-r,0].$$

*Здесь $1(\cdot)$ – функция Хевисайда.*

**Лемма 2.3.** *Функции $\rho_k^*(k=\overline{1,d})$ удовлетворяют уравнениям*

$$\varrho^*(\beta)+\int_{-r}^{0}d\rho^*(s)\int_{0}^{\omega+s}V(\omega+s,\alpha)\eta(\alpha,\beta-\alpha)\,d\alpha=0,\ \beta\in(-r,0),$$
$$\int_{-r}^{0}d\rho^*(s)\int_{0}^{\omega+s}V(\omega+s,\alpha)\eta(\alpha,-r-\alpha)\,d\alpha=\varrho^*(-r+0)-\varrho^*(-r),$$
$$\varrho^*(-r)=\varrho^*(-0).$$

При выполнении условий (2.4) система дифференциальных уравнений (2.1) допускает $d$-параметрическое семейство $\omega$-периодических решений

$$\overline{\varphi}(t,\gamma)=\sum_{k=1}^{d}\overline{\varphi}_k(t)\gamma_k+\int_{0}^{\omega}\overline{G}(t,s)f(s,\mu)\,ds, \tag{2.5}$$

где $\overline{\varphi}_k$ $(k=\overline{1,d})$ – линейно независимые $\omega$-периодические решения однородной системы дифференциальных уравнений с последействием

$$\frac{dy(t)}{dt}=\int_{-r}^{0}d\eta(t,s)y(t+s); \tag{2.6}$$

$\overline{G}$ – матричная функция Грина периодической задачи для системы (2.1).

**Лемма 2.4.** *Матричная функция Грина $\overline{G}$ периодической задачи для системы дифференциальных уравнений с последействием задается формулой*

$$\overline{G}(t,s) = V(t,s) + V(t,0)\overline{K}(0,s) +$$
$$+\int_{-r}^{-0} d_\beta\Big(\int_0^t V(t,\alpha)\eta(\alpha,\beta-\alpha)\,d\alpha\Big)\overline{K}(\beta,s),\ \ t\in\mathbb{R},\ \ s\in[0,\omega],$$

*где матричная функция $\overline{K}$ определяется формулами*

$$\overline{K}(\vartheta,s) = -K(\vartheta,-r)V(\omega-r,s) -$$
$$-\int_{-r}^{0} K(\vartheta,\alpha)\frac{\partial V(\omega+\alpha,s)}{\partial s}\,d\alpha,\ \ s\in[0,\omega-r),\ \ \vartheta\in[-r,0],$$
$$\overline{K}(\vartheta,s) = -K(0,s-\omega) -$$
$$-\int_{s-\omega}^{0} K(\vartheta,\alpha)\frac{\partial V(\omega+\alpha,s)}{\partial s}\,d\alpha, s\in[\omega-r,\omega], \vartheta\in[-r,0].$$

В формуле (2.5) интеграл определен для произвольной непрерывной периодической функции $f$. Только для тех функций $f$, которые удовлетворяют условию (2.4), этот интеграл является периодической функцией. Это обстоятельство создает технические трудности в теории метода Ляпунова–Пуанкаре. Один из путей преодоления этих трудностей предложил С. Н. Шиманов. Он построил вспомогательную систему интегродифференциальных уравнений, которая в резонансном случае всегда имеет периодические решения. В линейном случае эта система имеет вид

$$\frac{dy(t)}{dt} = \int_{-r}^{0} d\eta(t,s)y(t+s) + f(t,\mu) - \frac{1}{\omega}\sum_{k=1}^{d}\varphi_k(t)\int_0^\omega \psi_k^*(s)f(s,\mu)\,ds. \quad (2.7)$$

Вспомогательная система (2.7) для произвольной периодической функции $f$ имеет $d$-параметрическое семейство периодических решений

$$\varphi(t,\gamma) = \sum_{k=1}^{d}\varphi_k(t)\gamma_k + \int_0^\omega G(t,s)f(s,\mu)\,ds. \quad (2.8)$$

**Утверждение 2.1.** *Функция Грина периодической задачи для вспомогательной системы* (2.7) *определяется формулой*

$$G(t,s) = \overline{G}(t,s) - \frac{1}{\omega}\sum_{k=1}^{d}\int_0^\omega \overline{G}(t,\tau)\varphi_k(\tau)\,d\tau\psi_k^*(s),\ \ t\in\mathbb{R},\ \ s\in[0,\omega]. \quad (2.9)$$

В формуле (2.8) функция Грина $G$ периодически зависит от аргумента $t$. Поэтому эта формула дает периодические решения системы (2.7) при любой функции $f$. При выполнении условий (2.4) эти решения совпадают с периодическими решениями системы (2.1), так как в этом случае системы (2.1) и (2.7) совпадают. Метод вспомогательных систем ориентирован на исследование периодических колебаний в нелинейных системах. Построенная в данном пункте функция Грина (2.9) будет использована при построении уравнения разветвления.

## 3. Уравнения разветвления для неавтономных систем

В нелинейном случае вспомогательная система Шиманова имеет вид

$$\frac{dy(t)}{dt} = \int_{-r}^{0} d\eta(t,s)y(t+s)+f(t,y_t,\mu)-\frac{1}{\omega}\sum_{k=1}^{d}\varphi_k(t)\int_0^{\omega}\psi_k^*(s)f(s,y_s,\mu)\,ds. \quad (3.1)$$

**Лемма 3.1.** *Решение вспомогательной системы* (3.1) *является $\omega$-периодическим тогда и только тогда, когда оно является решением специального интегрального уравнения*

$$y(t) = \sum_{k=1}^{d}\varphi_k(t)\gamma_k + \int_0^{\omega} G(t,s)f(s,y_s,\mu)\,ds. \quad (3.2)$$

Возможность разделения задач нахождения условий существования и вычисления периодических решений связана с однозначной разрешимостью специального интегрального уравнения.

**Теорема 3.1.** *Существуют такие положительные числа $\mu_0$ и $\gamma_0$, что при $|\mu| < \mu_0$ и $|\gamma_k| < \gamma_0 (k = \overline{1,d})$ уравнение* (3.2) *имеет единственное решение, непрерывно зависящее от параметров $\gamma_1, \ldots, \gamma_d, \mu$.*

При доказательстве теоремы используется принцип сжатых отображений. Малость нелинейной части описывается неравенствами (1.4) и (1.5). Она носит общий характер, так как при выводе неравенств (1.4) и (1.5) в окрестности невозмущенного периодического решения не накладывались дополнительные ограничения на нелинейную функцию $\Phi$.

Пусть $y = y(t,\gamma,\mu)$ – решение уравнения (3.2). Оно периодически зависит от $t$ и удовлетворяет условию $y(t,0,0) = 0$. Введем функции

$$W_k(\gamma,\mu) = \frac{1}{\omega}\int_0^{\omega}\psi_k^*(s)f(s,y_s(\gamma,\mu),\mu)\,ds, \;\; k=\overline{1,d}.$$

**Теорема 3.2.** *Для существования периодического решения $y(t,\mu)$ у системы (1.3), удовлетворяющего условию $y(t,0) = 0$ и непрерывно зависящего от параметра $\mu$ при $|\mu| < \mu_0$, необходимо и достаточно, чтобы система уравнений разветвления*

$$W_k(\gamma,\mu) = 0,\ k = \overline{1,d}, \tag{3.3}$$

*имела решение $\gamma = \gamma(\mu)$, удовлетворяющее условию $\gamma(0) = 0$ и непрерывно зависящее от параметра $\mu$ при $|\mu| < \mu_0$.*

Периодическое решение $y(t,\mu)$ системы (1.3) определяется формулой $y(t,\mu) = y(t,\gamma(\mu),\mu)$, так как на этом решении система (3.1) совпадает с системой (1.3).

Для составления системы уравнений разветвления (3.3) необходимо находить решение интегрального уравнения (3.2). Его можно искать как предел последовательных приближений

$$y(t,\gamma,\mu) = \lim_{m\to\infty} y^m(t,\gamma,\mu).$$

Здесь $y^0(t,\gamma,\mu) = 0$, $y^m(t,\gamma,\mu)$ – $d$-параметрическое семейство $\omega$-периодических решений системы

$$\frac{dy^m(t)}{dt} = \int_{-r}^{0} d\eta(t,s)y^m(t+s) + f(t,y^{m-1}(t,\gamma,\mu),\mu) -$$
$$-\sum_{k=1}^{d} \varphi_k(t)W_k^{m-1}(\gamma,\mu),\ m = 1,2,\ldots, \tag{3.4}$$

где

$$W_k^{m-1}(\gamma,\mu) = \frac{1}{\omega}\int_0^{\omega} \psi_k^*(s)f(s,y_s^{m-1}(\gamma,\mu),\mu)\,ds,\ k = \overline{1,d},\ m = 1,2,\ldots.$$

Положим $G_0 = \sup\limits_{t,s\in[0,\omega]} |G(t,s)|$; $\varphi_0 = \sup\limits_{t\in[0,\omega]} \|\varphi_k(t)\|_1^d$; $\psi_0 = \sup\limits_{t\in[0,\omega]} \|\psi_k(t)\|_1^d$.

**Теорема 3.3.** *Пусть $\varepsilon,\mu_0,\gamma_0$ – положительные числа, для которых выполняются неравенства*

$$\Phi_0\gamma_0 + \omega G_0\Omega(\Phi,\mu_0) \le \varepsilon(1 - \omega G_0\Omega(\frac{\partial\Phi}{\partial x_t},\varepsilon,0)),$$
$$k = \omega G_0\Omega(\frac{\partial\Phi}{\partial x_t},\varepsilon,\mu_0) < 1.$$

*Тогда*

$$W_j(\gamma,\mu) = \lim_{m\to\infty} W_j^m(\gamma,\mu),\ j=\overline{1,d},\ \textit{при}\ |\mu|<\mu_0,\ |\gamma|<\gamma_0.$$

*В указанной области изменения параметров* $\gamma,\mu$ *скорость сходимости определяется неравенствами*

$$|W_j^m(\gamma,\mu) - W_j(\gamma,\mu)| \le \frac{\psi_0\|y^1(\cdot,\gamma,\mu)\|}{\omega G_0(1-k)} k^{m+1},\ j=\overline{1,d},\ m=1,2,\ \dots\ .$$

Предложенная процедура позволяет находить приближенные уравнения разветвления.

## 4. Пример

Рассмотрим систему дифференциальных уравнений с запаздыванием

$$\begin{aligned} \frac{dx_1(t)}{dt} &= x_2(t-\pi) + \nu\sin(t) + 2(\nu-1)\cos(t)x_1^2(t),\\ \frac{dx_2(t)}{dt} &= -x_1(t-\pi) + (3\nu-2)\cos(t) + x_1^3(t-\pi). \end{aligned} \tag{4.1}$$

При значении параметра $\nu=\nu_0=1$ система (4.1) имеет $2\pi$-периодическое решение: $x_1(t)=\chi_1(t)=0$; $x_2(t)=\chi_2(t)=\sin(t)$. После замены (1.2) эта система записывается следующим образом:

$$\begin{aligned} \frac{dy_1(t)}{dt} &= y_2(t-\pi) + \mu\sin(t) + 2\mu\cos(t)y_1^2(t),\\ \frac{dy_2(t)}{dt} &= -y_1(t-\pi) + 3\mu\cos(t) + y_1^3(t-\pi). \end{aligned}$$

В данном случае система (2.6) стационарна и имеет вид

$$\frac{dy_1(t)}{dt} = y_2(t-\pi), \quad \frac{dy_2(t)}{dt} = -y_1(t-\pi). \tag{4.2}$$

Ее характеристическое уравнение $\lambda^2+\exp(-2\pi\lambda)=0$ имеет два чисто мнимых корня: $\lambda=\pm i$. Этой паре чисто мнимых корней отвечает полупростое собственное число $\rho=1$ оператора монодромии. Находим $2\pi$-периодические решения системы (4.2): $\varphi_1(t)=(\cos(t),\sin(t))^\tau$; $\varphi_2(t)=(\sin(t),-\cos(t))^\tau$. В данном примере матричная функция $\eta$ не зависит от $t$, т. е. $\eta(t,s)=\eta(s)$, и ее элементы определяются следующим образом: $\eta_{11}(s)=\eta_{22}(s)=0$; $\eta_{21}(s)=$

$= -\eta_{12}(s) = 1(-\pi - s)$ при $s \le 0$. Системе интегральных уравнений (2.3) в данном примере соответствует система дифференциальных уравнений

$$\frac{dz_1(t)}{dt} = z_2(t+\pi), \quad \frac{dz_2(t)}{dt} = -z_1(t+\pi).$$

Ее периодические решения суть $\psi_1^*(t)=(\cos(t),\sin(t))$, $\psi_2^*(t)=(\sin(t),-\cos(t))$.

Для построения уравнения разветвления используем процедуру последовательных приближений. Система (3.4) при $m=1$ имеет вид

$$\frac{dy^1(t)}{dt} = Ay^1(t-\pi) + f^1(t,\mu) - \varphi_1(t)W_1^0 - \varphi_2(t)W_2^0,$$

где

$$W_j^0 = W_j^0(\gamma,\mu) = \frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi} \psi_j^*(s) f^1(s,\mu)\,ds,\ j=1,2;$$

$$A = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 0 \end{pmatrix}; \quad f^1(t,\mu) = \begin{pmatrix} \mu\sin(t) \\ 3\mu\cos(t) \end{pmatrix}.$$

Находим $W_1^0(\gamma,\mu) = 0$ и $W_2^0(\gamma,\mu) = -\mu$; $y_1^1(t,\gamma,\mu) = \cos(t)\gamma_1 + \sin(t)\gamma_2$ и $y_2^1(t,\gamma,\mu) = -\cos(t)\gamma_2 + \sin(t)(\gamma_1 + 2\mu)$. Система (3.4) при $m=2$ имеет вид

$$\frac{dy^2(t)}{dt} = Ay^2(t-\pi) + f^2(t,\gamma,\mu) - \varphi_1(t)W_1^1 - \varphi_2(t)W_2^1,$$

где

$$W_j^1 = W_j^1(\gamma,\mu) = \frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi} \psi_j^*(s) f^2(s,\gamma,\mu)\,ds,\ j=1,2;$$

$$f_1^2(t,\mu) = \frac{1}{2}\mu(3\gamma_1^2 - \gamma_2^2)\cos(t) + \mu(1+\gamma_1\gamma_2)\sin(t) +$$
$$+\frac{1}{2}\mu(\gamma_1^2 - \gamma_2^2\gamma_2^2)\cos(3t) + \mu\gamma_1\gamma_2\sin(3t),$$

$$f_2^2(t,\mu) = (3\mu - \frac{3}{4}\gamma_1^3 - \frac{3}{4}\gamma_1\gamma_2^2)\cos(t) - \frac{3}{4}(\gamma_1^2\gamma_2 + \gamma_2^3)\sin(t) +$$
$$+(-\frac{1}{4}\gamma_1^3 + \frac{3}{4}\gamma_1\gamma_2^2)\cos(3t) + (-\frac{3}{4}\gamma_1^2\gamma_2 + \frac{1}{4}\gamma_2^3)\sin(3t).$$

Находим

$$W_1^1(\gamma,\mu) = \frac{1}{2}(\frac{3\mu}{2}\gamma_1^2 - \frac{\mu}{2}\gamma_2^2 - \frac{3}{4}\gamma_1^2\gamma_2 - \frac{3}{4}\gamma_2^3),$$

$$W_2^1(\gamma,\mu) = \frac{1}{2}(-2\mu + \mu\gamma_1\gamma_2 + \frac{3}{4}\gamma_1^3 + \frac{3}{4}\gamma_1\gamma_2^2).$$

Эти функции задают систему приближенных уравнений разветвления.

**Литература**

1. Вайнберг М. М., Треногин В. А. Теория ветвления решений нелинейных уравнений. М.: Наука, 1969.

2. Малкин И. Г. Некоторые задачи теории нелинейных колебаний. М.: Гостехиздат, 1956.

3. Казаринов Н., Вэн И. Теория и приложения бифуркации рождения цикла. М.: Мир, 1985.

4. Хэйл Дж. Теория функционально-дифференциальных уравнений. М.: Мир, 1984.

5. Йосс Ж., Джозеф Д. Элементарная теория устойчивости и бифуркаций. М.: Мир, 1983.

6. Шиманов С. Н. Колебания квазилинейных неавтономных систем с неаналитическими характеристиками нелинейности // Прикладная математика и механика. 1957. Т. 21, вып. 2. С. 244–252.

7. Шиманов С. Н. К теории колебаний квазилинейных систем с запаздыванием // Там же. 1959. Т. 23, вып. 5. С. 836–844.

8. Шиманов С. Н. К теории квазилинейных колебаний // Нелинейные задачи в обобщенных функциях. Свердловск: Ин-т математики УрО АН СССР, 1988. С. 85–91.

9. Долгий Ю. Ф., Колупаева О. С. Бифуркация Хопфа для дифференциальных уравнений с малым запаздыванием // Вести. ПГТУ. 1997. №4. (Функционально-дифференциальные уравнения). С. 84–90.

10. Данфорд Н., Шварц Дж. Т. Линейные операторы. Общая теория. М.: Иностр. лит., 1962.

11. Шиманов С. Н. Некоторые вопросы теории колебаний систем с запаздыванием // Пятая летняя математическая школа. Киев: Ин-т математики АН УССР. С. 473–549.

12. Канторович Л. В., Акилов Г. П. Функциональный анализ. М.: Наука, 1977.

*Статья поступила 19.10.2002 г.*