УДК 517.96

М. Г. Близоруков

О РЕШЕНИЯХ ЛИНЕЙНОЙ РАЗНОСТНОЙ СИСТЕМЫ С НЕПРЕРЫВНЫМ ВРЕМЕНЕМ

Работа посвящена распространению методов, разработанных С. Н. Шимановым для дифференциальных уравнений с запаздыванием, на системы разностных уравнений с непрерывным аргументом. Задача об исследовании некоторых вопросов качественного поведения таких систем сводится к аналогичной задаче для конечно-разностных уравнений в функциональных пространствах. Исследованы некоторые вопросы поведения решений в случае периодической зависимости коэффициентов исходной системы от времени при шаге, кратном периоду.

1. Приведение системы линейных разностных уравнений с непрерывным аргументом к функциональному конечно-разностному уравнению

Рассмотрим систему линейных разностных уравнений

$$x(t) = A(t)x(t-\tau), \qquad t > \tau, \tag{1}$$

$$x(t) = \phi(t), \qquad 0 \le t \le \tau,$$

где $x(t)$ – вектор-функция времени $t \in \mathbb{R}$; $A(t)$ – матрица размерности $m \times m$, элементы которой суть непрерывные ограниченные функции t; τ – постоянное запаздывание $\tau \in \mathbb{R}$; $\phi(t)$ – начальная вектор-функция, определенная на отрезке действительной оси $[0,\tau]$, из некоторого функционального пространства $H[0,\tau]$.

Используя подход, предложенный Н. Н. Красовским [1, гл. 6] для дифференциальных уравнений с запаздыванием, перейдем от системы (1) к соответствующей конечно-разностной системе в подходящем функциональном пространстве. Для этого произведем замену переменной по формуле

$$t = \theta + n\tau, \qquad 0 \le \theta \le \tau, \tag{2}$$

где n – целое число отрезков длины τ, содержащихся в $[0,t]$; $\theta \in \mathbb{R}$; $\theta = t - n\tau$. Тогда $x(t) = x(\theta + n\tau)$ можно трактовать как последовательность $x_\theta(n)$ элементов пространства $H[0,\tau]$, а матрицу функций $A(t)$ – как последовательность операторов A_n, действующих на элементах из $H[0,\tau]$. Уравнение (1) перейдет в уравнение

$$x_\theta(n) = A_n(x_\theta(n-1)), \qquad x_\theta(0) = \phi(\theta) \in H[0,\tau], \tag{3}$$

которое, с одной стороны, может быть исследовано на основании результатов, известных для разностных уравнений с дискретным аргументом, с другой стороны, эквивалентно (1).

При $\phi \in C[0,\tau]$ решение системы (1) будет непрерывным внутри интервалов $(k\tau,(k+1)\tau)$. Непосредственным подсчетом можно показать, что условие

$$\phi(\tau - 0) = A(\tau)\phi(0) \tag{4}$$

будет гарантировать непрерывность решения (1) в точках $t = \tau k$ при любых целых k. Таким образом, при выполнении (4) решение (1) будет непрерывно на всем $\mathbb{R}^+$. Если же $\phi(t) \in C^1[0,\tau]$, а элементы матрицы $A(t)$ – непрерывно дифференцируемые на $\mathbb{R}^+$ функции, то нетрудно показать, что выполнение (4) и

$$A'(\tau)\phi(0) + A(\tau)\phi'(0) = \phi'(\tau - 0) \tag{5}$$

будет необходимым и достаточным условием для непрерывной дифференцируемости решения $x(t)$ системы (1) на $\mathbb{R}^+$.

Обозначим через $\widetilde{C}[0,\tau]$ подмножество функций из $C[0,\tau]$, удовлетворяющих (4), и введем в $\widetilde{C}[0,\tau]$ обычную норму $\|x_\theta\| = \max\limits_{0\le\theta\le\tau} |x_\theta|$. Покажем, что для любого элемента $\psi(\theta)$ из дополнения $\widetilde{C}[0,\tau]$ до $C[0,\tau]$ найдется такое положительное $\varepsilon \in \mathbb{R}^+$, что в ε-окрестности $\psi(\theta)$ нет ни одного элемента $\widetilde{C}[0,\tau]$. Пусть $\psi(\theta) \in C[0,\tau]$ и $|\psi(\tau) - A\psi(0)| \ge \delta > 0$, выберем такой элемент $\varphi(\theta) \in \widetilde{C}[0,\tau]$, что $\psi(0) = \varphi(0)$. Тогда, положив $\varepsilon = \delta/2$, получим $\|\psi - \varphi\| = \max\limits_{0\le\theta\le\tau} |\psi(\theta) - \varphi(\theta)| \ge |\psi(\tau) - \varphi(\tau)| \ge \delta > \varepsilon$. Из этого следует, что $\widetilde{C}[0,\tau]$ замкнуто, а следовательно, как подмножество полного метрического пространства $C[0,\tau]$ полно. Кроме того, $\widetilde{C}[0,\tau]$ линейно, что следует из линейности условия (4), определяющего отбор элементов в $\widetilde{C}[0,\tau]$. Таким образом, $\widetilde{C}[0,\tau]$ – банахово пространство. Подпространство $\widetilde{C}^1[0,\tau]$ пространства $C^1[0,\tau]$ с ограничениями (4), (5) и нормой $\|x_\theta\| = \max\limits_{0\le\theta\le\tau} |x_\theta| + \max\limits_{0\le\theta\le\tau} |\dot{x}_\theta|$ также будет банаховым. Аналогичные рассуждения справедливы и для случая, когда в качестве исходного пространства выбирается $L_2[0,\tau]$ при условии, что операторы $A(t)$ и $A^{-1}(t)$ измеримы и ограниченны. Всюду в дальнейшем под банаховым пространством $H[0,\tau]$ будем понимать один из вышеперечисленных вариантов.

2. Решения линейной системы с периодическими коэффициентами. Сопряженная система

Будем в дальнейшем полагать, что $A(t)$ является T-периодической по t матрицей-функцией и что T и τ соизмеримы ($T = N\tau$). Тогда, как легко показать, последовательность операторов A_n – периодическая по n с периодом $N \in \mathbb{N}$.

Решение $x_\theta(n)$ уравнения (3) с начальным условием $x^0_\theta(0) = \phi(\theta)$ может быть записано в явном виде: $x_\theta(n) = A_n(A_{n-1}(\dots A_{n_0+1}(\phi(\theta)))\dots)$, а в обозначениях исходной системы (1)

$$x(t) = A(t)A(t-\tau)\dots A(t-(n-1)\tau)\phi(t-n\tau),\ t \geq \tau,\ n = \left[\frac{t}{\tau}\right].$$

Оператор Коши системы (3) действует в $H[0,\tau]$ и определяется равенствами

$$X_{n_0,n} = A_n(A_{n-1}(\dots A_{n_0+1})\dots), \qquad X_{n_0,n_0} = E, \tag{6}$$

где E – тождественный оператор. Через U_n обозначим оператор монодромии (оператор сдвига) системы (3): $U_n = X_{n,n+N}$.

Используя методы, разработанные С. Н. Шимановым в [4] для исследования эволюционного оператора систем дифференциальных уравнений с запаздыванием, можно проверить справедливость ряда свойств оператора (6).

Теорема 1. *Оператор Коши уравнения* (3) (*системы* (1)) *обладает следующими свойствами:*

1) $X_{n_0,n} \in \mathcal{B}(H)$ – *линейный ограниченный оператор;*

2) $X_{n_0,n+n_1} = X_{n,n+n_1}\ X_{n_0,n},\quad n_1 \geq 0,\ n \geq n_0;$

3) $X_{n_0,n+N} = X_{n_0,n}U_{n_0};$

4) *там, где определен оператор* $X^{-1}_{n_0,n}$, *справедливо равенство*

$$U_n = X_{n_0,n}U_{n_0}X^{-1}_{n_0,n}.$$

Доказательство. Линейность $X_{n_0,n}$ является непосредственным следствием линейности операторов A_n при каждом n. Операторы A_n являются ограниченными равномерно по n. Действительно, пусть, например, $x_\theta \in L_2[0,\tau]$, тогда [5, с. 40]

$$\|A_n(x(\theta)\|_{L_2} = \Big[\int_0^T A^T(n\tau+\theta)A(n\tau+\theta)x(\theta)\overline{x(\theta)}\,d\theta\Big]^{\frac{1}{2}} \leq \alpha L\|x_\theta\|_{L_2},$$

где $L + \max_{i,j}\sup_t|a_{ij}(t)|$; α – некоторое положительное число; $a_{ij}(t)$ – элементы матрицы $A(t)$. Если же $x_\theta \in C[0,\tau]$, то

$$\|A_n(x_\theta)\|_C = \max_{0\leq\theta\leq\tau}|A(n\tau+\theta)x(\theta)| \leq \beta L\|x_\theta\|_C.$$

Оператор $X_{n_0,n}$ ограничен, как суперпозиция конечного числа ограниченных операторов.

Справедливость свойства 2 вытекает непосредственно из представления (6). Справедливость свойства 3 следует из цепочки равенств

$$X_{n_0,n+N} = A_{n+N}(A_{n-1+N}(\ldots A_{n_0+1+N}(A_{n_0+N}\ldots(A_{n_0})\ldots))\ldots) =$$

$$= A_n(A_{n-1}(\ldots A_{n_0+1}(U_{n_0}))\ldots) = X_{n_0,n}(U_{n_0}),$$

где использована N-периодичность последовательности операторов $\{A_n\}$. Существование оператора $X^{-1}_{n_0,n}$ следует из обратимости операторов A_N. Справедливость свойства 4 вытекает из свойств 2, 3 с последующим применением оператора $X^{-1}_{n_0,n}$ к обеим частям получающегося равенства. Таким образом, теорема доказана.

На основании (2) и (6) эти результаты легко интерпретировать в терминах матрицы Коши исходной системы

$$X(t_0,t) = A(t)A(t-\tau)\ldots A(t_0+\tau),\ X(t_0,t_0) = E$$

и монодромии

$$U(t) = X(t,t+N) = A(t+N)A(t+N-\tau)\ldots A(t+\tau)$$

для системы (1).

Если матрица-функция $A(t)$ измерима и ограничена вместе с обратной (или $\det A(t) \neq 0$ для любого t), то, как отмечалось выше, оператор $X^{-1}_{n_0,n}$ (линейный и ограниченный по теореме Банаха об обратном операторе [6, с. 255]) определен всюду в $H[0,\tau]$. Тогда решение уравнения (3), а вместе с ним и решение уравнения (1) может быть продолжено назад на отрицательную полуось $(-\infty,0]$ по шагам: $x(t-\tau) = A^{-1}(t)x(t)$, соответственно $x_\theta(n-1) = A_n^{-1}(x_\theta(n))$. Тогда n можно считать любым целым (в том числе и отрицательным), в частности, можно снять ограничение на n и n_1 в свойстве 2 (теорема 1). Последнее позволяет ввести оператор $X^{-1}_{n_0,n}$ так же, как это сделано в [3], а именно непосредственно на основании свойства 2. Действительно, при $n_0 = n + n_1$ с учетом $X_{n_0,n_0} = E$ получим, что существует оператор, обратный к $X_{n_0,n}$, и он равен $X^{-1}_{n_0,n} = X_{n,n_0}$. Следует также отметить, что наличие линейного ограниченного обратного к $X_{n_0,n}$ оператора влечет невозможность компактности оператора Коши уравнения (3).

Система

$$y_\theta(n-1) = A_n^*(y_\theta(n)) \tag{7}$$

является сопряженной к (3), здесь A_n^* – оператор, сопряженный к A_n. Имеет место первый интеграл $(x_\theta(n), y_\theta(n)) = \text{const}$. Возвращаясь к переменной t, запишем систему, сопряженную к (1):

$$y(t-\tau) = y(t)A(t),$$

где $y(t)$ – вектор-строка. Очевидно, что для (1) также имеет место первый интеграл $y(t)x(t) = \text{const}$.

Оператор Коши Y_{n,n_0} для (7) может быть получен в явном виде:

$$Y_{n,n} = E,\ Y_{n,n_0} = A_{n_0+1}^*(A_{n_0+2}^*(\dots(A_n^*)\dots)).$$

При этом $Y_{n,n_0} = (X_{n_0,n})^*$.

Система (7) является системой с опережением времени, ее решение строится «назад» в отличие от решения системы (3), построенного «вперед». Оператор Коши Y_{n,n_0} системы (6) обладает всеми свойствами, присущими оператору $X_{n_0,n}$ (см. теорему 1), в частности, он линеен и ограничен.

Литература

1. Красовский Н. Н. Некоторые задачи теории устойчивости движения. М.: Наука, 1959.
2. Данфорд Н., Шварц Дж. Линейные операторы. Общая теория. М.: Иностр. лит., 1962.
3. Долгий Ю. Ф., Леонтьева Т. Б. Устойчивость разностных систем с непрерывным временем. Свердловск, 1984. Деп. ВИНИТИ 11.03.84, №4765-84.
4. Шиманов С. Н. К теории линейных дифференциальных уравнений с периодическими коэффициентами и запаздыванием времени // Прикладная математика и механика. 1963. Т. 27, вып. 3. С. 450–458.
5. Като Т. Теория возмущений линейных операторов. М.: Мир, 1972.
6. Колмогоров А. Н., Фомин С. В. Элементы теории функций и функционального анализа. М.: Наука, 1981.

Статья поступила 19.06.2002 г.