УДК 517.977.52/54

Н. Н. Субботина

ОБОБЩЕННОЕ УРАВНЕНИЕ ВЕЛЛМАНА В ЗАДАЧЕ ОПТИМАЛЬНОГО УПРАВЛЕНИЯ С ЛОКАЛЬНО ЛИПШИЦЕВЫМИ ВХОДНЫМИ ДАННЫМИ*

1. Постановка задачи оптимального управления

Рассмотрим задачу оптимального управления системой, динамика которой описывается уравнением

$$\dot{x} = f(t, x, u), \quad u \in P, \quad x(t_0) = x_0, \tag{1.1}$$

где t – время, $t \in [0, T]$; $x \in \mathbb{R}^n$ – фазовый вектор системы; значения управляющего параметра u выбираются из заданного компактного множества $P \subset \mathbb{R}^m$; начальное состояние системы $x(t_0) = x_0$, $t_0 \in [0, T]$, $x_0 \in \mathbb{R}^n$. Фиксирован момент окончания процесса управления T и задан функционал платы $I_{t_0,x_0}(x(\cdot))$ типа Майера:

$$I_{t_0,x_0}(x(\cdot)) = \sigma(x(T; t_0, x_0, u(\cdot))) \ \to \min_{u(\cdot)}, \tag{1.2}$$

где $x(\cdot)$ – траектория динамической системы (1.1), стартующая из начальной точки (t_0, x_0) под воздействием измеримого управления $u(\cdot) : [t_0, T] \to P$.

Задача оптимального управления (далее *ЗОУ*) [1–8] состоит в управлении системой (1.1) таким образом, чтобы обеспечить оптимальный результат (цену) $V(t_0, x_0)$, который определяется следующим соотношением:

$$V(t_0, x_0) = \inf_{u(\cdot)\in \mathbf{U}} I_{t_0,x_0}(x(\cdot; t_0, x_0, u(\cdot))) \tag{1.3}$$

для начальной точки $(t_0, x_0) \in [0, T] \times \mathbb{R}^n$. Символом U обозначается множество всех измеримых управлений $u(\cdot) : [0, T] \to P$. Задача рассматривается в полосе $\tilde{\Gamma}_T = [0, T] \times \mathbb{R}^n$, где $\Gamma_T = (0, T) \times \mathbb{R}^n$.

Отображение

$$(t_0, x_0) \mapsto V(t_0, x_0) : \tilde{\Gamma}_T \mapsto \mathbb{R}$$

называется *функцией цены* (функцией оптимального результата или функцией Беллмана) в рассматриваемой *ЗОУ*.

*Работа выполнена при поддержке грантов РФФИ №00-15-96057, 00-01-00753.

1.1. Основные предположения

Предположим, что исходные данные рассматриваемой *ЗОУ* удовлетворяют следующим условиям.

A1. Функция $f(t,x,u)$ в (1.1) непрерывна при $(t,x,u) \in \tilde{\Gamma}_T \times P$ и равномерно липшицева относительно (t,x), т. е.

$$\|f(t',x',u) - f(t'',x'',u)\| \leq L_f\big(|t'-t''| + \|x'-x''\|\big)$$

для любых $t',t'' \in [0,T],\ x',x'' \in \mathbb{R}^n,\ u \in P$ с константой $L_f > 0$.

A2. Выполнены следующие условия продолжимости:

$$\|f(t,x,u)\| \leq K_f(1+\|x\|)$$

при всех $(t,x,u) \in \tilde{\Gamma}_T \times P$, где $K_f > 0$ – константа.

A3. Терминальная функция платы $\sigma(x)$ в (1.2) удовлетворяет условию Липшица

$$|\sigma(x') - \sigma(x'')| \leq L_\sigma\|x'-x''\|$$

при любых $x',x'' \in \mathbb{R}^n$, где $L_\sigma > 0$ – константа.

Известно, что оптимальный результат (1.3) в *ЗОУ* может быть недостижим на множестве U программных управлений. Он достигается [2,4,9,10] на расширении U – на множестве M всех обобщенных программных управлений, т. е. измеримых функций $\mu(\cdot \mid du) : [0,T] \to \mathrm{rpm}(P)$ со значениями во множестве регулярных вероятностных мер, определенных на P [4]. При этом траектория $x(\cdot) = x(\cdot, t_0, x_0, \mu(\cdot \mid du))$ системы (1.1), порожденная обобщенным управлением $\mu := \mu(\cdot \mid du)$, является решением уравнения

$$\dot{x}(t) = \int_P f(t,x(t),u)\mu(t|du), \quad x(t_0) = x_0, \quad t \in [t_0,T], \tag{1.4}$$

а соответствующее значение функционала платы подсчитывается следующим образом:

$$I_{t_0,x_0}(x(\cdot;t_0,x_0,\mu(\cdot \mid du))) = \sigma(x(T;t_0,x_0,\mu(\cdot \mid du))). \tag{1.5}$$

Известно [4], что множества M_{t_0}, $t_0 \in [0,T]$, состоящие из всех измеримых функций $\mu(\cdot \mid du) : [t_0,T] \to \mathrm{rpm}(P)$, являются метрическими компактами. Таким образом, при программной постановке задачи (1.1)–(1.2) справедливы

1.2. Основные утверждения

Утверждение 1. *Если выполненены условия A1–A3, то для всех* (t_0,x_0) *из* $\tilde{\Gamma}_T$ *выполняются соотношения*

$$\inf_{u(\cdot)\in U} I_{t_0,x_0}(x(\cdot;t_0,x_0,u(\cdot))) = \min_{\mu(\cdot|du)\in M_{t_0}} I_{t_0,x_0}(x(\cdot;t_0,x_0,\mu(\cdot \mid du))),$$

т. е. задача всегда имеет решение $\mu^0(\cdot \mid du)$ *в классе обобщенных программных управлений* $\mu(\cdot \mid du) \in M_{t_0}$.

Рассмотрим дифференциальное включение

$$\begin{gathered}\dot{x}(t) \in \tilde{E}(t, x(t)), \quad t \in [t_0, T], \\ x(t_0) = x_0; \quad (t_0, x_0) \in D \subset \tilde{\Gamma}_T,\end{gathered} \tag{1.6}$$

где

$$\tilde{E}(t, x) := \mathrm{co}\{(f(t, x, u) : u \in P\} = \mathrm{co}E(t, x), \tag{1.7}$$

а символ co$E$ обозначает выпуклую замкнутую оболочку множества $E \in \mathbb{R}^n$.

Множество всех решений $x(\cdot) : [t_0, T] \to \mathbb{R}^n$ дифференциального включения (1.6), удовлетворяющих начальному условию $x(t_0) = x_0$, обозначим символом $\mathrm{Sol}(t_0, x_0)$. В теории дифференциальных включений известно (см. [9, 10]), что при выполнении предположений *A1–A2* для любой начальной точки $(t_0, x_0) \in D$ существует решение этого дифференциального включения $x(\cdot)$, продолжимое на $[t_0, T]$. Более того, для любой компактной области $D \subset \tilde{\Gamma}_T$ начальных значений $(t_0, x_0) \in D$ существует такой компакт $Q_{n+1}(D) \subset \tilde{\Gamma}_T$, который содержит все точки $(t, x(t))$, $t \in [t_0, T]$ всех решений дифференциального включения (1.6).

Замечание 1. *При выполнении условий A1–A2 непрерывная функция* $f(\cdot)$ *ограничена некоторой константой* $K^0 = K^0(D) > 0$ *на компакте* $Q^0(D) \times P$, *где* $Q^0(D) := Q_{n+1}(D)$.

Очевидно, что $D \subset Q^0(D) \subset \tilde{\Gamma}_T$. Из замечания 1 вытекает также, что функция $f(\cdot)$ равностепенно непрерывна на компакте $Q^0(D) \times P$.

Утверждение 2. [9] *При выполнении условий A1–A2 множество* $\mathrm{Sol}(t_0, x_0)$ *всех решений дифференциального включения* (1.6) *совпадает при всех* (t_0, x_0) *из* $\tilde{\Gamma}_T$ *с множеством всех траекторий* $x(t) = x(t; t_0, x_0, \mu(\cdot \mid du))$ *обобщенного дифференциального уравнения* (1.4), *где* $\mu(\cdot \mid du) : [t_0, T] \to \mathrm{rpm}(P)$ – *обобщенное программное управление.*

2. Свойства гладкости функции цены

Функция цены $V(t, x)$ играет ключевую роль в исследовании и решении *ЗОУ* и связанной с ней задачи Коши для уравнения Веллмана – уравнения в частных производных первого порядка типа Гамильтона–Якоби (см. [1–3, 5, 8, 11–19] и т. д.).

2.1. Дифференцируемость по направлению негладких функций

Приведем некоторые понятия негладкого анализа [7,13,15,20–22], которые будут использоваться далее в статье.

Определение 1. *Нижней полупроизводной Дини* функции $\omega(t,x) : \tilde{\Gamma}_T \to \mathbb{R}$ в точке $(t,x) \in \Gamma_T$ по направлению $(\eta, h) \in \mathbb{R} \times \mathbb{R}^n$ называется величина

$$d^-\omega(t,x)/(\eta,h) = \liminf_{\delta\downarrow 0,\ (\eta',h')\to(\eta,h)} \delta^{-1}[\omega(t+\delta\eta', x+\delta h') - \omega(t,x)], \tag{2.1}$$

соответственно *верхней полупроизводной Дини* функции $\omega(t,x) : \tilde{\Gamma}_T \to \mathbb{R}$ в точке $(t,x) \in \Gamma_T$ по направлению $(\eta,h) \in \mathbb{R} \times \mathbb{R}^n$ называется величина

$$d^+\omega(t,x)/(\eta,h) = \limsup_{\delta\downarrow 0,\ (\eta',h')\to(\eta,h)} \delta^{-1}[\omega(t+\delta\eta', x+\delta h') - \omega(t,x)]. \tag{2.2}$$

Определение 2. *Субдифференциалом (регулярным)* функции $\omega(t,x) : \tilde{\Gamma}_T \to \mathbb{R}$ в точке $(t,x) \in \Gamma_T$ называется множество $\partial^-\omega(t,x)$ всех таких пар (ρ,p) из $\mathbb{R} \times \mathbb{R}^n$, что для всех $(\eta,h) \in \mathbb{R} \times \mathbb{R}^n$

$$\langle(\rho,p),(\eta,h)\rangle - d^-\omega(t,x)/(\rho,p) \le 0; \tag{2.3}$$

соответственно *супердифференциалом (регулярным)* функции $\omega(t,x) : \tilde{\Gamma}_T \to \mathbb{R}$ в точке $(t,x) \in \Gamma_T$ называется множество $\partial^+\omega(t,x)$ всех таких пар (ρ,p) из $\mathbb{R} \times \mathbb{R}^n$, что для всех $(\eta,h) \in \mathbb{R} \times \mathbb{R}^n$

$$\langle(\rho,p),(\eta,h)\rangle - d^+\omega(t,x)/(\eta,h) \ge 0, \tag{2.4}$$

символ $\langle\cdot,\cdot\rangle$ означает скалярное произведение.

2.2. Репрезентативная формула для функции цены в задаче оптимального управления

Опишем структуру функции цены $V(t,x)$ в *ЗОУ* (1.1)–(1.3).

Теорема 1. *Функция цены $V(t,x)$ в ЗОУ имеет следующее представление:*

$$V(t,x) = \min_{\alpha\in A} \omega(t,x,\alpha) \tag{2.5}$$

для всех $(t,x) \in \tilde{\Gamma}_T$, где параметр α принимает значения из метрического компакта A. Функция $\omega(\cdot)$ непрерывна на множестве $\tilde{\Gamma}_T \times A$. При фиксированном значении параметра α функции $(t,x) \to \omega(t,x,\alpha)$ удовлетворяют условию Липшица на любом компакте $Q \subset \tilde{\Gamma}_T$ с константой $L = L(Q) > 0$, равномерной относительно $\alpha \in A$.

Доказательство. Сконструируем функции $(t,x) \to \omega(t,x,\alpha)$ следующим образом (см. [16, 19]). Пусть $\alpha : \tau \to \alpha(\tau \mid du)$ – измеримая функция, определенная на интервале $[0,1]$, значениями которой являются регулярные вероятностные меры на множестве $P \ni u$, т. е. функция $\alpha = \alpha(\cdot \mid du)$ является *обобщенным программным управлением* в *ЗОУ* (см. [4]). Известно [4], что множество A всех таких обобщенных управлений α является метрическим компактом. Определим

$$\omega(t,x,\alpha) = \sigma(y(1;0,x,\alpha;t)) = \sigma(y(1)), \tag{2.6}$$

где абсолютно непрерывные функции $y(\cdot;0,x,\alpha;t):\ [0,1]\to\mathbb{R}^n$ – траектории системы

$$\dot{y} = -(T-t)\int_P f(\xi(t,\tau),y(\tau),u)\alpha(\tau|du) \tag{2.7}$$

с начальным условием $y(0)=x$. Здесь t играет роль параметра, а $\xi(t,\tau)$ – линейное преобразование $[0,1]\to[t,T]$ вида

$$\xi(t,\tau) = t+(T-t)\tau. \tag{2.8}$$

Свойства функций $\omega(t,x,\alpha)$, заявленные в теореме 1, являются следствием предположений *A1–A3* и свойств решений обыкновенных дифференциальных уравнений (2.7),(2.8) (см., например, [4]).

Из того, что функция цены является нижней огибающей (см. (2.5)) семейства функций $(t,x)\to\omega(t,x,\alpha)$, равномерно (по параметру α) локально липшицевых, а также из компактности множества $A\ni\alpha$ следует

Теорема 2 [7]. *Функция цены в ЗОУ является локально липшицевой, т. е. удовлетворяет условию Липшица на любом компакте* $Q\subset\tilde{\Gamma}_T$ *с константой* $L=L(Q)>0$.

Согласно теореме Радемахера локально липшицева функция дифференцируема почти всюду. Следовательно, почти всюду в полосе Γ_T при выборе любого вектора $f\in\mathbb{R}^n$ для функции цены справедливы следующие соотношения:

$$dV(t,x)/(1,f) = d^{\pm}V(t,x)/(1,f) = \langle \partial V(t,x)/\partial(t,x),\ (1,f)\ \rangle. \tag{2.9}$$

3. Функция цены и минимаксное решение уравнения Беллмана

3.1. Предварительные сведения

Хорошо известно [1], что функция цены $V(t,x)$ в *ЗОУ* удовлетворяет в точках дифференцируемости (t,x) (в регулярных точках) следующему уравнению Беллмана:

$$\partial V(t,x)/\partial t + \min_{u\in P}\langle \partial V(t,x)/\partial x, f(t,x,u)\rangle = 0, \tag{3.1}$$

а также краевому условию

$$V(T,x) = \sigma(x), \quad \forall x \in \mathbb{R}^n. \tag{3.2}$$

Здесь $\partial V(t,x)/\partial x = (\partial V(t,x)/\partial x_1, \ldots, \partial V(t,x)/\partial x_n)$,

ЗОУ рассматривается в предположении выполнения условий *A1–A3*, при которых функция цены, как показано выше, локально липшицева. Следовательно, эта функция почти всюду дифференцируема в области $(0,T) \times \mathbb{R}^n$ и почти всюду удовлетворяет уравнению Беллмана (3.1), а значит, является обобщенным решением задачи Коши (3.1)–(3.2).

ЗОУ можно также трактовать как дифференциальную игру [11, 23, 24] с фиктивным вторым игроком v, т. е. можно формально заменить уравнения движения (1.1) на уравнение

$$\dot{x}(t) = f(t,x,u) + v, \quad u \in P,\ v \in Q = \{0\} \in \mathbb{R}^n, \tag{3.3}$$

где множество Q состоит из единственного нулевого вектора, и рассматривать в качестве функционала платы снова (1.2).

Для любой начальной точки $(t_0, x_0) \in [0,T] \times \mathbb{R}^n$ цена позиционной дифференциальной игры (3.3), (1.2), согласно классической формализации [3,18,24], существует и совпадает с оптимальным результатом $V(t_0,x_0)$ в *ЗОУ* [3]. Используя эти свойства, привлекаем из теории позиционных дифференциальных игр [16, 18] следующий факт о функции цены $V(t,x)$ в *ЗОУ*.

Утверждение 3. *Локально липшицева функция $V'(t,x) : \tilde{\Gamma}_T \to \mathbb{R}$ совпадает с функцией цены в ЗОУ тогда и только тогда, когда во всех точках (t,x) из $\in \Gamma_T$ выполнены условия*

$$\min_{u \in P} d^+ V'(t,x)/(1, f(t,x,u)) \geq 0 \geq \min_{(f,g) \in \tilde{E}(t,x)} d^- V'(t,x)/(1,f), \tag{3.4}$$

где

$$\tilde{E}(t,x) := \mathrm{co}\{f(t,x,u) :\ u \in P\}, \tag{3.5}$$

и краевое условие

$$V'(T,x) = \sigma(x), \quad \forall x \in \mathbb{R}^n. \tag{3.6}$$

Напомним определения обобщенных (минимаксных и вязкостных) решений задачи Коши (3.1)–(3.2) (см. [15, 18]).

Определение 3. Непрерывная функция $V'(t,x) : \tilde{\Gamma}_T \to \mathbb{R}$ называется *минимаксным* решением задачи Коши (3.1)–(3.2), если при всех $(t,x) \in \Gamma_T$ справедливы дифференциальные неравенства

$$\min_{u \in P} d^+ V'(t,x)/(1, f(t,x,u)) \geq 0 \geq \min_{(f,g) \in \tilde{E}(t,x)} d^- V'(t,x)/(1,f), \tag{3.7}$$

где
$$\tilde{E}(t,x) := \mathrm{co}\{f(t,x,u) : u \in P\}, \tag{3.8}$$
и выполняется краевое условие
$$V'(T,x) = \sigma(x), \quad \forall x \in \mathbb{R}^n. \tag{3.9}$$

Определение 4. Непрерывная функция $V'(t,x) : \tilde{\Gamma}_T \to \mathbb{R}$ называется *вязкостным* решением задачи Коши (3.1)–(3.2), если во всех тех точках (t,x) из Γ_T, где существуют субдифференциал $\partial^- V'(t,x)$ и/или супердифференциал $\partial^+ V'(t,x)$, справедливы дифференциальные неравенства
$$\rho + \min_{u\in P}\langle p, f(t,x,u)\rangle \le 0, \quad \forall(\rho,p) \in \partial^- V'(t,x); \tag{3.10}$$
$$\rho + \min_{f\in\tilde{E}(t,x)}\langle p, f\rangle \ge 0, \quad \forall(\rho,p) \in \partial^+ V'(t,x), \tag{3.11}$$
где
$$\tilde{E}(t,x) := \mathrm{co}\{f(t,x,u) : u \in P\}, \tag{3.12}$$
и выполняется краевое условие
$$V'(T,x) = \sigma(x), \quad \forall x \in \mathbb{R}^n. \tag{3.13}$$

Следующий известный факт теории обобщенных решений уравнений Гамильтона–Якоби [6, 15, 18] связывает функцию цены $V(t,x)$ (1.3) в *ЗОУ* и обобщенное (минимаксное и/или вязкостное) решение $V'(t,x)$ задачи Коши (3.2) для уравнения Гамильтона–Якоби–Беллмана (3.1).

Утверждение 4. *Если в ЗОУ выполнены условия A1–A3, то существует и единственно минимаксное (и/или вязкостное) решение* $V'(t,x) : \tilde{\Gamma}_T \to \mathbb{R}$ *в соответствующей задаче Коши* (3.2) *для уравнения Гамильтона–Якоби–Беллмана* (3.1), *и оно совпадает с функцией цены* $V(t,x)$ *в исходной ЗОУ.*

3.2. Обобщенное уравнение Беллмана

Докажем справедливость следующего утверждения (см. аналогичное утверждение в [16, 19]).

Теорема 3. *Локально липшицева функция* $V'(t,x) : \tilde{\Gamma}_T \to \mathbb{R}$ *совпадает с функцией цены* $V(t,x)$ *в ЗОУ тогда и только тогда, когда во всех точках* $(t,x) \in \Gamma_T$ *выполнены равенства*
$$\min_{f\in\tilde{E}(t,x)} d^{\pm} V'(t,x)/(1,f) = 0, \tag{3.14}$$
где $\tilde{E}(t,x) := \mathrm{co}\{f(t,x,u) : u \in P\}$, *и краевое условие*
$$V'(T,x) = \sigma(x), \quad \forall x \in \mathbb{R}^n. \tag{3.15}$$

Доказательство. *Необходимость условий* (3.14)–(3.15). Согласно постановке *ЗОУ* для любой точки $(t_0, x_0) \in \Gamma_T$ и любого обобщенного управления $\mu(\cdot \mid du) \in M$ в паре с порождаемой им траекторией $x(\cdot) = x(\cdot; t_0, x_0, \mu(\cdot \mid du))$ справедливо

$$V(t_0 + \delta, x(t_0 + \delta)) \geq V(t_0, x_0), \quad \delta > 0, \tag{3.16}$$

причем

$$x(t_0 + \delta) = x_0 + \int_{t_0}^{t_0+\delta} \int_P f(\tau, x(\tau), u)\mu(\tau|du)d\tau. \tag{3.17}$$

Используя (3.16) и определения $d^{\pm}V(t,x)/(1,f)$, получим, что в точке (t_0, x_0) для произвольного вектора $f \in E(t_0, x_0)$ выполняются неравенства

$$d^{\pm}V(t_0, x_0)/(1, f) \geq 0. \tag{3.18}$$

Согласно принципу оптимальности и утверждениям 1 и 2 вдоль любой оптимальной траектории $x^0(\cdot) = x(\cdot; t_0, x_0, \mu^0) \in \mathrm{Sol}(t_0, x_0)$ верны равенства

$$V(t, x^0(t)) = V(t_0, x_0), \quad \forall\, t \in [t_0, T]. \tag{3.19}$$

Условия (3.18) и (3.19) влекут за собой выполнение равенства

$$\min_{f \in E(t_0, x_0)} d^{\pm}V(t_0, x_0)/(1, f) = 0 \tag{3.20}$$

в произвольной точке $(t_0, x_0) \in \Gamma_T$. Тем самым необходимость выполнения условия (3.14) доказана. Справедливость выполнения для функции цены краевого условия (3.15) следует из ее определения.

Достаточность условий (3.14)–(3.15). Если для локально липшицевой функции $V'(t,x)$ выполняются условия (3.14)–(3.15), то при всех $(t,x) \in \Gamma_T$, согласно определениям $E(t,x)$, $d^+V'(t,x)/(1,f)$ и $d^-V'(t,x)/(1,f)$, выполняются также условия (3.4)

$$\begin{gathered}
\min_{u \in P} d^+V'(t,x)/(1, f(t,x,u)) \geq 0 = \\
= \min_{f \in \tilde{E}(t,x)} d^+V'(t,x)/(1,f) = \min_{f \in \tilde{E}(t,x)} d^-V'(t,x)/(1,f).
\end{gathered} \tag{3.21}$$

Согласно утверждению 3, эти условия достаточны для совпадения функции $V'(t,x)$ с функцией $V(t,x)$ цены в *ЗОУ*. Теорема 3 доказана.

Замечание 2. *Равенства* (3.14), *в силу* (2.9), *обращаются в уравнение Беллмана* (3.1) *в тех точках* (t,x), *где функция цены дифференцируема, так что эти равенства можно рассматривать как обобщение уравнения Беллмана.*

Замечание 3. *В силу теоремы* 3 *и утверждения* 4 *минимаксное* (*и/или вязкостное*) *решение* $V'(t,x) : \tilde{\Gamma}_T \to \mathbb{R}$ *задачи Коши* (3.2) *для уравнения Беллмана* (3.1) *во всех точках* $(t,x) \in \Gamma_T$ *удовлетворяет обобщенному уравнению Беллмана* (3.14).

4. Заключение

В работе приведено обоснование метода динамического программирования в задаче оптимального управления (1.1)–(1.3) с локально липшицевой динамикой (1.1) и локально липшицевой функцией цены $V(t,x)$ (1.3).

Получено обобщение уравнения Веллмана

$$\min_{f\in\ \tilde{E}(t,x)} \ d^{\pm}V(t,x)/(1,f)=0, \tag{4.1}$$

где $\tilde{E}(t,x) := \mathrm{co}\{f(t,x,u) : u \in P\}$, в терминах полупроизводных Дини $d^{\pm}V(t,x)/(1,f)$ по направлениям $(1,f) \in \mathbb{R}^{n+1}$, причем (4.1) выполняется во всех точках $(t,x) \in \Gamma_T$. Последнее обстоятельство позволяет использовать соотношения (4.1) для построения в *ЗОУ* оптимального синтеза, т. е. оптимального управления по принципу обратной связи (см. [19]).

Здесь не предполагаются ни существование непрерывных частных производных по (t,x) функции $f(t,x,u)$, использовавшееся в [16], ни свойство «полувыпуклости» функции $f(t,x,u)$ в (1.1), использующееся в [17]. Эти предположения обеспечивали свойство дифференцируемости по направлениям функции цены $V(t,x)$. Результаты, полученные в данной работе, обоснованы для более общего случая локально липшицевых исходных данных задачи оптимального управления и, как следствие, для более «негладкой» локально липшицевой функции цены, не обладающей, вообще говоря, свойством дифференцируемости по *любому* направлению $(1,f) \in \mathbb{R}^{n+1}$.

Аналогичные результаты справедливы и в *ЗОУ* с функционалом платы типа Больца, а также для задачи быстродействия.

Литература

1. Bellman R. Dynamic Programming. Princeton: Princeton University Press, 1957.

2. Понтрягин Л. С., Болтянский В. Г., Гамкрелидзе Р. В., Мищенко Е. Ф. Математическая теория оптимальных процессов. М.: Наука, 1961.

3. Красовский Н. Н. Управление динамической системой. М.: Наука, 1986.

4. Warga J. Optimal Control of Differential and Functional Equations. N. Y.: Academic Press, 1976.

5. Berkovitz L. D. Optimal feedback controls // SIAM J. Control and Optimization. 1989. Vol. 27. P. 991–1006.

6. Fleming W. H., Soner H. M. Controlled Markov Processes and Viscosity Solutions. N. Y.: Springer-Verlag, 1993.

7. Clarke F. H., Ledyaev Yu. S., Stern R. J., Wolenski P. R. Nonsmooth Analysis and Control Theory. N. Y.: Springer-Verlag, 1997.

8. Bardi M., Capuzzo-Dolcetta I. Optimal Control and Viscosity Solutions of Hamilton–Jacobi–Bellman Equations. Boston: Birkhäuser, 1997.

9. Филиппов А. Ф. Дифференциальные уравнения с разрывной правой частью. М.: Наука, 1988.

10. Aubin J. P., Cellina A. Differential Inclusions. Berlin: Springer-Verlag, 1984.

11. Айзекс Р. Дифференциальные игры. М.: Мир, 1967.

12. Fleming W. H. The Cauchy problem for a nonlinear first order differential equation // J. Diff. Equations. 1969. Vol. 5. P. 555–580.

13. Пшеничный Б. Н. Выпуклый анализ и экстремальные задачи. М.: Наука, 1980.

14. Barron E. N., Jensen R. Semicontinuous viscosity solutions for Hamilton–Jacobi equations with convex Hamiltonians // Comm. PDE. 1990. Vol. 15. P. 1713–1740.

15. Crandall M. G., Lions P. L. Viscosity solutions of Hamiltion–Jacobi equations // Trans. AMS. 1984. Vol. 277. P. 1–42.

16. Субботин А. И., Субботина Н. Н. К вопросу обоснования метода динамического программирования в задаче оптимального управления // Изв. АН СССР. Техническая кибернетика. 1983. №2. С. 24–32.

17. Cannarsa P., Frankowska H. Some characterization of optimal trajectories in control theory // SIAM J. Control and Optimization. 1991. Vol. 29. P. 1322–1347.

18. Subbotin A. I. Generalized Solutions of First-Order PDEs: The Dynamical Optimization Perspective. Boston: Birkhäuser, 1995.

19. Субботина Н. Н. Условия оптимальности обратных связей в задачах управления. М., 2002. Деп. в ВИНИТИ 28.06.02, №1212–В2002.

20. Мордухович Б. Ш. Методы аппроксимаций в задачах оптимизации и управления. М.: Наука, 1988.

21. Rockafellar R. T., Wets R. J.-B. Variational Analysis. N. Y.: Springer-Verlag, 1998.

22. Демьянов В. Ф., Рубинов А. М. Основы негладкого анализа и квазидифференциальное исчисление. М.: Наука, 1990.

23. Friedman A. Differential Games. N. Y.: Wiley Interscience, 1971.

24. Красовский Н. Н., Субботин А. И. Позиционные дифференциальные игры. М.: Наука, 1974.

Статья поступила 30.09.2002 г.
Окончательный вариант 02.12.2002 г.