УДК 62-50

Н. Ю. Лукоянов

ОБ ЭКСТРЕМАЛЬНОМ ПРИЦЕЛИВАНИИ В ЗАДАЧАХ УПРАВЛЕНИЯ СИСТЕМАМИ С ПОСЛЕДЕЙСТВИЕМ*

В статье рассматривается задача управления динамической системой с распределенным последействием в условиях неконтролируемых, но ограниченных помех. В рамках теоретико-игрового подхода [1–3] задача включается в антагонистическую дифференциальную игру с наследственной информацией [2, 4, 5]. Для построения оптимальных стратегий предлагается конструкция минимаксного (максиминного) прицеливания, использующая коинвариантные градиенты функционалов.

Конструкции экстремального прицеливания или сдвига играют важную роль в теории управляемых процессов и теории дифференциальных игр. Они рассматривались во многих работах (например, в [2–7]), в том числе в [2, 4, 5] – для задач управления с наследственной информацией. Настоящая работа продолжает эти исследования. Рассматриваемая конструкция базируется на идеях из работ [3, 4]. Вместе с тем, подобно [6, 7], предлагаемые построения основаны на сглаживающем преобразовании функционала цены. Используются элементы инвариантного исчисления [8] и результаты [9] по развитию теории обобщенных (минимаксных и вязкостных) решений уравнений с частными производными первого порядка [1, 10, 11] для функциональных уравнений типа Гамильтона–Якоби с коинвариантными производными.

1. Постановка задачи

Пусть движение управляемой системы описывается уравнением

$$\begin{gathered}\dot{x}[t] = f(t, x[t_*[\cdot]t], u[t], v[t]),\ \ t_* \le t_0 \le t \le T,\\ x \in \mathbb{R}^n,\ \ u \in P \subset \mathbb{R}^k,\ \ v \in Q \subset \mathbb{R}^m,\end{gathered} \tag{1.1}$$

известно начальное условие

$$x[t_*[\cdot]t_0] = x_0[t_*[\cdot]t_0] \in C([t_*, t_0], \mathbb{R}^n), \tag{1.2}$$

качество процесса управления оценивается показателем

$$\gamma = \gamma(\{x[\cdot], u[\cdot], v[\cdot]\}) = \sigma(x[\cdot]) - \int_{t_0}^{T} h(t, x[t_*[\cdot]t], u[t], v[t])dt. \tag{1.3}$$

*Работа выполнена при финансовой поддержке Российского фонда фундаментальных исследований (грант №03-01-00228) и Фонда поддержки отечественных ученых.

Здесь $x[t]$ – состояние системы в текущий момент времени t, $\dot{x}[t] = dx[t]/dt$; $x[t_*[\cdot]t]$ – история движения, сложившаяся от момента времени t_* к моменту t; $u[t]$ – управление; $v[t]$ – неконтролируемая помеха. Отрезок $[t_*, t_0]$ трактуется как промежуток времени априорного накопления начальной истории $x_0[t_*[\cdot]t_0]$, t_0 – момент начала процесса управления. Символ $C([t_*, t_0], \mathbb{R}^n)$ обозначает пространство n-мерных непрерывных функций, определенных на отрезке $[t_*, t_0]$. Моменты времени t_*, t_0 и T заданы ($t_0 < T$), P и Q – известные компакты. Тройка $\{x[\cdot], u[\cdot], v[\cdot]\}$ символизирует реализацию процесса от момента времени t_* к моменту T.

Задача управления – доставить показателю (1.3) как можно меньшее значение. При этом, поскольку помеха непредсказуема, следуя принципу гарантированного результата, считаем, что она нацелена обеспечить данному показателю как можно большее значение.

Эти две задачи объединим в антагонистическую дифференциальную игру с наследственной информацией, полагая, что управление – действие первого игрока, а помеха – второго. Пару $g = \{t, x[t_*[\cdot]t]\}$ назовем текущей позицией игры. Позицию $g_0 = \{t_0, x_0[t_*[\cdot]t_0]\}$, которая задает начальное условие (1.2), назовем начальной. Множество всех возможных позиций G определим как совокупность таких пар $g = \{t, x[t_*[\cdot]t]\}$, что $t \in [t_*, T]$, а $x[t_*[\cdot]t] \in C([t_*, t], \mathbb{R}^n)$. На G введем метрику

$$\rho(g_1, g_2) := \max_{i=0,1} \rho^*(g_{i+1}, g_{2-i}), \quad g_j = \{t_j, x^{(j)}[t_*[\cdot]t_j]\} \in G, \ j = 1, 2,$$

где $\rho^*(g_{i+1}, g_{2-i}) := \max\limits_{t_* \le \xi \le t_{i+1}} \min\limits_{t_* \le \eta \le t_{2-i}} \sqrt{|\xi - \eta|^2 + \|x^{(i+1)}[\xi] - x^{(2-i)}[\eta]\|^2}$.

Здесь и далее $\|\cdot\|$ – евклидова норма вектора. По своей сути величина $\rho(g_1, g_2)$ является хаусдорфовым расстоянием между графиками функций $x^{(1)}[t_*[\cdot]t_1]$ и $x^{(2)}[t_*[\cdot]t_2]$. Всюду далее свойства непрерывности рассматриваемых величин по совокупному аргументу $g = \{t, x[t_*[\cdot]t]\}$ будем понимать относительно его изменения в метрике ρ.

Пусть функционал $\sigma(x[\cdot]) : C([t_*, T], \mathbb{R}^n) \to \mathbb{R}$ непрерывен, а функция $\overline{f}(g, u, v) := (f(t, x[t_*[\cdot]t], u, v), h(t, x[t_*[\cdot]t], u, v)) \in \mathbb{R}^n \times \mathbb{R}$ определена и непрерывна по совокупности переменных при $g = \{t, x[t_*[\cdot]t]\} \in G$, $u \in P$, $v \in Q$. Пусть также справедлива оценка

$$\|\overline{f}(g, u, v)\| \le L(g) := c\left(1 + \max_{t_* \le \tau \le t} \|x[\tau]\|\right), \ g = \{t, x[t_*[\cdot]t]\} \in G, \tag{1.4}$$

выполняется следующее условие Липшица по историям $x[t_*[\cdot]t]$:

$$\|\overline{f}(g^*, u, v) - \overline{f}(g_*, u, v)\| \le \lambda \sqrt{\int_{t_*}^{t} \|x^*[\tau] - x_*[\tau]\|^2 d\tau + \|x^*[t] - x_*[t]\|^2},$$

$$g^* = \{t, x^*[t_*[\cdot]t]\} \in G,\; g_* = \{t, x_*[t_*[\cdot]t]\} \in G, \tag{1.5}$$

и для любых $g = \{t, x[t_*[\cdot]t]\} \in G$ и $s \in \mathbb{R}^n$ имеет место равенство

$$\min_{u\in P}\max_{v\in Q}\chi(g,u,v,s) = \max_{v\in Q}\min_{u\in P}\chi(g,u,v,s) := H(g,s). \tag{1.6}$$

Здесь и ниже $\chi(g,u,v,s) := \langle s, f(g,u,v)\rangle - h(g,u,v)$, символ $\langle\cdot,\cdot\rangle$ означает скалярное произведение векторов. Отметим, что условие Липшица (1.5) естественно для систем с распределенным запаздыванием. Для систем с сосредоточенным запаздыванием оно, вообще говоря, не выполняется.

Стратегии игроков отождествим с произвольными функциями $U(g) = U(t, x[t_*[\cdot]t]) \in P$ (для первого) и $V(g) = V(t, x[t_*[\cdot]t]) \in Q$ (для второго), где $g = \{t, x[t_*[\cdot]t]\} \in G,\ t < T$. Управление на базе таких стратегий осуществляется в дискретной по времени схеме. Пусть первый игрок выбрал стратегию $U(\cdot)$ и задано разбиение отрезка времени $[t_0, T]$:

$$\Delta_\delta = \{t_i : t_1 = t_0, 0 < t_{i+1} - t_i \le \delta, i = \overline{1,N}, t_{N+1} = T\}.$$

Через $S_u(g_0 = \{t_0, x_0[t_*[\cdot]t_0]\}, U(\cdot), \Delta_\delta)$ обозначим множество всех таких реализаций процесса $\{x[\cdot], u[\cdot], v[\cdot]\}$, что $v[\cdot] : [t_0, T) \to Q$ – произвольная измеримая функция, $u[\cdot]$ – кусочно-постоянное управление вида

$$u[t] = U(t_i, x[t_*[\cdot]t_i]),\ t_i \le t < t_{i+1},\ i = \overline{1,N},$$

$x[\cdot] : [t_*, T] \to \mathbb{R}^n$ – непрерывная, а на $[t_0, T]$ абсолютно непрерывная функция, удовлетворяющая условию (1.2) и при почти всех $t \in [t_0, T]$ – уравнению (1.1). Аналогично определим множество $S_v(g_0, V(\cdot), \Delta_\delta)$ для стратегии $V(\cdot)$ второго игрока.

Оптимальными гарантированными результатами игроков согласно их целям будут следующие величины:

$$\Gamma_u^\circ(g_0) := \inf_{U(\cdot)}\Gamma_u(g_0, U(\cdot)),\ \Gamma_u(g_0, U(\cdot)) := \lim_{\delta\downarrow 0}\sup_{\Delta_\delta}\sup\gamma(S_u(g_0, U(\cdot), \Delta_\delta));$$
$$\Gamma_v^\circ(g_0) := \sup_{V(\cdot)}\Gamma_v(g_0, V(\cdot)),\ \Gamma_v(g_0, V(\cdot)) := \lim_{\delta\downarrow 0}\inf_{\Delta_\delta}\inf\gamma(S_v(g_0, V(\cdot), \Delta_\delta)). \tag{1.7}$$

Здесь $\sup\eta(A) := \sup_{a\in A}\eta(a),\ \inf\eta(A) := \inf_{a\in A}\eta(a)$.

Соответственно оптимальными будут стратегии $U^\circ(\cdot)$ и $V^\circ(\cdot)$:

$$\Gamma_u^\circ(g_0) = \Gamma_u(g_0, U^\circ(\cdot)), \qquad \Gamma_v^\circ(g_0) = \Gamma_v(g_0, V^\circ(\cdot)). \tag{1.8}$$

По своему определению величины Γ_u° и Γ_v° связаны неравенством

$$\Gamma_u^\circ(g_0) \ge \Gamma_v^\circ(g_0). \tag{1.9}$$

В случае когда в (1.9) имеет место равенство, рассматриваемая дифференциальная игра (1.1), (1.3) имеет цену $\Gamma^\circ(g_0) := \Gamma^\circ_u(g_0) = \Gamma^\circ_v(g_0)$, а пара оптимальных стратегий $\{U^\circ(\cdot), V^\circ(\cdot)\}$ составляет седловую точку этой игры. Величина цены зависит от начальной позиции, поэтому можно определить функционал цены

$$G \ni g_0 = \{t_0, x_0[t_*[\cdot]t_0]\} \mapsto \Gamma^\circ(g_0) = \Gamma^\circ(t_0, x_0[t_*[\cdot]t_0]) \in \mathbb{R}.$$

В дальнейшем также будем рассматривать так называемые ε-стратегии $U_\varepsilon(g) = U_\varepsilon(t, x[t_*[\cdot]t]) \in P$ и $V_\varepsilon(g) = V_\varepsilon(t, x[t_*[\cdot]t]) \in Q$, $g = \{t, x[t_*[\cdot]t]\} \in G$, $t < T$, где $\varepsilon > 0$ трактуется как параметр точности (см. [3, с. 68]). Значение этого параметра выбирается заранее и в ходе процесса управления не изменяется. В соответствии с предыдущим, ε-стратегии $U^\circ_\varepsilon(\cdot)$ и $V^\circ_\varepsilon(\cdot)$ будем называть оптимальными, если выполняются соотношения

$$\Gamma^\circ_u(g_0) = \limsup_{\varepsilon\downarrow 0} \Gamma_u(g_0, U^\circ_\varepsilon(\cdot)), \qquad \Gamma^\circ_v(g_0) = \liminf_{\varepsilon\downarrow 0} \Gamma_v(g_0, V^\circ_\varepsilon(\cdot)). \tag{1.10}$$

Итак, задача заключается в том, чтобы построить оптимальные или ε-оптимальные стратегии. С этой целью рассмотрим сначала гладкие оценки гарантированных результатов, приводящие к уравнению типа Гамильтона–Якоби (Г–Я) для функционала цены.

2. Гладкая оценка гарантированных результатов

В теории дифференциальных игр обыкновенных систем для функции цены хорошо известно уравнение типа Г–Я с частными производными, именуемое уравнением Айзекса–Веллмана. Это уравнение выводится в рамках метода динамического программирования при предположении, что функция цены как минимум непрерывно дифференцируема. Чтобы получить аналогичное уравнение для функционала цены рассматриваемой дифференциальной игры с наследственной информацией, также сделаем предположение об определенной гладкости этого функционала. Подчеркнем, что его аргумент – пара $g = \{t, x[t_*[\cdot]t]\}$, при этом значение переменной t задает отрезок, на котором должна быть определена функция $x[t_*[\cdot]t]$, так что переменные t и $x[t_*[\cdot]t]$, вообще говоря, нельзя варьировать независимо. Отметим еще, что по смыслу задачи $x[t_*[\cdot]t]$ – история движения, т. е. может меняться только вперед. Поэтому и в контексте преследуемой цели, с одной стороны, здесь представляется затруднительным применение классических функциональных производных, а с другой – оказывается оправданным использование специального понятия коинвариантной (ci-) гладкости [8, 9].

Итак, рассмотрим функционал $\varphi(t, x[t_*[\cdot]t]) : G \to \mathbb{R}$. Пусть $t < T$, $g = \{t, x[t_*[\cdot]t]\} \in G$ и $\mathrm{Lip}(g)$ – множество функций $y[\cdot] \in C([t_*, T], \mathbb{R}^n)$, совпадающих с $x[t_*[\cdot]t]$ на $[t_*, t]$, каждая из которых с некоторой (своей) константой удовлетворяет на $[t, T]$ условию Липшица. Функционал φ назовем ci-дифференцируемым в точке g, если найдутся $\partial_t\varphi(g) \in \mathbb{R}$ и $\nabla\varphi(g) \in \mathbb{R}^n$ такие, что для любой $y[\cdot] \in \mathrm{Lip}(g)$ будет иметь место представление

$$\varphi(t+\delta, y[t_*[\cdot]t+\delta]) - \varphi(g) = \partial_t\varphi(g)\delta + \langle\nabla\varphi(g), y[t+\delta] - x[t]\rangle + o_{y[\cdot]}(\delta),$$
$$\delta \in (0, T-t].$$

Величины $\partial_t\varphi(g)$ и $\nabla\varphi(g)$ назовем ci-производной по t и ci-градиентом φ в точке g. Будем говорить, что φ является ci-дифференцируемым (на G), если он ci-дифференцируем в каждой точке $g = \{t, x[t_*[\cdot]t]\} \in G$, $t < T$. Если при этом он и его ci-производные $\partial_t\varphi(g)$ и $\nabla\varphi(g)$ непрерывны, то будем говорить, что данный функционал ci-гладкий.

Коинвариантные производные удобны тем, что в их терминах полная производная ci-гладкого функционала вдоль движений системы (1.1) записывается в привычной форме:

$$\frac{d\varphi(t, x[t_*[\cdot]t])}{dt} = \partial_t\varphi(t, x[t_*[\cdot]t]) + \langle\nabla\varphi(t, x[t_*[\cdot]t]), f(t, x[t_*[\cdot]t], u[t], v[t])\rangle. \quad (2.1)$$

По ci-гладким функционалам прицеливанием в направлении их ci-градиентов можно определять экстремальные стратегии игроков:

$$U^{\mathrm{e}}(g) := p(g, \nabla\varphi(g)),\ \ p(g,s) \in \arg\min_{u\in P}\left\{\max_{v\in Q}\chi(g,u,v,s)\right\}, \quad (2.2)$$

$$V^{\mathrm{e}}(g) := q(g, \nabla\varphi(g)),\ \ q(g,s) \in \arg\max_{v\in Q}\left\{\min_{u\in P}\chi(g,u,v,s)\right\}. \quad (2.3)$$

Функции $p(g,s) : G \times \mathbb{R}^n \mapsto P$ и $q(g,s) : G \times \mathbb{R}^n \mapsto Q$, определяемые здесь на основе произвольного выбора, называют соответственно минимаксной и максиминной предстратегиями.

Пусть φ удовлетворяет дифференциальному неравенству

$$\mathbf{F}\varphi(g) := \partial_t\varphi(g) + H(g, \nabla\varphi(g)) \le 0,\ \ g = \{t, x[t_*[\cdot]t]\} \in G,\ \ t < T,$$

а также условию на правом конце

$$\varphi(T, x[t_*[\cdot]T]) = \sigma(x[\cdot]), \quad x[\cdot] = x[t_*[\cdot]T] \in C([t_*, T], \mathbb{R}^n), \quad (2.4)$$

где H – гамильтониан, определенный равенством (1.6), а σ из (1.3). Тогда, опираясь на формулу (2.1) и следуя в основном схеме рассуждений, приведенных для обыкновенного случая, например в [3, с. 132], получаем, что для стратегии (2.2) справедлива оценка $\Gamma_u(g_0, U^{\mathrm{e}}(\cdot)) \le \varphi(g_0)$, $g_0 \in G$.

Аналогично для стратегии (2.3), построенной по ci-гладкому функционалу φ, удовлетворяющему (2.4) и противоположному дифференциальному неравенству $\mathbf{F}\varphi \geq 0$, имеем оценку $\Gamma_v(g_0, V^{\mathrm{e}}(\cdot)) \geq \varphi(g_0)$, $g_0 \in G$.

Таким образом, в согласии с (1.7)–(1.9) приходим к следующему уравнению типа Г–Я с ci-производными для функционала цены рассматриваемой игры:

$$\partial_t \varphi(g) + H(g, \nabla\varphi(g)) = 0,\ g = \{t, x[t_*[\cdot]t]\} \in G,\ t < T. \tag{2.5}$$

Теорема 1. *Пусть ci-гладкий функционал* $\varphi : G \mapsto \mathbb{R}$ *удовлетворяет* (2.4), (2.5). *Тогда он является функционалом цены рассматриваемой дифференциальной игры с наследственной информацией* (1.1), (1.3), *а экстремальные стратегии* $U^{\mathrm{e}}(\cdot)$ *и* $V^{\mathrm{e}}(\cdot)$, *построенные по этому функционалу согласно* (2.2) *и* (2.3), *являются оптимальными.*

К сожалению, решить задачу при помощи стратегий типа (2.2), (2.3) удается нечасто. Как правило, функционал цены не является ci-дифференцируемым, а соответствующая задача (2.4), (2.5) не имеет классических (ci-дифференцируемых) решений. В такой ситуации в теории уравнений типа Г–Я рассматриваются обобщенные (минимаксные, вязкостные) решения [10, 11]. Для уравнения (2.5) минимаксное решение можно определить через свойства стабильности относительно следующей обобщенной характеристической системы:

$$\|\dot{x}[t]\| \leq L(t, x[t_*[\cdot]t]),\ \dot{w}[t] = \langle \dot{x}[t], s\rangle - H(t, x[t_*[\cdot]t], s). \tag{2.6}$$

Пусть $g^* = \{t^*, x^*[t_*[\cdot]t^*]\} \in G$, $w^* \in \mathbb{R}$ и $s \in \mathbb{R}^n$. Символом $CH(g^*, w^*, s)$ обозначим множество функций (обобщенных характеристик) $(x[\cdot], w[\cdot])$ из $C([t_*, T], \mathbb{R}^n \times \mathbb{R})$, которые удовлетворяют условию $x[t_*[\cdot]t^*] = x^*[t_*[\cdot]t^*]$, $w[t^*] = w^*$, абсолютно непрерывны на $[t^*, T]$ и при почти всех $t \in [t^*, T]$ удовлетворяют системе (2.6). Функционал $\varphi : G \mapsto \mathbb{R}$ назовем верхним (нижним) решением уравнения (2.5), если он полунепрерывен снизу (сверху) и для любых $(g^*, s) \in G \times \mathbb{R}^n$ существует такая характеристика $(x[\cdot], w[\cdot])$ из $CH(g^*, \varphi(g^*), s)$, что при всех $t \in [t^*, T]$ будет выполняться неравенство $w[t] \geq \varphi(t, x[t_*[\cdot]t])$ (неравенство $w[t] \leq \varphi(t, x[t_*[\cdot]t])$ соответственно). Функционал φ – минимаксное решение уравнения (2.5), если он одновременно является верхним и нижним решением этого уравнения.

Отметим, что в терминологии теории позиционных дифференциальных игр верхние и нижние решения соответствуют u-стабильным и v-стабильным функционалам. Согласно [9] при рассматриваемых условиях существует единственное минимаксное решение уравнения (2.5), удовлетворяющее краевому условию (2.4); оно совпадает с минимальным верхним и максимальным нижним решениями этой задачи. Отметим еще, что минимаксные решения удовлетворяют уравнению (2.5) в классическом смысле в тех точках, в которых ci-дифференцируемы, а всякое классическое решение этого уравнения является также и минимаксным. Далее описаны экстремальные ε-стратегии игроков, определяемые по верхним и нижним (не обязательно гладким) решениям φ. Данные стратегии по прежнему строятся на базе минимаксной и максиминной предстратегий, но вместо ci-градиента $\nabla\varphi$ (который может не существовать) используется подходящий ci-градиент заведомо гладкого вспомогательного функционала. Такие стратегии позволяют получать более точные оценки оптимальных гарантированных результатов. С их помощью удается установить, что в общем случае функционал цены совпадает с минимаксным решением задачи (2.4), (2.5).

3. Экстремальные стратегии в негладком случае

Рассмотрим вспомогательный функционал

$$G \ni g = \{t, x[t_*[\cdot]t]\} \to \nu_\varepsilon(g) := \alpha_\varepsilon(t)\beta_\varepsilon(t, x[t_*[\cdot]t]) \in \mathbb{R}, \tag{3.1}$$

где

$$\alpha_\varepsilon(t) := (\exp\{2\lambda(t_0 - t)\} - \varepsilon)/\varepsilon,$$

$$\beta_\varepsilon(t, x[t_*[\cdot]t]) := \sqrt{\varepsilon^4 + 2\lambda \int_{t_*}^{t} \|x[\tau\|^2 d\tau + \|x[t]\|^2},$$

константа $\lambda > 1$ из условия (1.5), $0 < \varepsilon < \varepsilon^0 := \exp\{2\lambda(t_0 - T)\}$.

Данный функционал является ci-гладким, при этом для любых $t < T$, $g = \{t, x[t_*[\cdot]t]\} \in G$ справедливы равенства

$$\partial_t \nu_\varepsilon(g) = -2\lambda \frac{\exp\{2\lambda(t_0 - t)\}}{\varepsilon}\beta_\varepsilon(g) + \lambda\alpha_\varepsilon(t)\frac{\|x[t]\|^2}{\beta_\varepsilon(g)},\ \nabla\nu_\varepsilon(g) = \frac{\alpha_\varepsilon(t)}{\beta_\varepsilon(g)}x[t].$$

В силу (1.5) для любых $x_*[\cdot], x^*[\cdot] \in C([t_*, T], \mathbb{R}^n)$ и $t \in [t_0, T]$ имеем

$$\partial_t \nu_\varepsilon(\Delta g) + H(t, x_*[t_*[\cdot]t], \nabla\nu_\varepsilon(\Delta g)) - H(t, x^*[t_*[\cdot]t], \nabla\nu_\varepsilon(\Delta g)) \leq 0, \tag{3.2}$$

где $\Delta g = \{t, \Delta x[t_*[\cdot]t]\}$, $\Delta x[\cdot] = x_*[\cdot] - x^*[\cdot] := \{x_*[\tau] - x^*[\tau], \tau \in [t_*, T]\}$. Отметим, что неравенства типа (3.2) играют важную роль в теории вязкостных решений уравнений Г–Я (см., например, условие A4 в [11]).

Пусть $X_0 := \{x[\cdot] \in \mathrm{Lip}(g_0) : \|\dot{x}[t]\| \leq L(t, x[t_*[\cdot]t])$ при почти всех $t \in [t_0, T]\}$.

Множество X_0 компактно в $C([t_*, T], \mathbb{R}^n)$. В силу (1.4) любое движение системы (1.1), реализующееся из начальной позиции $g_0 = \{t_0, x_0[t_*[\cdot]t_0]\} \in G$, содержится в этом множестве.

Пусть φ – верхнее решение уравнения (2.5), удовлетворяющее (2.4).

Рассмотрим следующее преобразование функционала φ:

$$\varphi_\varepsilon(g) = \varphi_\varepsilon(t, x[t_*[\cdot]t]) := \min_{y[\cdot]\in X_0} [\varphi(t, y[t_*[\cdot]t]) + \nu_\varepsilon(t, \Delta y[t_*[\cdot]t])], \tag{3.3}$$

где $\Delta y[t_*[\cdot]t] := \{\Delta y[\tau] = x[\tau] - y[\tau],\ \tau \in [t_*, t]\}$. Отметим, что подобные преобразования негладких функций использовались ранее [6, 7] в задачах управления обыкновенными дифференциальными системами для построения стратегий минимаксного прицеливания в направлении квазиградиентов. В негладком анализе (см., например, [12]) при помощи подобных преобразований определяются проксимальные градиенты функций. Функционал (3.1) является в рассматриваемой задаче подходящим аналогом вспомогательных функций, используемых в тех конструкциях.

Пусть $y^g_\varepsilon[\cdot]$ – минимизирующая в (3.3) функция. Экстремальную ε-стратегию первого игрока определим равенством

$$U^{\mathrm{e}}_\varepsilon(g) = p(g, \nabla\nu_\varepsilon(t, \Delta y^g_\varepsilon[t_*[\cdot]t])),\ g = \{t, x[t_*[\cdot]t]\} \in G,\ t < T, \tag{3.4}$$

где $\Delta y^g_\varepsilon[t_*[\cdot]t] := \{\Delta y^g_\varepsilon[\tau] = x[\tau] - y^g_\varepsilon[\tau],\ \tau \in [t_*, t]\}$.

Справедлива следующая оценка:

$$\limsup_{\varepsilon\downarrow 0} \Gamma_u(g_0, U^{\mathrm{e}}_\varepsilon(\cdot)) \le \varphi(g_0),\ g_0 = \{t_0, x_0[t_*[\cdot]t_0]\} \in G. \tag{3.5}$$

Доказательство этого факта проводится в основном по схеме рассуждений, приведенных для обыкновенного случая в [6]. При этом используются формула (2.1) и неравенство (3.2).

Экстремальная ε-стратегия второго игрока определяется при помощи аналогичной конструкции с понятными изменениями. Пусть φ – нижнее решение задачи (2.4), (2.5). Полагаем

$$V^{\mathrm{e}}_\varepsilon(g) = q(g, \nabla\nu_\varepsilon(t, \Delta z^\varepsilon_g[t_*[\cdot]t])),\ g = \{t, x[t_*[\cdot]t]\} \in G,\ t < T. \tag{3.6}$$

Здесь $\Delta z^\varepsilon_g[t_*[\cdot]t] := \{\Delta z^\varepsilon_g[\tau] = z^\varepsilon_g[\tau] - x[\tau],\ \tau \in [t_*, t]\}$, а функция $z^\varepsilon_g[\cdot]$ определяется на основе произвольного выбора

$$z^\varepsilon_g[\cdot] \in \arg\max_{z[\cdot]\in X_0} [\varphi(t, z[t_*[\cdot]t]) - \nu_\varepsilon(t, \Delta z[t_*[\cdot]t])],$$

где $\Delta z[t_*[\cdot]t] := \{\Delta z[\tau] = z[\tau] - x[\tau],\ \tau \in [t_*, t]\}$. Для этой стратегии имеем оценку

$$\liminf_{\varepsilon\downarrow 0} \Gamma_v(g_0, V^{\mathrm{e}}_\varepsilon(\cdot)) \ge \varphi(g_0),\ g_0 = \{t_0, x_0[t_*[\cdot]t_0]\} \in G. \tag{3.7}$$

Пусть теперь в данных конструкциях φ – минимаксное решение задачи (2.4), (2.5). Тогда оценки (3.5) и (3.7) выполняются одновременно. С учетом (1.7), (1.9) и (1.10) это означает, что ε-стратегии $U^{\mathrm{e}}_{\varepsilon}(\cdot)$ и $V^{\mathrm{e}}_{\varepsilon}(\cdot)$ оптимальные, а φ – функционал цены. Как отмечалось, требуемое минимаксное решение существует. Таким образом, справедлива следующая

Теорема 2. *Рассматриваемая дифференциальная игра с наследственной информацией* (1.1), (1.3) *имеет цену* $\Gamma^{\circ}(g_0)$ *для любой начальной позиции* $g_0 = \{t_0, x_0[t_*[\cdot]t_0]\} \in G$. *Функционал цены* $\Gamma^{\circ} : G \to \mathbb{R}$ *совпадает с минимаксным решением* φ *задачи* (2.4), (2.5). *Экстремальные* ε*-стратегии* $U^{\mathrm{e}}_{\varepsilon}(\cdot)$ *и* $V^{\mathrm{e}}_{\varepsilon}(\cdot)$*, построенные по этому функционалу согласно* (3.4) *и* (3.6)*, являются оптимальными.*

Литература

1. Айзекс Р. Дифференциальные игры. М.: Мир, 1967.
2. Красовский Н. Н, Субботин А. И. Позиционные дифференциальные игры. М.: Наука, 1974.
3. Красовский Н. Н. Управление динамической системой. М.: Наука, 1985.
4. Осипов Ю. С. Дифференциальные игры систем с последействием // Докл. АН СССР. 1971. Т. 196, №4. С. 779–782.
5. Krasovskii A. N., Krasovskii N. N. Control under Lack of Information. Boston: Birkhäuser, 1995.
6. Гарнышева Г. Г., Субботин А. И. Стратегии минимаксного прицеливания в направлении квазиградиента // Прикладная математика и механика. 1994. Т. 58, вып. 4. С. 5–11.
7. Гарнышева Г. Г., Субботин А. И. Субоптимальные универсальные стратегии в игровой задаче быстродействия // Там же. 1995. Т. 59, вып. 5. С. 707–713.
8. Ким А. В. i-Гладкий анализ и функционально-дифференциальные уравнения. Екатеринбург: УрО РАН, 1996.
9. Krasovskii N. N., Lukoyanov N. Yu. Equations of Hamilton–Jacobi type in hereditary systems: minimax solutions // Proc. Steklov Inst. Math.: Control in Dynamic Systems. 2000. Suppl. Issue 1. P. 136–153.
10. Subbotin A. I. Generalized Solutions of First-Order PDEs: The Dynamical Optimization Perspective. Boston: Birkhäuser, 1995.
11. Crandall M. G., Ishii H., Lions P.-L. Uniqueness of viscosity solutions of Hamilton–Jacobi equations revisited // J. Math. Soc. Japan. 1987. Vol. 39, №4. P. 581–596.
12. Clarke F. H., Ledyaev Yu. S., Stern R. J., Wolenski P. R. Nonsmooth Analysis and Control Theory. N. Y.: Springer-Verlag, 1998.

Статья поступила 30.08.2002 г.
Окончательный вариант 09.12.2002 г.