УДК 531.011:517.977.52

А. П. Кукушкин

ПОКОМПОНЕНТНАЯ ИНВАРИАНТНОСТЬ УПРАВЛЯЕМЫХ МЕХАНИЧЕСКИХ СИСТЕМ*

1. Постановка задачи

Рассматривается задача оптимального управления механической системой. Компоненты задачи имеют следующий вид.

К1. Уравнения движения в форме уравнений Лагранжа [1]

$$\frac{d}{dt}\left(\frac{\partial L}{\partial \dot{q}^k}\right) - \frac{\partial L}{\partial q^k} = Q_k,\ k = 1,\ \ldots, n. \tag{1}$$

Здесь t – время; $L\left(t, q, \dot{q}\right)$ – лагранжиан; $q = \left(q^1,\ \ldots, q^n\right)$ – обобщенные координаты; $\dot{q} = dq/dt$ – обобщенные скорости; $Q\left(t, q, \dot{q}, u\right)$ – обобщенные силы; $u = \left(u_1\left(t\right), \ldots, u_m\left(t\right)\right)$ – управляющие воздействия.

К2. Область допустимых значений управления u, зависящая от времени t, положения q и скорости $\dot{q}$, задана системой равенств и неравенств

$$U\left(t, q, \dot{q}\right) = \left\{u : \left\{\begin{array}{ll} C^b\left(t, q, \dot{q}, u\right) = 0, & b = 1,\ \ldots, \bar{c} \in \mathbb{N}, \\ C^b\left(t, q, \dot{q}, u\right) \le 0, & b = \bar{c}+1,\ \ldots, c \in \mathbb{N} \end{array}\right.\right\}. \tag{2}$$

Индекс b и соответствующая функция C^b называются *активными* в точке $\left(t, q, \dot{q}, u\right)$, если $C^b\left(t, q, \dot{q}, u\right) = 0$. Множество индексов, активных в данной точке, обозначим через $A\left(t, q, \dot{q}, u\right)$.

К3. Функциональные ограничения на траекторию в виде системы равенств и неравенств

$$\left\{\begin{array}{ll} J^\gamma\left(t_0, t_1, q\left(\cdot\right), \dot{q}\left(\cdot\right), u\left(\cdot\right)\right) = 0, & \gamma = 1,\ \ldots, \bar{d} \in \mathbb{N}, \\ J^\gamma\left(t_0, t_1, q\left(\cdot\right), \dot{q}\left(\cdot\right), u\left(\cdot\right)\right) \le 0, & \gamma = \bar{d}+1,\ \ldots, d \in \mathbb{N} \end{array}\right\}, \tag{3}$$

где

$$J^\gamma = \int_{t_0}^{t_1} F^\gamma\left(t, q, \dot{q}, u\right) dt + f^\gamma\left(t_0, q_0, \dot{q}_0, t_1, q_1, \dot{q}_1 \cdot\right), \tag{4}$$
$$q_0 = q\left(t_0\right),\ \dot{q}_0 = \dot{q}\left(t_0\right),\ q_1 = q\left(t_1\right),\ \dot{q}_1 = \dot{q}\left(t_1\right).$$

*Работа выполнена при финансовой поддержке РФФИ (гранты №00-01-00346 и 01-07-90210).

K4. Критерий качества: требуется минимизировать функционал

$$I=\int_{t_0}^{t_1} F^0\left(t,q,\dot q,u\right)dt+f^0\left(t_0,q_0,\dot q_0,t_1,q_1,\dot q_1\right). \tag{5}$$

Конфигурационное пространство механической системы является дифференцируемым многообразием и описывается атласом карт. В данной работе рассматриваются необходимые условия оптимальности. Так как каждая часть экстремали должна являться экстремалью, ограничимся рассмотрением локальных вопросов и будем считать, что интересующие нас точки $(t,q,\dot q,u)$ лежат в некоторой открытой односвязной области D евклидова пространства $\mathbb{R}^1\times\mathbb{R}^n\times\mathbb{R}^n\times\mathbb{R}^{m*}$ ($\mathbb{R}^{m*}$ – пространство, сопряженное к $\mathbb{R}^m$).

Рассматриваем задачу при следующих допущениях.

A1. Функции L,Q,C,F,f непрерывно дифференцируемы нужное число раз.

A2. Полагаем, что $n\times n$-матрица вторых производных $\left[\partial^2L/\partial\dot q^i\partial\dot q^j\right]$ определенно положительна (в частности, невырожденна). Следовательно, можно записать уравнения движения в форме, разрешенной относительно вторых производных $\ddot q^i$. Для натуральных механических систем это допущение всегда выполняется.

A3. Ограничения на допустимые значения управлений должны удовлетворять условию *общности положения*: для каждой точки $(t,q,\dot q^i,u)$ число активных в этой точке ограничений равно рангу матрицы $[\partial C^\alpha/\partial u_r]$, составленной из частных производных по u от всех активных в этой точке функций C^α. Это допущение гарантирует, что ограничения наложены на управления, а не на скорость и положение.

A4. Полагаем, что в совокупности ограничения на управление и формулы для обобщенных сил таковы, что для каждого набора $(t,q,\dot q)$ вектограмма $Q(t,q,\dot q,U\left(t,q,\dot q\right))$ является ограниченным множеством.

A5. Ограничимся рассмотрением кусочно-непрерывных и кусочно-дифференцируемых управляющих воздействий $u\left(t\right),t\in\Delta$.

Совокупность $\{\Delta,q\left(\cdot\right),u\left(\cdot\right)\}$ назовем *управляемым процессом*, здесь $\Delta=[t_0,t_1]\subset\mathbb{R}^1$, $u\left(\cdot\right)=u\left(t\right):[t_0,t_1]\to\mathbb{R}^{m*}$ – закон управления, а $q\left(\cdot\right)=q\left(t\right):[t_0,t_1]\to\mathbb{R}^n$ – траектория, порожденная этим законом в силу уравнений движения (1). Процесс называется *допустимым*, если выполняются ограничения на управление (2), функциональные ограничения (3) и множество активных индексов является кусочно-постоянным. Последнее означает, что для процесса $\{\Delta,q\left(\cdot\right),u\left(\cdot\right)\}$ отрезок Δ может быть разбит на конечное число частей так, что на каждой части сохраняется постоянство множества $A\left(t\right)=A\left(t,q\left(t\right),\dot q\left(t\right),u\left(t\right)\right)$. Отметим, что такое определение исключает из рассмотрения скользящие режимы.

Задача оптимального управления заключается в нахождении среди всех допустимых процессов такого процесса, для которого значение критерия качества $I\left(\Delta, q\left(\cdot\right), u\left(\cdot\right)\right)$ является наименьшим.

При выполнении указанных допущений задачу оптимального управления будем называть *гладкой регулярной задачей.*

2. Необходимые условия оптимальности

Воспользуемся принципом максимума Л. С. Понтрягина в форме, адаптированной для задач управления механическими системами.

Введем вспомогательные переменные (множители Лагранжа): постоянные $\psi = (\psi_0, \psi_1, \ldots, \psi_d)$, непрерывную и непрерывно-дифференцируемую вектор-функцию $y\left(t\right) = \left(y^1\left(t\right), \ldots, y^n\left(t\right)\right)$, кусочно-непрерывную и кусочно-дифференцируемую вектор-функцию $\mu(t) = (\mu^1(t), \ldots, \mu^c(t))$. Определим следующие вспомогательные функции:
расширенный лагранжиан (расширенный интегранд)

$$\Lambda\left(t, q, \dot{q}, \ddot{q}, u\right) = \sum_{\gamma=0}^{d} \psi_\gamma F^\gamma + \sum_{b=1}^{c} \mu_b C^b + \sum_{k=1}^{n} \left[\frac{d}{dt}\left(\frac{\partial L}{\partial \dot{q}^k}\right) - \frac{\partial L}{\partial q^k} - Q_k\right] y^k; \quad (6)$$

расширенный терминант

$$\lambda\left(t_0, q_0, \dot{q}_0, t_1, q_1, \dot{q}_1\right) = \sum_{\gamma=0}^{d} \psi_\gamma f^\gamma; \quad (7)$$

расширенный гамильтониан (функция Понтрягина)

$$\Pi\left(t, q, \dot{q}, u\right) = \sum_{k=1}^{n} \frac{\partial \Lambda}{\partial \ddot{q}^k} \dddot{q}^k + \sum_{k=1}^{n} \left[\frac{\partial \Lambda}{\partial \dot{q}^k} - \frac{d}{dt}\left(\frac{\partial \Lambda}{\partial \ddot{q}^k}\right)\right] \dot{q}^k - \Lambda. \quad (8)$$

Необходимые условия оптимальности для гладкой регулярной задачи оптимального управления механической системой можно сформулировать в виде следующей теоремы.

Теорема 1. *Если $\{\Delta, q\left(\cdot\right), u\left(\cdot\right)\}$ – оптимальный процесс для гладкой регулярной задачи, то существуют множители Лагранжа $\{\psi, y(\cdot), \mu(\cdot)\}$ такие, что выполняются следующие условия.*

Т1. *Нетривиальность: для всех $t \in \Delta$ постоянные ψ, функции $y\left(t\right)$ и их производные $\dot{y}\left(t\right)$ не обращаются в нуль одновременно.*

T2. *Стационарность по q (уравнения Эйлера–Пуассона):*

$$\frac{\partial\Lambda}{\partial q^i}-\frac{d}{dt}\left[\frac{\partial\Lambda}{\partial\dot q^i}-\frac{d}{dt}\left(\frac{\partial\Lambda}{\partial\ddot q^i}\right)\right]=0,\quad i=1,\,\ldots,n. \tag{9}$$

T3. *Стационарность по u: для всех моментов $t\in\Delta$*

$$\frac{\partial\Lambda}{\partial u_r}=0,\quad r=1,\,\ldots,m. \tag{10}$$

T4. *Оптимальность по u: для всех моментов $t\in\Delta$*

$$u\,(t)=\arg\min_{v\in U(t,q(t),\dot q(t))}\Lambda\,(t,q,\dot q,v)\,. \tag{11}$$

T5. *Условия трансверсальности:*

$$\begin{gathered}\left[\frac{\partial\Lambda}{\partial\ddot q^i}\right]_{t=t_0}=\frac{\partial\lambda}{\partial\dot q_0^i},\ \left[\frac{\partial\Lambda}{\partial\dot q^i}-\frac{d}{dt}\left(\frac{\partial\Lambda}{\partial\ddot q^i}\right)\right]_{t=t_0}=\frac{\partial\lambda}{\partial q_0^i},\\ \left[\frac{\partial\Lambda}{\partial\ddot q^i}\right]_{t=t_1}=-\frac{\partial\lambda}{\partial\dot q_1^i},\ \left[\frac{\partial\Lambda}{\partial\dot q^i}-\frac{d}{dt}\left(\frac{\partial\Lambda}{\partial\ddot q^i}\right)\right]_{t=t_1}=-\frac{\partial\lambda}{\partial q_1^i},\\ i=1,\,\ldots,n.\end{gathered} \tag{12}$$

T6. *Стационарность по t_0 и t_1 (только для подвижных концов):*

$$\Pi\,(t_0)=-\frac{\partial\lambda}{\partial t_0},\ \Pi\,(t_1)=-\frac{\partial\lambda}{\partial t_1}. \tag{13}$$

T7. *Дополняющая нежесткость:*

$$\psi_\gamma J^\gamma\,(\Delta,q\,(\cdot)\,,u\,(\cdot))=0,\ \gamma=\bar d+1,\,\ldots,d; \tag{14}$$

$$\mu_b\,(t)\,C^b\,(t,q\,(t)\,,\dot q\,(t)\,,u\,(t))=0,\ t\in\Delta,\ b=\bar c+1,\,\ldots,c.$$

T8. *Согласование знаков:*

$$\psi_0\ge 0,\ \psi_\gamma\ge 0,\ \ \gamma=\bar d+1,\,\ldots,d;\ \ \mu_b\,(t)\ge 0,\ \ t\in\Delta,\ \ b=\bar c+1,\,\ldots,c. \tag{15}$$

Процесс, удовлетворяющий условиям теоремы, назовем *экстремальным процессом*, а соответствующую траекторию – *экстремалью.*

Доказательство теоремы опирается на результаты работ [2, 3]. Справедливость теоремы удобнее доказывать в два этапа. На первом этапе преобразуем исходную задачу к стандартной задаче оптимального управления стационарной системой $\dot x=f\,(x,u)$ с ограничениями на управление в виде системы равенств и неравенств $C^b\,(x,u)\le 0$, $C^b\,(t,q,\dot q,u)=0$ и интегральным критерием качества. Для такой задачи необходимые условия оптимальности получены в [2, с. 400]. Преобразование задачи потребует введения новых переменных (для времени, для вторых производных, для функционалов J^γ), введения новых дифференциальных связей и соответственно новых множителей Лагранжа для учета этих связей. На втором этапе полученные необходимые условия оптимальности переформулируем в терминах исходной задачи. При этом можно исключить и новые переменные, и новые множители Лагранжа, используя методику, показанную в [3] (для более простой задачи). Сопутствующие выкладки достаточно громоздки, но не содержат ничего принципиально нового. Содержательно теорема подтверждает достаточно естественный факт: для рассматриваемого класса гладких регулярных задач справедлив принцип Лагранжа для исследования задач оптимизации с дополнительными ограничениями в виде равенств и неравенств [4].

Рассмотрим утверждения теоремы более детально и выделим некоторые важные моменты. Ограничимся рассмотрением одного (любого) участка экстремальной траектории, на котором множество активных индексов постоянно. Вдоль экстремали, в силу дополняющей нежесткости для «пассивных» ограничений, соответствующие множители μ тождественно равны нулю. Используя условие общности положения, можно доказать, что на каждом участке постоянства множества активных индексов активные множители μ можно представить в виде линейных однородных функций множителей ψ, y с коэффициентами, зависящими от $t, q, \dot{q}, u$. Этот факт объясняет, в частности, почему условия нетривиальности множителей Лагранжа не включают множители μ: если в некоторый момент времени $\psi = 0$ и $y(t) = 0$, то автоматически $\mu(t) = 0$.

Условия стационарности по q дают для множителей Лагранжа $y(t)$ систему n дифференциальных уравнений второго порядка (присоединенные уравнения). Эти уравнения можно записать в виде

$$\sum_{k=1}^{n} a_{ik}\ddot{y}^k + \sum_{k=1}^{n}\left(\dot{a}_{ik} + b_{ik} + \frac{\partial Q_k}{\partial \dot{q}^i}\right)\dot{y}^k + \sum_{k=1}^{n}\left[\dot{b}_{ik} + c_{ik} + \frac{d}{dt}\left(\frac{\partial Q_k}{\partial \dot{q}^i}\right) - \frac{\partial Q_k}{\partial q^i}\right] y^k =$$
$$= \sum_{\gamma=0}^{d}\psi_\gamma\left[\frac{d}{dt}\left(\frac{\partial F^\gamma}{\partial \dot{q}^i}\right) - \frac{\partial F^\gamma}{\partial q^i}\right] + \sum_{b=1}^{c}\left[\frac{d}{dt}\left(\mu_b\frac{\partial C^b}{\partial \dot{q}^i}\right) - \mu_b\frac{\partial C^b}{\partial q^i}\right], \quad (16)$$

где

$$\begin{cases} a_{ik}(t,q,\dot{q}) & = & \frac{\partial^2 L}{\partial \dot{q}^i \partial \dot{q}^k}, \\ b_{ik}(t,q,\dot{q}) & = & \frac{\partial^2 L}{\partial \dot{q}^i \partial q^k} - \frac{\partial^2 L}{\partial q^i \partial \dot{q}^k}, \\ c_{ik}(t,q,\dot{q},\ddot{q}) & = & \frac{d}{dt}\left(\frac{\partial^2 L}{\partial q^i \partial \dot{q}^k}\right) - \frac{\partial^2 L}{\partial q^i \partial q^k}. \end{cases} \quad (17)$$

Экстремаль $q\,(t)$ считается известной, поэтому известны и скорости $\dot{q}\,(t)$, и ускорения $\ddot{q}\,(t)$. Ускорения можно получить из уравнений движения

$$\ddot{q}^{j}\left(t,q,\dot{q},u\right)=\sum_{l=1}^{n}a^{jl}\left(g_{l}+Q_{l}\right), \tag{18}$$

где $\left\{a^{jl}\right\}$ – матрица, обратная матрице $\{a_{ik}\}$, и

$$g_{l}\left(t,q,\dot{q}\right)=\frac{\partial L}{\partial q^{l}}-\frac{\partial^{2}L}{\partial\dot{q}^{l}\partial t}-\sum_{j=1}^{n}\frac{\partial^{2}L}{\partial\dot{q}^{l}\partial q^{j}}\dot{q}^{j}. \tag{19}$$

Поскольку матрица $\{a_{ik}\}$ невырожденна, присоединенные уравнения можно записать в виде, разрешенном относительно старших производных $\ddot{y}$.

Условия трансверсальности дают краевые условия для вышеприведенной системы дифференциальных уравнений. На левом конце при $t=t_0$ должно выполняться

$$\sum_{k=1}^{n}a_{ik}y^{k}=\sum_{\gamma=0}^{d}\psi_{\gamma}\frac{\partial f^{\gamma}}{\partial\dot{q}_{0}^{i}}, \tag{20}$$

$$\sum_{k=1}^{n}\left[a_{ik}\dot{y}^{k}+\left(b_{ik}+\frac{\partial Q_{k}}{\partial\dot{q}^{i}}\right)y^{k}\right]=\sum_{\gamma=0}^{d}\psi_{\gamma}\left(\frac{\partial F^{\gamma}}{\partial\dot{q}^{i}}-\frac{\partial f^{\gamma}}{\partial\dot{q}_{0}^{i}}\right)+\sum_{b=1}^{c}\mu_{b}\frac{\partial C^{b}}{\partial\dot{q}^{i}}. \tag{21}$$

На правом конце траектории при $t=t_1$ имеют место соотношения

$$\sum_{k=1}^{n}a_{ik}y^{k}=-\sum_{\gamma=0}^{d}\psi_{\gamma}\frac{\partial f^{\gamma}}{\partial\dot{q}_{0}^{i}}, \tag{22}$$

$$\sum_{k=1}^{n}\left[a_{ik}\dot{y}^{k}+\left(b_{ik}+\frac{\partial Q_{k}}{\partial\dot{q}^{i}}\right)y^{k}\right]=\sum_{\gamma=0}^{d}\psi_{\gamma}\left(\frac{\partial F^{\gamma}}{\partial\dot{q}^{i}}+\frac{\partial f^{\gamma}}{\partial\dot{q}_{0}^{i}}\right)+\sum_{b=1}^{c}\mu_{b}\frac{\partial C^{b}}{\partial\dot{q}^{i}}. \tag{23}$$

Используя невырожденность матрицы $\{a_{ik}\}$ и наличие зависимости $\mu(t,\psi,y)$, можно получить явные выражения для граничных условий системы (16):

$$y(t_0)=\Phi_{01}\left(t_0,q_0,\dot{q}_0,t_1,q_1,\dot{q}_1,\psi\right),\ \dot{y}(t_0)=\Phi_{02}\left(t_0,q_0,\dot{q}_0,t_1,q_1,\dot{q}_1,\psi\right),$$
$$y(t_1)=\Phi_{11}\left(t_0,q_0,\dot{q}_0,t_1,q_1,\dot{q}_1,\psi\right),\ \dot{y}(t_1)=\Phi_{12}\left(t_0,q_0,\dot{q}_0,t_1,q_1,\dot{q}_1,\psi\right).$$

В заключение данного раздела приведем еще одно полезное соотношение. Непосредственно проверяется, что вдоль экстремали выполнено равенство

$$\frac{d\Pi}{dt}=-\frac{\partial\Lambda}{\partial t}. \tag{24}$$

Рассмотрим склерономный случай, когда функции L, Q, C, F не зависят от времени t явно. Тогда правая часть обращается в нуль и, следовательно, вдоль экстремали $\Pi = \mathrm{const}$, или в развернутом виде

$$\sum_{\gamma=0}^{d}\psi_\gamma\left(\frac{\partial F^\gamma}{\partial \dot q^k}\dot q^k - F^\gamma\right) + \sum_{\mu=1}^{c}\mu_b\frac{\partial C^b}{\partial \dot q^k}\dot q^k - \sum_{i,k=1}^{n} a_{ik}\dot q^k \dot y^i + \\ + \sum_{i,k=1}^{n}\left[\frac{\partial L}{\partial q^i} - \frac{\partial^2 L}{\partial q^i \partial \dot q^k}\dot q^k + Q_i - \frac{\partial Q_i}{\partial \dot q^k}\dot q^k\right] y^i = \mathrm{const}\,. \quad (25)$$

Это соотношение, линейное по y и $\dot y$, можно рассматривать в качестве первого интеграла для присоединенных уравнений. Как и в классическом вариационном исчислении, это проявление общей закономерности: в задаче, инвариантной относительно некоторой группы преобразований (в склерономном случае – относительно преобразований сдвига по времени), существует первый интеграл [4, с. 402]. Этой теме посвящен следующий раздел.

3. Покомпонентная инвариантность гладкой регулярной задачи

Экстремальной траектории $q\,(t)$, $t \in \Delta$, соответствует график экстремали – кривая $(t, q\,(t))$, $t \in \Delta$, в расширенном конфигурационном пространстве. Введем в рассмотрение гладкое векторное поле $s(t, q)$, определенное в окрестности графика экстремальной траектории, с компонентами

$$s = s^0\,(t,q)\,, s^1\,(t,q)\,, \ldots, s^n\,(t,q)\,. \quad (26)$$

Каждое такое векторное поле можно рассматривать как инфинитезимальный оператор локальной однопараметрической группы преобразований [5, с. 21] в области с координатами $\left(t, q^1, \ldots, q^n\right)$.

Лемма. *Если на графике экстремали определены векторное поле $s\,(t,q)$ и гладкая функция $\Phi\,(t, q, \dot q)$ такие, что для всех $t \in \Delta$ выполнено тождество*

$$\frac{\partial \Lambda}{\partial t}s^0 + \sum_{k=1}^{n}\left[\frac{\partial \Lambda}{\partial q^k}s^k + \frac{\partial \Lambda}{\partial \dot q^k}\left(\dot s^k - \dot s^0 \dot q^k\right) + \frac{\partial \Lambda}{\partial \ddot q^k}\left(\ddot s^k - 2\dot s^0\ddot q^k - \ddot s^0 \dot q^k\right)\right] + \Lambda \dot s^0 = \frac{d\Phi}{dt}, \quad (27)$$

то вдоль экстремали справедливо соотношение

$$\sum_{k=1}^{n}\left[\frac{\partial \Lambda}{\partial \ddot q^k}\left(\dot s^k - \dot q^k s^0\right) + \left[\frac{\partial \Lambda}{\partial \dot q^k} - \frac{d}{dt}\left(\frac{\partial \Lambda}{\partial \ddot q^k}\right)\right] s^k\right] - \Pi s^0 = \Phi + \mathrm{const}\,. \quad (28)$$

Доказательство заключается в дифференцировании (28) с учетом уравнений движения, необходимых условий оптимальности и тождества (24).

Формально лемма дает выражение для первого интеграла присоединенных уравнений в виде (28), но конструктивная ценность полученного результата снижается сложностью проверки условий инвариантности (27), поскольку в выражения для Λ входят искомые вспомогательные переменные принципа максимума. Ниже будут получены другие условия инвариантности, проверка которых требует только информации о компонентах (K1)–(K4) рассматриваемой задачи оптимального управления.

Для сокращения выкладок введем ряд обозначений.

Определим оператор Эйлера E, действующий на функции $\Psi\left(t,q,\dot q,\ddot q\right)$ по правилу

$$E_k\Psi=\frac{\partial\Psi}{\partial q^k}-\frac{d}{dt}\left(\frac{\partial\Psi}{\partial\dot q^k}\right)+\frac{d^2}{\partial t^2}\left(\frac{\partial\Psi}{\partial\ddot q^k}\right),\ k=1,\,\ldots,n. \tag{29}$$

Тогда уравнения движения (1) можно записать в виде $E_kL+Q_k=0$.

По данному векторному полю (26) построим выражения

$$\begin{aligned} s^{n+k}\left(t,q,\dot q\right)&=\dot s^k-\dot s^0\dot q^k,\ k=1,\,\ldots,n,\\ s^{2n+k}\left(t,q,\dot q,\ddot q\right)&=\ddot s^k-2\dot s^0\ddot q^k-\ddot s^0\dot q^k,\ k=1,\,\ldots,n. \end{aligned} \tag{30}$$

Это известные формулы продолжения [5, с. 26]. Определим набор гладких функций

$$w\left(t,q,\dot q,u\right)=\left(w_1\left(t,q,\dot q,u\right),\,\ldots,w_m\left(t,q,\dot q,u\right)\right). \tag{31}$$

Следуя работе [5, с. 226], введем оператор Ли–Бэклунда, действующий на функции $\Psi\left(t,q,\dot q,\ddot q,u\right)$ по правилу

$$\pounds_{(s,w)}\Psi=\frac{\partial\Psi}{\partial t}s^0+\sum_{k=1}^{n}\left(\frac{\partial\Psi}{\partial q^k}s^k+\frac{\partial\Psi}{\partial\dot q^k}s^{n+k}+\frac{\partial\Psi}{\partial\ddot q^k}s^{2n+k}\right)+\sum_{r=1}^{m}\frac{\partial\Psi}{\partial u_r}w_r. \tag{32}$$

Если функция не зависит от u, вместо $\pounds_{(s,w)}$ будем писать $\pounds_{(s)}$.

Упорядоченный по возрастанию набор $\tilde A$ неповторяющихся индексов из множества $\{1,\,\ldots,\bar c,\bar c+1,\,\ldots,c\}$ назовем допустимым, если $\tilde A$ состоит из индексов $1,\,\ldots,\bar c$ и (возможно пустого) множества индексов из $\bar c+1,\,\ldots,c$. Обозначим через $\Omega(\tilde A)$ множество точек $(t,q,\dot q,\ddot q,u)$, удовлетворяющих условиям $EL+Q=0$ и $C^b\left(t,q,\dot q,u\right)=0$ для всех $b\in\tilde A$.

Определение. *Пусть* $s\left(t,q\right)=\left(s^0\left(t,q\right),s^1\left(t,q\right),\,\ldots,s^n\left(t,q\right)\right)$ *– инфинитезимальный оператор локальной однопараметрической группы преобразований расширенного конфигурационного пространства. Задача оптимального* *управления механической системой называется покомпонентно инвариантной относительно действия группы, если существуют функции* $B^\gamma(t,q,\dot q)$, $\gamma = 0,1,\ldots,d$, *и* $w_r\,(t,q,\dot q,u)$, $r = 1,\ldots,m$, *такие, что для любого допустимого набора индексов* $\tilde A$ *тождественно выполняются соотношения*

$$\left[\pounds_{(s,w)}F^\gamma + F^\gamma \dot s^0 = \frac{dB^\gamma}{dt}\right]_{\Omega(\tilde A)},\ \gamma = 0,1,\ldots,d; \tag{33}$$

$$\left[\pounds_{(s,w)}C^b = 0\right]_{\Omega(\tilde A)}\quad \textit{для всех}\ \ b\in\tilde A; \tag{34}$$

$$\left[\pounds_{(s)}\mathrm{E}_k L + \pounds_{(s,w)}Q_k = 0\right]_{\Omega(\tilde A)},\ k = 1,\ldots,n. \tag{35}$$

Используя это определение, можно сформулировать такую теорему.

Теорема 2. *Если задача оптимального управления покомпонентно инвариантна относительно действия локальной однопараметрической группы преобразований, действующей на расширенном конфигурационном пространстве, то на экстремали сохраняет свое значение выражение*

$$M_{(s)} = \sum_{k=1}^{n}\left[\frac{\partial\Lambda}{\partial\ddot q^k}s^{n+k} + \left[\frac{\partial\Lambda}{\partial\dot q^k} - \frac{d}{dt}\left(\frac{\partial\Lambda}{\partial\ddot q^k}\right)\right]s^k\right] - \Pi s^0 - \sum_{\gamma=0}^{d}\psi_\gamma B^\gamma = \mathrm{const}\,. \tag{36}$$

Для доказательства дифференцируем (36) с учетом уравнений движения, необходимых условий оптимальности (9) и тождества (24). Группируя члены при вспомогательных переменных принципа максимума и учитывая условия покомпонентной инвариантности, получаем $dM_{(s)}/dt = 0$.

Отметим три факта, полезных при практическом применении теоремы.

1. В развернутом виде закон сохранения (36) имеет вид

$$\begin{aligned}
M_{(s)} = \sum_{\gamma=0}^{d}\psi_\gamma\left[\sum_{k=1}^{n}\frac{\partial F^\gamma}{\partial\dot q^k}\left(s^k - \dot q^k s^0\right) + F^\gamma s^0 - B^\gamma\right] + \\
+ \sum_{b\in A(t)}\mu_b\sum_{k=1}^{n}\frac{\partial C^b}{\partial\dot q^k}\left(s^k - \dot q^k s^0\right) - \sum_{i=1}^{n}\dot y^i\sum_{k=1}^{n}a_{ik}\left(s^k - \dot q^k s^0\right) + \\
+ \sum_{i=1}^{n}y^i\left\{\sum_{k=1}^{n}a_{ik}\left(\dot s^k - \dot s^0\dot q^k\right) + \right. \\
\left. + \sum_{k=1}^{n}\left(b_{ik} - \frac{\partial Q_i}{\partial\dot q^k}\right)\left(s^k - \dot q^k s^0\right) - \left(g_i + Q_i\right)s^0\right\} = \mathrm{const},
\end{aligned} \tag{37}$$

где коэффициенты a_{ik}, b_{ik}, g_i определяются по лагранжиану $L\,(t,q,\dot q)$ при помощи формул (17), (19).

2. Заметим, что функции $w_r(t, q, \dot{q}, u)$ не фигурируют в законе сохранения – они нужны только при проверке условий инвариантности, причем при такой проверке достаточно доказать лишь существование этих функций. С этой точки зрения важно отметить, что условия (33)–(35) можно рассматривать как систему линейных алгебраических уравнений относительно неизвестных w_r, $r = 1, \ldots, m$, а вопрос существования решения такой системы решается стандартными методами линейной алгебры.

3. В задачах физики значительный интерес представляют инвариантные функции Лагранжа, в которых $\pounds_{(s)}(L) + \dot{s}^0 L \equiv 0$. В этом случае представляет интерес другая форма условия (35). Непосредственной проверкой доказывается следующее коммутационное соотношение между оператором Эйлера–Лагранжа и оператором Ли–Беклунда

$$E_k\left[\pounds_{(s)}L + \dot{s}^0 L\right] = \pounds_{(s)}\left[E_k(L)\right] + \dot{s}^0 E_k L + \sum_{i=1}^{n}\left(\frac{\partial s^i}{\partial q^k} - \dot{q}^i \frac{\partial s^0}{\partial q^k}\right) E_i L. \qquad (38)$$

(В работе [6] коммутационное соотношение доказано для более общего случая.) Учитывая коммутационное соотношение движения, получаем условие инвариантности уравнений движения (35) в форме

$$E_k\left[\pounds_{(s)}(L) + \dot{s}^0 L\right] + \pounds_{(s,w)} Q_k + \dot{s}^0 Q_k + \sum_{i=1}^{n}\left(\frac{\partial s^i}{\partial q^k} - \dot{q}^i \frac{\partial s^0}{\partial q^k}\right) Q_i = 0,\ k = 1, \ldots, n.$$

Так что для инвариантного лагранжиана L получаем условие только на обобщенные силы Q.

Содержательный пример для предлагаемой методики приведен в работе [7]. Из работ, посвященных использованию симметрии в задачах оптимального управления, автору известна статья [8].

Литература

1. Бухгольц Н. Н. Основной курс теоретической механики. М.: Наука, 1972.
2. Болтянский В. Г. Математические методы оптимального управления. М.: Наука, 1969.
3. Kukushkin A. P. Necessary condition of optimality for the control lagrangian system // Problems of Control and Information Theory. 1984. P. 229–238.
4. Алексеев В. М., Тихомиров В. М., Фомин С. В. Оптимальное управление. М.: Наука, 1979.
5. Ибрагимов В. Х. Группы преобразований в математической физике. М.: Наука, 1983.

6. Олвер П. Приложения групп Ли к дифференциальным уравнениям. М.: Мир, 1989.

7. Буханов Д. В., Кукушкин А. П. Быстродействие и симметрии на сфере // Проблемы теоретической и прикладной математики. Тр. 32-й Регионал. молодеж. конф. Екатеринбург: УрО РАН, 2001. С. 245–259.

8. van der Shaft A. J. Symmetries in optimal control // SIAM J. Control and Optimization. 1987. Vol. 25, №2. P. 183–187.

Статья поступила 17.10.2002 г.
Окончательный вариант 09.12.2002 г.