УДК 517.977.55

Э. Г. Альбрехт, Л. А. Сазанова

О ПОСТРОЕНИИ ДОПУСТИМЫХ УПРАВЛЕНИЙ В ГЛОБАЛЬНО УПРАВЛЯЕМЫХ НЕЛИНЕЙНЫХ ДИСКРЕТНЫХ СИСТЕМАХ*

Введение

Известно [1, 2], что если система первого приближения вполне управляема, то исходная нелинейная система дифференциальных уравнений вполне управляема в достаточно малой окрестности невозмущенного движения. Различным аспектам вычисления оптимального или допустимого управлений в нелинейных непрерывных системах по первому приближению посвящены работы [1–8]. Разработаны итерационные методы построения оптимального или допустимого управления, приводящего нелинейную систему в заданное состояние, и обоснована их сходимость [2–8], когда возмущения, вызываемые нелинейностями в уравнениях движения, достаточно малы. На основе метода Пикара искомое управление вычисляется как предел последовательности решений линейных задач оптимального управления. Показано [8], что итерационная процедура построения допустимого управления сходится, если нелинейные члены в правой части уравнений движения управляемой системы удовлетворяют глобальному условию Коши–Липшица по фазовым переменным и управляющим силам и если постоянная Липшица достаточно мала. Это требование является существенным. Если отсутствует указанное ограничение на рост нелинейных членов, то в управляемой системе могут появиться движения, которые быстро растут и с большой скоростью стремятся к бесконечности. В таких ситуациях постоянная Липшица также стремится к бесконечности, что приводит к расходимости итерационной процедуры [8].

В данной работе рассматривается задача о построении допустимого программного управления с ограниченной энергией, переводящего нелинейную дискретную систему из заданного начального в заданное конечное состояние. Предполагается, что правая часть уравнений движения содержит слагаемые, зависящие от фазовых координат в произвольной степени. В таких ситуациях итерационная процедура построения допустимого программного управления, вообще говоря, расходится [9–11]. Последнее обстоятельство вынуждает

*Работа выполнена при финансовой поддержке РФФИ, грант №03-01-00599.

изыскивать способы улучшения сходимости [11] итерационной процедуры [8]. Одним из таких способов является предварительная стабилизация [12] исходной системы до асимптотической устойчивости по Ляпунову в большом или целом, т. е. таким образом, чтобы начальное и конечное состояния находились в области устойчивости. Целью статьи является обоснование сходимости итерационной процедуры [8] в случае глобально управляемых нелинейных дискретных систем при любых граничных условиях из области притяжения начала координат.

1. Постановка задачи

Пусть управляемый процесс описывается нелинейной дискретной системой

$$x(k+1) = A_1 x(k) + Bu(k) + f\big(x(k)\big), \quad k = k_0, k_0+1, \dots, N-1, \tag{1.1}$$

где $x \in \mathbb{R}_n$ – вектор фазовых координат, описывающий состояние рассматриваемого процесса в произвольный дискретный момент времени $k \in [k_0, N-1]$; $u \in \mathbb{R}_m$ – вектор управляющих сил; $A_1 \in \mathbb{R}_{nn}$ и $B \in \mathbb{R}_{nm}$ – постоянные матрицы, вектор-функцию $f(x)$ определим ниже.

Качество процесса управления оценивается количеством расходуемой энергии:

$$I[u] = \sum_{k=k_0}^{N-1} u^\top(k)\, u(k), \tag{1.2}$$

где символ $\top$ означает транспонирование.

Задача 1.1. *Даны начальное и желаемое конечное состояния $x(k_0) = x^{(\Lambda)}$ и $x(N) = x^{(\Omega)}$ соответственно, причем $N - 1 - k_0 \geq n$. Требуется найти управление $u^*(k)$ в классе однозначных вектор-функций аргумента k, переводящее систему (1.1) из начального состояния $x(k_0) = x^{(\Lambda)}$ в конечное состояние $x(N) = x^{(\Omega)}$ и такое, что конечна величина расходуемой энергии $I[u^*]$, т. е. $I[u^*] < \infty$.*

Будем предполагать, что выполнены следующие условия.

Условие 1.1. *Ранг матрицы $K = \{B, A_1 B, \dots, A_1^{n-1} B\}$ равен n.*

Условие 1.2. *Вектор-функция $f(x)$, описывающая нелинейные члены в уравнениях движения (1.1), имеет вид*

$$f(x) = f^{(1)}(x) + \dots + f^{(r)}(x).$$

Здесь r – заданное натуральное число, а символ $f^{(j)}(x)$ означает форму j-го порядка переменных $x_1, x_2, \dots, x_n$.

Управление $u^*(k)$, разрешающее задачу 1.1, в общем случае будем строить в виде

$$u^*(k) = w\big(x(k)\big) + v^*(k). \tag{1.3}$$

Здесь $w(x) = Cx$ – управление по принципу обратной связи, которое стабилизирует [12] систему (1.1); $v^*(k)$ – программное управление, разрешающее задачу 1.1 для следующей системы:

$$x(k+1) = A\,x(k) + Bv(k) + f\big(x(k)\big), \quad k = k_0,\, k_0+1, \ldots, N-1, \tag{1.4}$$

где $A = A_1 + BC$. При условии 1.1 матрицу $C \in \mathbb{R}_{mn}$ можно выбрать так, чтобы была асимптотически устойчива [13, 14] при $v \equiv 0$ система первого приближения, соответствующая уравнению (1.4)

$$x(k+1) = Ax(k) + Bv(k), \quad k = k_0,\, k_0+1, \ldots, N-1. \tag{1.5}$$

Очевидно, что система (1.5) вполне управляема [2] и, следовательно, выполнено условие 1.1 при $A_1 = A$.

Для определенности будем полагать, что управление $w(x) = Cx$ выбрано так, что нелинейная система (1.4) асимптотически устойчива в большом [13, с. 519], т. е. известны области

$$G = \{x \in R_n : \|x\| \le h\} \ \text{ и } \ \Gamma = \{x \in R_n : \|x\| \le H\}, \quad h < H,$$

такие, что решение $x(k;\, x^{(\Lambda)},\, k_0)$ системы (1.4) при любых начальных возмущениях $x^{(\Lambda)} \in G$ и всех $k > k_0$ содержится в Γ, и имеет место предельное равенство $\lim_{k\to\infty} x\big(k;\, x^{(\Lambda)},\, k_0\big) = 0$. Здесь и далее символ $\|x\|$ обозначает евклидову норму вектора x.

Для упрощения изложения мы ограничиваемся линейным стабилизирующим управлением. Однако в общем случае естественно пытаться за счет подбора нелинейных членов максимальным образом увеличить размеры областей G и Γ. Такая ситуация обсуждается ниже в конкретном примере.

Рассмотрим вспомогательную задачу.

Задача 1.2. *Даны начальное и желаемое конечное состояния $x(k_0) = x^{(\Lambda)}$ и $x(N) = x^{(\Omega)}$ соответственно, причем $N - 1 - k_0 \ge n$, и задана некоторая функция $f(k) \in \mathbb{R}_n$. Требуется найти оптимальное управление $v^\circ(k)$ в классе однозначных вектор-функций аргумента k, переводящее систему*

$$x(k+1) = Ax(k) + Bv(k) + f(k), \quad k = k_0,\, k_0+1, \ldots, N-1, \tag{1.6}$$

из начального состояния $x(k_0) = x^{(\Lambda)}$ в конечное состояние $x(N) = x^{(\Omega)}$ и минимизирующее величину $I[v]$.

Вычислим оптимальное управление $v^{(0)}(k)$, разрешающее задачу 1.2 для системы первого приближения (1.5). Для удобства вычислений введем обозначения:

$$c^{(0)}(k_0) = x^{(\Omega)} - A^{N-k_0}x^{(\Lambda)} - \sum_{k=k_0}^{N-1} A^{N-k-1}f(k),$$

$$S(k) = A^{N-k-1}B,\ (k_0 \le k \le N-1),\ D(k_0) = \sum_{k=k_0}^{N-1} S(k)\,S^{\top}(k).$$

При условии 1.1 управление $v^{(0)}(k)$ существует для любых граничных условий $x(k_0) = x^{(\Lambda)}$, $x(N) = x^{(\Omega)}$ и имеет вид [15]

$$v^{(0)}(k) = S^{\top}(k)\,D^{+}(k_0)\,c^{(0)}(k_0), \quad k = k_0,\, k_0+1, \ldots, N-1\,. \tag{1.7}$$

Здесь $D^{+}(k_0)$ – матрица, псевдообратная [16, с. 276] к $D(k_0)$. Через $x^{(0)}(k)$, $(k = k_0,\, k_0+1, \ldots, N)$ обозначим оптимальное движение системы (1.5), соответствующее управлению (1.7).

Условие 1.3. *Векторы $x^{(\Lambda)}$ и $x^{(\Omega)}$, описывающие граничные условия в задаче 1.2, содержатся в области G и таковы, что $\{x^{(0)}(k), (k{=}k_0, k_0{+}1, \ldots, N)\}$ принадлежит внутренности области* Γ.

Возьмем [5, 8] оптимальное движение $x^{(0)}(k)$, $(k = k_0,\, k_0+1, \ldots, N)$ системы (1.5) за исходное и рассмотрим последовательность линейных управляемых систем

$$\begin{gathered} x(k+1) = Ax(k) + Bv(k) + f^{(q)}(k), \quad f^{(q)}(k) = f\big(x^{(q-1)}(k)\big), \\ k = k_0,\, k_0+1, \ldots, N-1; \quad q = 1, 2, \ldots. \end{gathered} \tag{1.8}$$

При каждом $q = 1, 2, \ldots$ будем строить оптимальное управление $v^{(q)}(k)$, разрешающее задачу 1.2 для системы (1.8), и порождаемое им оптимальное движение $x^{(q)}(k)$. Движение $x^{(q)}(k)$ определяет управляемую систему (1.8) на следующем шаге итераций.

Цель статьи – показать, что при выполнении условий 1.1–1.3 последовательность функций $\{x^{(q)}(k),\, v^{(q)}(k)\}$, $q = 1, 2, \ldots$, сходится равномерно по k к паре функций $\big\{x^{*}(k),\, v^{*}(k)\big\}$, причем управление $v^{*}(k)$ является искомым решением задачи 1.1 для системы (1.4), а $x^{*}(k)$ – порождаемое им движение.

Отметим, что условие 1.3 является существенным. Если хотя бы одна из точек $x^{(\Lambda)}$ или $x^{(\Omega)}$ не содержится в области G притяжения начала координат $x = 0$, то предлагаемая итерационная процедура, вообще говоря, расходится [9–11]. Ниже приведен соответствующий пример.

2. Обоснование сходимости итерационной процедуры

В этом разделе обосновывается сходимость последовательности оптимальных решений $\{x^{(q)}(k),\, v^{(q)}(k)\}$, $q = 1, 2, \ldots,$ линейных задач 1.2, (1.8) при условиях 1.1–1.3. Без ограничения общности доказательство будем проводить в предположении, что $x^{(\Lambda)} = 0$. Если это не так, то можно сделать параллельный перенос системы координат в точку $x^{(\Lambda)}$ и решить задачу 1.1 для измененной соответствующим образом системы. На q-м шаге итераций получаем

$$v^{(q)}(k) = S^{\top}(k)\, D^{+}(k_0)\, c^{(q)}(k_0), \quad k = k_0, k_0+1, \ldots, N-1, \tag{2.1}$$

$$c^{(q)}(k_0) = c^{(0)}(k_0) - \sum_{k=k_0}^{N-1} A^{N-k-1} f\big(x^{(q-1)}(k)\big),$$

$$x^{(q)}(k) = A^{k-k_0} x^{(\Lambda)} + \sum_{i=k_0}^{k-1} A^{k-i-1} B v^{(q)}(i) + \sum_{i=k_0}^{k-1} A^{k-i-1} f\big(x^{(q-1)}(i)\big), \tag{2.2}$$

$$k = k_0,\, k_0+1, \ldots, N-1 \qquad (q = 1,\, 2,\, 3,\, \ldots\,).$$

Оценим величины $\|\, v^{(q)}\,(k)\,\|$ и $\|\, x^{(q)}\,(k)\,\|$. Для этого введем норму элемента $x = \{\, x(k_0),\, x(k_0+1),\, \ldots,\, x(N)\,\}$ пространства $\mathbb{R}_{n\cdot(N-k_0+1)}$ следующим образом:

$$\rho(x) = \max_{k_0 \le k \le N} \|x(k)\|.$$

Соответственно норма элемента $v = \{v(k_0),\, v(k_0+1), \ldots, v(N-1)\}$ определяется равенством

$$\rho(v) = \max_{k_0 \le k \le N-1} \|v(k)\|.$$

Построим оценки для $\{\rho(x^{(q)})\}$, $q = 0,\, 1,\, 2,\, \ldots,$ и $\{\rho(u^{(q)})\}$, $q = 0,\, 1,\, 2,\, \ldots.$ Поскольку нулевое решение системы (1.5) равномерно асимптотически устойчиво при $v \equiv 0$, для $\|A^{N-k}\|$ справедлива оценка [14, с. 39]

$$\|A^{N-k}\| \le L\, \lambda^{N-k}, \tag{2.3}$$

где L – некоторая постоянная; λ $(0 < \lambda < 1)$ – наибольший из модулей собственных чисел матрицы A. Выбором стабилизирующего управления $w\big(x(k)\big)$ величину λ можно сделать сколь угодно малой. Введем обозначения:

$$\|B\| = b, \quad \|D^{+}(k_0)\| = d, \quad \|x^{(\Omega)}\| = \Omega. \tag{2.4}$$

Используя (1.7), (2.3), (2.4) и учитывая, что $x^{(\Lambda)} \equiv 0$, имеем

$$\|v^{(0)}(k)\| \le L\lambda^{N-k-1} b\, d\, \Omega,$$

следовательно,

$$\rho(v^{(0)}) \leq L\,b\,d\,\Omega. \tag{2.5}$$

Оптимальное движение системы (1.5) определяется равенством

$$x^{(0)}(k) = \sum_{i=k_0}^{k-1} A^{k-i-1} B v^{(0)}(i),$$

откуда получаем следующую оценку $\|x^{(0)}(k)\|$:

$$\|x^{(0)}(k)\| \leq \sum_{j=k_0}^{k-1} L\lambda^{k-1-j} b \left\|v^{(0)}(k)\right\| \leq L^2 b^2 d\,\Omega\,\frac{\lambda^{N-k}\bigl(1-\lambda^{k-k_0}\bigr)}{1-\lambda}. \tag{2.6}$$

Из (2.6) находим

$$\rho(x^{(0)}) \leq L^2 b^2 d\,\Omega\,\frac{\bigl(1-\lambda^{N-k_0}\bigr)}{1-\lambda} \stackrel{\text{def}}{=} \alpha_0. \tag{2.7}$$

Рассуждая аналогично, оценим величину $\left\|v^{(1)}(k)\right\|$:

$$\begin{gathered}\left\|v^{(1)}(k)\right\| \leq L\lambda^{N-k-1} b\,d\left(\Omega + \sum_{j=k_0}^{N-1} L\,\lambda^{N-j-1}\left\|f\bigl(x^{(0)}(j)\bigr)\right\|\right) \leq \\ \leq L\lambda^{N-k-1} b\,d\,\Omega + L^2 b\,d\,\frac{\lambda^{N-k-1}\bigl(1-\lambda^{N-k_0}\bigr)}{1-\lambda} \max_{k_0\leq j\leq N-1}\left\|f\bigl(x^{(0)}(j)\bigr)\right\|.\end{gathered} \tag{2.8}$$

Так как вектор-функция $f\bigl(x(k)\bigr)$ представляет собой сумму форм со 2-го до r-го порядка от переменных $x_1(k)$, $x_2(k)$, $\ldots x_n(k)$, справедлива оценка

$$\left\|f\bigl(x(k)\bigr)\right\| \leq s_2\left\|x(k)\right\|^2 + \ldots + s_r\left\|x(k)\right\|^r = P_r\bigl(\|x(k)\|\bigr) \quad (s_i \geq 0), \tag{2.9}$$

где через $P_r\bigl(\|x(k)\|\bigr)$ обозначен полином степени r от переменной $\left\|x(k)\right\|$, стоящий в правой части неравенства (2.9). Тогда, используя неравенства (2.6), (2.7), получаем

$$\max_{k_0\leq j\leq N-1}\left\|f\bigl(x^{(0)}(j)\bigr)\right\| \leq P_r\left(\max_{k_0\leq j\leq N-1}\left\|x^{(0)}(j)\right\|\right) \leq P_r(\lambda\,\alpha_0).$$

Из последнего неравенства, а также из (2.8), (2.9) находим

$$\begin{gathered}\left\|v^{(1)}(k)\right\| \leq L\lambda^{N-k-1} b\,d\,\Omega + L^2 b\,d\,\frac{\lambda^{N-k-1}\bigl(1-\lambda^{N-k_0}\bigr)}{1-\lambda} P(\lambda\,\alpha_0), \\ \rho(v^{(1)}) \leq L\,b\,d\,\Omega + L^2 b\,d\,\frac{\bigl(1-\lambda^{N-k_0}\bigr)}{1-\lambda} P(\lambda\,\alpha_0).\end{gathered} \tag{2.10}$$

Из равенства

$$x^{(1)}(k) = \sum_{i=k_0}^{k-1} A^{k-i-1} B v^{(1)}(i) + \sum_{i=k_0}^{k-1} A^{k-i-1} f\big(x^{(0)}(i)\big),$$

а также из (2.10) следуют оценки

$$\begin{gathered}\big\|x^{(1)}(k)\big\| \le L^2 b^2 d\Omega \, \frac{\lambda^{N-k}\big(1-\lambda^{k-k_0}\big)}{1-\lambda} + \\ + L^3 b^2 d \, \frac{\lambda^{N-k}\big(1-\lambda^{k-k_0}\big)\,\big(1-\lambda^{N-k_0}\big)}{(1-\lambda)^2} P(\lambda\,\alpha_0) + \\ + L\,\frac{\big(1-\lambda^{k-k_0}\big)}{1-\lambda}\, P\Big(\max_{k_0\le i\le k-1}\big\|x^{(0)}(i)\big\|\Big), \\ \rho(x^{(1)}) \le L^2 b^2 d\,\Omega \, \frac{\big(1-\lambda^{N-k_0}\big)}{1-\lambda} + \\ + L\,\frac{\big(1-\lambda^{N-k_0}\big)}{1-\lambda}\Big(L^2 b^2 d\,\frac{\big(1-\lambda^{N-k_0}\big)}{1-\lambda} + 1\Big) P(\lambda\,\alpha_0) \overset{\text{def}}{=} \alpha_1.\end{gathered}$$

Кроме того,

$$\begin{gathered}\max_{k_0\le k\le N-1}\big\|x^{(1)}(k)\big\| \ \le L^2 b^2 d\,\Omega\,\frac{\lambda\big(1-\lambda^{N-k_0-1}\big)}{1-\lambda} + \frac{\big(1-\lambda^{N-k_0-1}\big)}{1-\lambda}\times \\ \times\left(L^3 b^2 d\,\frac{\lambda\big(1-\lambda^{N-k_0}\big)}{1-\lambda} P(\lambda\,\alpha_0) + L\,\frac{\big(1-\lambda^{N-k_0-1}\big)}{1-\lambda}\, P\Big(\max_{k_0\le i\le N-2}\big\|x^{(0)}(i)\big\|\Big)\right) \le \\ \le \lambda\,\frac{\big(1-\lambda^{N-k_0}\big)}{1-\lambda}\,\left(L^2 b^2 d\,\Omega + L\Big(L^2 b^2 d\,\frac{\big(1-\lambda^{N-k_0}\big)}{(1-\lambda)} + \ 1\Big)\, P(\lambda\,\alpha_0)\right),\end{gathered}$$

откуда получаем

$$\max_{k_0\le k\le N-1}\big\|x^{(1)}(k)\big\| \ \le \lambda\,\alpha_1.$$

Рассуждая аналогично предыдущему, на q-й итерации имеем

$$\rho(v^{(q)}) \le L\,b\,d\,\Omega + L^2 b\,d\,\frac{\big(1-\lambda^{N-k_0}\big)}{1-\lambda}\, P(\lambda\,\alpha_{q-1}), \tag{2.11}$$

$$\begin{gathered}\rho(x^{(q)}) \le L^2 b^2 d\,\Omega\,\frac{\big(1-\lambda^{N-k_0}\big)}{1-\lambda} + L\,\frac{\big(1-\lambda^{N-k_0}\big)}{1-\lambda}\times \\ \times\Big(L^2 b^2 d\,\frac{\big(1-\lambda^{N-k_0}\big)}{1-\lambda} + 1\ \Big)\, P(\lambda\,\alpha_{q-1}) \overset{\text{def}}{=} \alpha_q;\end{gathered} \tag{2.12}$$

$$\max_{k_0 \le k \le N-1} \left\| x^{(q)}(k) \right\| \le \lambda\, \alpha_q.$$

Предположим, что величины $\lambda\alpha_q$ для всех $q \ge 0$ удовлетворяют неравенству $\lambda\alpha_q < 1$ (значения параметра λ, при которых справедливо последнее неравенство, определим позже). Тогда $P(\lambda\, \alpha_q)$ допускает оценку

$$P(\lambda\, \alpha_q) \le s(\lambda\alpha_q)^2\, \frac{\left(1 - (\lambda\alpha_q)^{r-1}\right)}{1 - \lambda\alpha_q} \le s(r-1)(\lambda\alpha_q)^2, \tag{2.13}$$

где $s = \max_{2 \le i \le r} s_i$. При $0 < \lambda < 1$ справедливо неравенство

$$\frac{\left(1 - \lambda^{N-k_0}\right)}{1 - \lambda} \le N - k_0 + 1.$$

Используя его и (2.13) и вводя обозначение

$$\Phi = L\,(N - k_0 + 1)\left(L^2 b^2 d\,(N - k_0 + 1) + 1\right) s(r-1), \tag{2.14}$$

получаем последовательность $\{\alpha_q\}$, $q = 0,\,1,\,2,\,\ldots$, определяемую соотношениями

$$\begin{gathered} \alpha_0 = L^2 b^2 d\,\Omega(N - k_0 + 1), \\ \alpha_q = \alpha_0 + \Phi(\lambda\alpha_{q-1})^2 \quad (q \ge 1), \end{gathered} \tag{2.15}$$

которая, согласно (2.12), является мажорирующей для последовательности

$$\left\{\rho(x^{(q)})\right\},\ q = 0,\,1,\,2,\,\ldots\,.$$

При $\lambda \to 0$ последовательность $\{\alpha_q\}$, $q = 0,\,1,\,2,\,\ldots$, имеет предел, равный $L^2 b^2 d\,\Omega(N - k_0 + 1) = \alpha_0$. Пусть зафиксировано некоторое значение λ, $0 < \lambda < 1$, и $q \to \infty$. Тогда $\lim_{q \to \infty} \alpha_q = \Delta$ является решением уравнения

$$\Delta = \alpha_0 + \Phi(\lambda\Delta)^2, \tag{2.16}$$

где Φ определяется согласно (2.14). Решения (2.16) имеют вид

$$\Delta_{1,2} = \frac{1 \pm \sqrt{1 - 4\alpha_0\Phi\lambda^2}}{2\Phi\lambda^2},$$

причем $\Delta_1 = \Delta_2 = 2\alpha_0$ при $\lambda = 1/2\sqrt{\alpha_0\Phi}$.

Следовательно, в силу теоремы о неявной функции отображение, заданное рекуррентными соотношениями (2.15), имеет единственную неподвижную точку α^* при

$$\lambda < 1/2\sqrt{\alpha_0\Phi}. \tag{2.17}$$

Наконец, из того, что последовательность $\{\alpha_q\}$, $q = 0,\, 1,\, 2,\, \ldots$, при $\lambda > 0$ строго монотонно возрастает, следует, что предположение $\lambda\alpha_q < 1$ выполнено для всех тех значений λ, для которых $2\lambda\alpha_0 < 1$. Последнее верно, если

$$\lambda < 1/2\alpha_0. \tag{2.18}$$

Окончательно имеем: если выбрано λ, удовлетворяющее неравенствам (2.17) и (2.18), то последовательность $\bigl\{\rho(x^{(q)})\bigr\}$, $q = 0,\, 1,\, 2,\, \ldots$, мажорируется сходящейся последовательностью $\{\alpha_q\}$, $q = 0,\, 1,\, 2,\, \ldots$, и, следовательно, сходится. Значит, сходится равномерно по k и последовательность $\bigl\{x^{(q)}(k)\bigr\}$, $q = 0, 1,\, 2,\, \ldots$.

Рассуждая аналогично предыдущему и используя соотношения (2.5) и (2.11), нетрудно доказать, что последовательность $\bigl\{v^{(q)}(k)\bigr\}$, $q = 0,\, 1,\, 2,\, \ldots$, сходится к некоторому допустимому управлению $v^*(k)$, $k = 0, 1, \ldots, N-1$. Непосредственной подстановкой $v^*(k)$ в систему (1.4) убеждаемся, что построенное управление является решением задачи 1.1 для этой системы.

Таким образом, справедлив следующий вывод:

Теорема 2.1. *Пусть поведение управляемого процесса описывается нелинейной дискретной системой* (1.1) *и выполнены условия* 1.1, 1.2. *Пусть стабилизирующее управление $w\bigl(x(k)\bigr)$ выбрано так, что выполнены условия* 1.3, (2.17) *и* (2.18). *Тогда для любых векторов $x^{(\Lambda)} \in G$ и $x^{(\Omega)} \in G$, описывающих граничные условия в задаче* 1.1, *существует допустимое управление $u^*(k)$. Оно определено равенством $u^*(k) = w\bigl(x^*(k)\bigr) + v^*(k)$, где $\bigl\{x^*(k),\, v^*(k)\bigr\}$ – предел последовательности оптимальных решений линейных задач* 1.2, (1.8).

3. Примеры

В этом разделе приводятся результаты вычислительных экспериментов, иллюстрирующие материал разделов 1 и 2, когда динамика управляемого процесса описывается нелинейной системой второго порядка

$$\begin{cases} x_1(k+1) = x_2(k), \\ x_2(k+1) = -x_1(k) + u(k) + x_1^3(k)\,, \quad k = 0,\, 1,\, \ldots,\, 4, \end{cases} \tag{3.1}$$

При $u(k) \equiv 0$ эта система устойчива по Ляпунову.

Пример 3.1. Для системы (3.1) будем рассматривать задачу 1.1 при граничных условиях

$$x(0) = x^{(\Lambda)} = [0,\, 0]^\top, \quad x(5) = x^{(\Omega)} = [1,\, 1]^\top. \tag{3.2}$$

Конечная точка $x(5) = x^{(\Omega)}$ не принадлежит области устойчивости системы (3.1) при $u(k) \equiv 0$, и в результате применения метода простых итераций получается расходящаяся последовательность управлений и движений.

Выберем стабилизирующее управление следующим образом:

$$w\big(x(k)\big) = 0{,}98x_1(k) - 0{,}3x_2(k) - 0{,}8x_1^3(k). \tag{3.3}$$

При этом матрица A системы (1.4) имеет собственные значения $\lambda_1 = -0{,}1$, $\lambda_2 = -0{,}2$. Таким образом, нулевое решение линейной системы (1.5) при $v(k) \equiv 0$ асимптотически устойчиво. При этом точка $x(5) = x^{(\Omega)} = [1,\ 1]^\top$ находится в области притяжения положения равновесия системы

$$\begin{cases} x_1(k+1) \;=\; x_2(k), \\ x_2(k+1) \;=\; -0{,}02x_1(k) - 0{,}3x_2(k) + 0{,}2x_1^3(k). \end{cases}$$

Вычислим решение задачи 1.1 при граничных условиях (3.2) для системы

$$\begin{cases} x_1(k+1) = x_2(k), \\ x_2(k+1) = -0{,}02x_1(k) - 0{,}3x_2(k) + v(k) + 0{,}2x_1^3(k),\ \ k=0,1,\ldots,4. \end{cases} \tag{3.4}$$

Применяя итерационную процедуру 1.2, (1.8), получаем следующий результат: на 10-й итерации последовательность $\{v^{(q)}(k)\}$, $q = 0,\ 1,\ 2,\ \ldots$, сходится к допустимому управлению $v^*(k)$ с точностью 10^{-30}. Результирующее управление $u(k) = w\big(x^*(k)\big) + v^*(k)$, приводящее исходную систему (3.1) в состояние $x(5) = [1,\ 1]^\top$, имеет вид

$$\begin{aligned} u(0) &= -0{,}015401385529348852083795026146, \\ u(1) &= 0{,}071179715908102563158556674117, \\ u(2) &= -0{,}297623539554203752363074559099, \\ u(3) &= 0{,}905062719482459737389141211581, \\ u(4) &= 1{,}326385006915833378922647072270. \end{aligned}$$

Возьмем для сравнения начальное состояние $x(0) \neq 0$; пусть, например, $x(0) = [5,\ 2]^\top$ при заданном выше конечном состоянии. При выбранном ранее стабилизирующем управлении $w\big(x(k)\big)$ (3.3) итерационная процедура расходится. При

$$w\big(x(k)\big) = 0{,}98x_1(k) - 0{,}3x_2(k) - 0{,}95x_1^3(k)$$

получаем следующий результат: на 50-й итерации допустимым управлением

$$
\begin{aligned}
u(0) &= -118{,}76643690873565894740,\\
u(1) &= -7{,}50943865506461435589,\\
u(2) &= -161{,}50407625182080612118,\\
u(3) &= 5{,}20148289466005091474,\\
u(4) &= -547{,}40268675168813683149
\end{aligned}
$$

система (3.1) переводится в точку $x(5) = [1,\ 1]^{\top}$ с точностью 10^{-20}.

Очевидно, что уменьшая коэффициент при $x_1^3(k)$ в системе (3.4) за счет соответствующего изменения управления $w\big(x(k)\big)$, мы можем перевести систему (3.1) и в более удаленные от начала координат конечные точки. Так, при $x(5) = [10,\ 10]^{\top}$ введение стабилизирующего управления

$$w\big(x(k)\big) = 0{,}98x_1(k) - 0{,}3x_2(k) - 0{,}9x_1^3(k)$$

позволяет добиться сходимости с точностью 10^{-22} на 20-й итерации и перевести систему из $x(0) = [0,\ 0]^{\top}$ в заданное состояние. Для $x(5) = [100,\ 100]^{\top}$ и достижения точности 10^{-18} на 80-й итерации требуется стабилизирующее управление

$$w\big(x(k)\big) = 0{,}98x_1(k) - 0{,}3x_2(k) - 0{,}992x_1^3(k).$$

Таким образом, уменьшая величину λ и подбирая нелинейные члены в стабилизирующем управлении $w\big(x(k)\big)$, можно расширять область притяжения системы (1.4) и ускорять сходимость итерационной процедуры 1.2, (1.8).

Пример 3.2. Приведем результаты вычислительных экспериментов, когда управляющее воздействие $w\big(x(k)\big)$ в системе (3.1) не содержит линейных членов, позволяющих добиться асимптотической устойчивости. Будем рассматривать управления $w\big(x(k)\big)$ вида

$$w\big(x(k)\big) = -\mu x_1^3(k).$$

При $\mu \to 1$ система (3.1) стремится к вполне управляемой линейной системе

$$x_1(k+1) = x_2(k), \quad x_2(k+1) = -x_1(k) + v(k).$$

Следовательно, исходная система (3.1) вполне управляема во всем фазовом пространстве.

Применение метода простых итераций 1.2, (1.8) приводит к следующим результатам. Пусть $x(5) = [1,\ 1]^{\top}$ и $\mu = 0{,}8$. Тогда для построения допустимого управления $u(k)$, приводящего систему (3.1) из начала координат в заданное состояние, и достижения точности 10^{-30} требуется 40 итераций.

Следовательно, сходимость метода при указанном $w\big(x(k)\big)$ хуже, чем (при прочих равных условиях) в примере 3.1.

При $x(5) = [10,\, 10]^\top$ и $\mu = 0{,}9$, в отличие от решения аналогичной задачи примера 3.1, процесс расходится. Уменьшая влияние нелинейной составляющей, т. е. полагая $\mu = 0{,}997$, мы добиваемся сходимости с точностью 10^{-20} на 40-й итерации. Наконец, для $x(5) = [100,\, 100]^\top$ необходимо использовать $\mu = 0{,}99995$, чтобы на 80-й итерации процесс сходился с точностью 10^{-11}.

Данный пример показывает, что хотя при $\lambda = 1$ итерационный процесс 1.2, (1.8), вообще говоря, расходится, можно добиться его сходимости путем введения только нелинейных членов в управление $w\big(x(k)\big)$, которые не меняют свойство устойчивости системы первого приближения, но расширяют область, не содержащую неустойчивых движений.

Литература

1. Красовский Н. Н. Об одной задаче оптимального регулирования нелинейных систем // Прикладная математика и механика. 1959. Т. 23, вып. 2. С. 209–229.

2. Красовский Н. Н. Теория управления движением. М.: Наука, 1968.

3. Красовский Н. Н., Шелементьев Г. С. О коррекции движения системы с двумя степенями свободы при одной циклической координате // Прикладная математика и механика. 1965. Т. 24, вып. 3. С. 401–407.

4. Филимонов Ю. М. К задаче об оптимальном управлении математическим маятником // Дифференц. уравнения. 1965. Т. 1, вып. 8. С. 1007–1015.

5. Субботин А. И. Об управлении движением квазилинейной системы // Там же. 1967. Т. 3, вып. 7. С. 1113–1118.

6. Альбрехт Э. Г. Об управлении движением нелинейных систем // Там же. 1966. Т. 2, вып. 3. С. 324–334.

7. Альбрехт Э. Г. Об оптимальном управлении движением квазилинейных систем // Там же. 1969. Т. 5, вып. 3. С. 430–442.

8. Альбрехт Э. Г. Об управлении движением нелинейных систем // Тр. II Болгар. нац. конгр. по теоретической и прикладной механике. София: Изд-во Болгар. акад. наук. 1975. Т. 1. С. 522–526.

9. Альбрехт Э. Г., Сазанова Л. А. О сходимости одной итерационной процедуры вычисления допустимого управления в нелинейных системах // Алгоритмический анализ неустойчивых задач: Тез. докл. Всерос. науч. конф., Екатеринбург, 26 февр. – 2 марта 2001 г. Екатеринбург: Изд-во Урал. ун-та, 2001. С. 127–128.

10. Альбрехт Э. Г., Сазанова Л. А. Об управлении одной нелинейной дискретной системой // Современные методы в теории краевых задач: Тез. докл Воронеж.

весенней матем. шк. «Понтрягинские чтения-XП». Воронеж: Изд-во Воронеж. гос. ун-та, 2001. С. 8–9.

11. Альбрехт А. Э., Альбрехт Э. Г., Сазанова Л. А. Об идентификации математических моделей нелинейных систем // Дифференциальные и интегральные уравнения. Математические модели: Тез. докл. международ. науч. конф., Челябинск, 4–8 февр. 2002 г. Челябинск: Изд-во Челяб. гос. ун-та. 2002. С. 8.

12. Красовский Н. Н. Проблемы стабилизации управляемых движений. Дополнение IV // Малкин И. Г. Теория устойчивости движения. М.: Наука, 1966. С. 475–514.

13. Малкин И. Г. Теория устойчивости движения. М.: Наука, 1966.

14. Халанай А., Векслер Д. Качественная теория импульсных систем. М.: Мир, 1971.

15. Sazanova L. A. Optimal control of linear discrete systems // Proc. Steklov Inst. Math. Suppl. 2. 2000. P. S141–S157.

16. Воеводин В. В. Линейная алгебра. М.: Наука, 1980.

Статья поступила 21.10.2002 г.