Н. П. Горин.

Некоторые свойства фокальных кривых софокусных поверхностей второго порядка.

Если мы имеем систему софокусных поверхностей второго порядка с центром или без центра, то уравнения этих поверхностей обычно даются в форме:

$$\frac{x^2}{\alpha-\tau}+\frac{y^2}{\beta-\tau}+\frac{z^2}{\gamma-\tau}=1 \qquad \alpha>\beta>\gamma \quad \ldots . \; (1)$$

$$\frac{y^2}{\beta-\tau}+\frac{z^2}{\gamma-\tau}+2x+\tau=0 \qquad \beta>\gamma \quad \ldots . \; (2)$$

Уравнение (1) дает систему софокусных поверхностей с центром, уравнение (2)—систему софокусных поверхностей без центра.

Фокальные линии этих систем могут быть рассматриваемы с различных точек зрения: то как контуры предельных поверхностей при $\tau=\alpha$, $\tau=\beta$ и $\tau=\gamma$, то как геометрические места вершин конусов вращения, описанных около системы софокусных поверхностей, то как геометрическое место точек пересечения прямых касающихся поверхности и проходящих через мнимый круг на безконечности, то как стрикционные линии линейчатой поверхности, которая огибаетъ системы софокусных поверхностей

Далее, фокусы поверхностей (1) и (2) можно определять как сферы безконечно малого радиуса, касающиеся поверхности и как омбилические точки поверхностей, софокусных данной.

Фокальные линии могут быть рассматриваемы также, как сопряженные между собой конические сечения и как „Ordnungskurven". Здесь мы намерены дать некоторые следствия из последнего определения фокальных линий.

I

Предварительно решаем следующий общий элементарный вопросъ. Пусть имеется точка $(x_1\ y_1)$ и прямая $y=ax+b$ и требуется в плоскости XOY найти среди коник кривую, по отношению к которой данная точка и прямая суть полюс и поляра.

Имея ввиду пока коники с центром, полагаем, что искомая кривая, отнесенная к центру, имеет вид:

$$\frac{x^2}{A}+\frac{y^2}{B}=1 \quad \ldots\ldots\ldots \quad (3)$$

Поляра точки $(x_1' y_1)$ относительно (3) имеет уравнение:

$$\frac{xx_1}{A}+\frac{yy_1}{B}=1 \quad \ldots\ldots\ldots \quad (4)$$

Сравнивая уравнение (4) с уравнением данной прямой для (3) найдем выражение:

$$\frac{y^2}{by_1}-\frac{ax^2}{bx_1}=1 \quad \ldots\ldots\ldots \quad (5)$$

Итак: 1) *Всякая точка и прямая на плоскости могут быть разсматриваемы как полюс и поляра некоторого конического сечения с центром.* Обратимся теперь к системе софокусных поверхностей с центром, заданной уравнением (1).

Уравнения касательной плоскости и нормали в точке $(x_0 y_0 z_0)$ к поверхности (1) суть:

$$\frac{xx_0}{\alpha-\tau}+\frac{yy_0'}{\beta-\tau}+\frac{zz_0}{\gamma-\tau}=1 \quad \ldots\ldots\ldots \quad (6)$$

$$\frac{(x-x_0)\ (\alpha-\tau)}{x_0}=\frac{(y-y_0)\ (\beta-\tau)}{y_0}=\frac{(z-z_0)\ (\gamma-\tau)}{z_0} \quad \ldots \quad (7)$$

Пересекая систему (6) и (7) плоскостью $Z=0$, имеем соответственно прямую

$$\frac{xx_0}{\alpha-\tau}+\frac{yy_0}{\beta-\tau}=1 \quad \ldots\ldots\ldots \quad (8)$$

и точку с координаторами

$$x_1=\frac{x_0\,(\alpha-\gamma)}{\alpha-\tau} \qquad y_1=\frac{y_0\,(\beta-\gamma)}{(\beta-\tau)} \quad \ldots\ldots \quad 9)$$

Отыскивая кривую второго порядка, по отношению к которой точка (9) и прямая (8)—полюс и поляра, пользуясь для этого уравнением (5) получим:

$$\frac{x^2}{\alpha-\gamma}+\frac{y^2}{\beta-\gamma}=1 \quad \ldots\ldots\ldots \quad (10)$$

Кривая (10) есть фокальный эллипс системы (1). Пересекая поверхность (1) и систему (6) и (7) плоскостью $У=0$ получаем прямую:

$$\frac{xx_0}{\alpha-\tau}+\frac{zz_0}{\gamma-\tau}=1 \quad \ldots\ldots\ldots \quad (11)$$

и точку с координатами:

$$x_1 = \frac{x_0(\alpha-\beta)}{(\alpha-\tau)} \qquad z_1 = \frac{z_0(\gamma-\beta)}{(\gamma-\tau)} \quad \ldots \quad (12)$$

На основании (5) получим уравнение соответствующей кривой второго порядка в плоскости XOZ:

$$\frac{x^2}{\alpha-\beta} - \frac{z^2}{\beta-\gamma} = 1 \quad \ldots \quad (13)$$

Кривая (13)—фокальная гипербола системы (1). В плоскости YOZ при $X=0$ аналогично имеем: прямую

$$\frac{yy_0}{\beta-\tau} + \frac{zz^0}{\gamma-\tau} = 1 \quad \ldots \quad (14)$$

и точку с координатами

$$y_1 = \frac{y_0(\beta-\alpha)}{\beta-\tau} \qquad Z_1 = \frac{z_0(\gamma-\alpha)}{\gamma-\tau} \quad \ldots \quad (15)$$

Кривая по отношению к которой прямая (14) и точка (15) поляра и полюс, на основании (5) напишется так:

$$\frac{y^2}{\beta-\alpha} + \frac{z^2}{\gamma-\alpha} = 1 \quad \ldots \quad (16)$$

Кривая (16)—мнимая фокальная кривая системы (1) софокусных поверхностей второго порядка с центром, т. к. $\alpha > \beta > \gamma$. Из изложенного следует: 2) *точка пересечения нормали и прямая пересечения касательной плоскости в какой-нибудь точке поверхности второго порядка с центром с одной из ея главных диаметральных плоскостей суть соответственно полюс и поляра относительно фокальной кривой.* *)

Попутно из (14), (15) (16) можно видеть, что 3) *точки и прямые плоскости могут быть приведены в одно-однозначное соответствие и при помощи мнимой кривой.*

Выведем некоторые заключения из этой основной теоремы, устанавливающей соответствие между точками пересечения нормалей и прямыми пересечения касательных плоскостей поверхности второго порядка с плоскостями ея главных диаметральных сечений Через любую точку одной из главных диаметральных плоскостей можно провести нормали к некоторому семейству поверхностей (1). Так как поверхности (1) имеют общие фокальные кривые, то ясно, что касательные плоскости в точках пересечения нормали с соответствующей поверхностью, все пройдут через поляру данной точки относительно фокальной кривой Следовательно:

4) *если нормали софокусных поверхностей второго порядка с центром проходят через одну и ту же точку одной из глав-*

*) Теорема выводится Reye'ем в его „Geometrie der Lag (стр. 150) и Plückro'ем в Sistem der Geometrie" des Raumes (стр. 332) и совершенно иных соображений.

ных диаметральных плоскостей, то касательные плоскости в соответствующих точках проходят через одну и ту же прямую в данной диаметральной плоскости—через поляру точки пересечения нормалей относительно фокальной кривой,

5 *если плоскости, касательные к системе софокусных поверхностей второго порядка с центром, проходят через одну и ту же прямую в одной из главных диаметральных плоскостей, то нормали к поверхностям в точках касания все проходят через одну и ту же точку этой диаметральной плоскости—через полюс данной прямой относительно фокальной кривой.*

Принимая во внимание теоремы о полюсах и полярах, легко получим. что:

6) *если основания нормалей к поверхности второго порядка с центром или к их софокусной системе лежат на прямой линии в одной из главных диаметральных плоскостей, то соответствующие касательные плоскости пересекаются в одной точке—полюсе прямой относительно фокальной кривой:**)

Нет ничего проще формулировать теорему обратную данной. Дадим ее для наиболее интересного случая, когда касательные плоскости к поверхности второго порядка непрерывно переходят одна в другую, огибая некоторый конус. Тогда ясно, что:

7) *основания нормалей к поверхности второго порядка с центром или их софокусной системы, проведенных в точках касания к поверхностям конусов с общей вершиной в одной из главных диаметральных плоскостей—лежат на прямой в той-же диаметральной плоскости—на поляре вершины конуса относительно фокальной кривой.*

Попутно интересно отметить, где нормали к поверхности (1) пересекают главные диаметральные плоскости. Эти соображения следуют из разсмотрения взаимного положения софокусных поверхностей. При $-\infty < \tau < \gamma$ имеем эллипсоиды, при $\gamma < \tau < \beta$—однополые гиперболоиды и при $\beta < \tau < \alpha$—двуполые гиперболоиды. Случаи, когда $\tau = \alpha$, $\tau = \beta$, $\tau = \gamma$ дают фокальные линии. В пересечении с плоскостью xoy, xoz, yoz система (1) дает семейства кривых второго порядка с центром (см. рисунок). Расположение сечений поверхностей (1) их главными диаметральными плоскостями дает понятие о взаимном расположении самих софокусных поверхностей второго порядка:

Нетрудно убедиться, что плоскости, касательные к эллипсоидам, не пересекают фокального эллипса, но пересекают фокальную гиперболу; плоскости, касательные к однополым гипперболоидам ($\gamma < \tau < \beta$), пересекают и фокальный эллипс и фокальную гиперболу; плоскости, касательные к двуполым гиперболоидам, пересекают фокальный эллипс, но не пересекают фокальной гип-

---

*) Это и следующее следствия из основной теоремы ни у Plücker'а ни у Beyэ не развиты.

перболы. Нормали к поверхностям в точках касания касательных плоскостей пересекают главные диаметральные плоскости в точках, которые служат полюсами прямых пересечения касательных плоскостей с теми же диаметральными плоскостями относительно фокальных линий. Мы установили положение этих прямых относительно фокальных эллипса и гиперболы, а отсюда ясно положение полюсов прямых. Таким образом имеем:

8) *нормали всех софокусных эллипсоидов пересекают их главные диаметральные плоскости с действительными фокальными линиями одну—внутри фокального эллипса, другую—вне фокальной гиперболы; нормали однополых софокусных гиперболоидов пересекают те же плоскости вне фокальных кривых; нормали софокусных двуполых гиперболоидов пересекнют первую главную диаметральную плоскость вне фокального эллипса, вторую—внутри фокальной гиперболы.*

Последнее свойство фокальных линий дает нам еще новый взгляд на них как на линии, разграничивающие точки пересечения нормалей к софокусным поверхностям второго порядка с центром с их главными диаметральными плоскостями.

II

Аналогичным образом изследуем свойства софокусных поверхностей без центра. Среди конических сечений имеется не только одно, заданное уравнением (5)—коническое сечение с центром,—по отношению к которому точка (x_1, y_1) и прямая $y = ax + b$ суть полюс и поляра. Одновременно для той же точки и той же прямой можно найти и коническое сечение без центра — параболу такую, что $(x_1\ y_1)$ и $y = ax + b$ будут и по отношению к ней также полюсом и полярой. Действительно, пусть искомая кривая имеет вид:

$$y^2 = 2px + m \quad \dots \dots \dots \dots \quad (17)$$

Поляра точка $(x_1\ y_1)$ тогда будет:

$$yy_1 = p\ (x + x_1) + m$$

Сравнивая это уравнение с уравнением данной прямой имеем:

$$p = ay_1 \quad m = y_1\ (b - ax_1) \quad \dots \dots \quad (18)$$

Откуда уравнение искомой прямой получим:

$$y^2 = 2ay_1x + y_1\ (b - ax_1) \quad \dots \dots \dots \dots \quad (19)$$

Итак:

9) *всякая точка и прямая могут быть рассматриваемы как полюс и поляра относительно конического сечения с центром и одновременно относительно конического сечения без центра.*

Обратимся к системе софокусных поверхностей без центра, заданной уравнением (2).

Уравнение касательной плоскости и нормали в точке $(x_0 y_0 z_0)$ к поверхности (2) будут:

$$\frac{yy_0}{\beta-\tau}+\frac{zz_0}{\gamma-\tau}+(x+x_0)+\tau=0 \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \qquad (20)$$

$$(x-x_0)=\frac{y-y_0}{y_0}(\beta-\tau)=\frac{z-z_0}{z_0}(\gamma-\tau) \quad . \quad . \quad . \quad . \qquad (21)$$

Пересекая поверхность (2) с касательной плоскостью (20) и нормалью (21) в точке $(x_0\, y_0\, z_0)$ плоскостью $Z=0$, получим прямую

$$\frac{yy_0}{\beta-\tau}=(x+x_0)-\tau \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \qquad (22)$$

и точку;

$$x_1=x_0-(\gamma-\tau) \qquad y_1=\frac{y_0\,(\beta-\gamma)}{(\beta-\tau)} \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \qquad (23)$$

Отыскивая в плоскости ХОУ параболу, по отношению к которой прямая (22] и точка (23) суть поляра и полюс, на основании уравнения (.9) легко получим ея уравнение:

$$\frac{y^2}{\beta-\gamma}+2x+\gamma=0 \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \qquad (24)$$

Кривая (24) есть фокальная парабола софокусной системы параболоидов (2) в плоскости ХОУ.

Пересекая поверхность (2) с касательной плоскостью (20) и нормалью (21) плоскостью $У=0$ получим прямую:

$$\frac{zz_0}{\gamma-\tau}=-(x+x_0)-\tau \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \qquad (25)$$

и точку с координатами:

$$x_1=x_0-(\beta-\tau) \qquad z_1=\frac{z_0\,(\gamma-\beta)}{(\gamma-\tau)} \quad . \quad . \quad . \qquad (26)$$

Аналогично на основании (19) получим уравнение соответствующей параболы в форме:

$$\frac{z^2}{\gamma\ \ \beta}+2x+\beta=0 \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \qquad (27)$$

Кривая (27) - фокальная параболла системы софокусных параболоидов в плоскости XOZ.

Теорема (2) для софокусных поверхностей без центра может быть формулирована так:

10) *точка пересечения нормали и прямая пересечения касательной плоскости в какой нибудь точке поверхности второго порядка без центра с одной из плоскостей ея фокальных кривых суть соответственно полюс и поляра относительно фокальной кривой.*

Отсюда следует, что выводы 4, 5, 6 и 7. данные для софокусных поверхчостей с центром, сохраняют свою силу и для поверхностей второго порядка без центра с тою лишь разницей, что роль главных диаметральных плоскостей здесь играют плоскости фокальных кривых параболоидов.

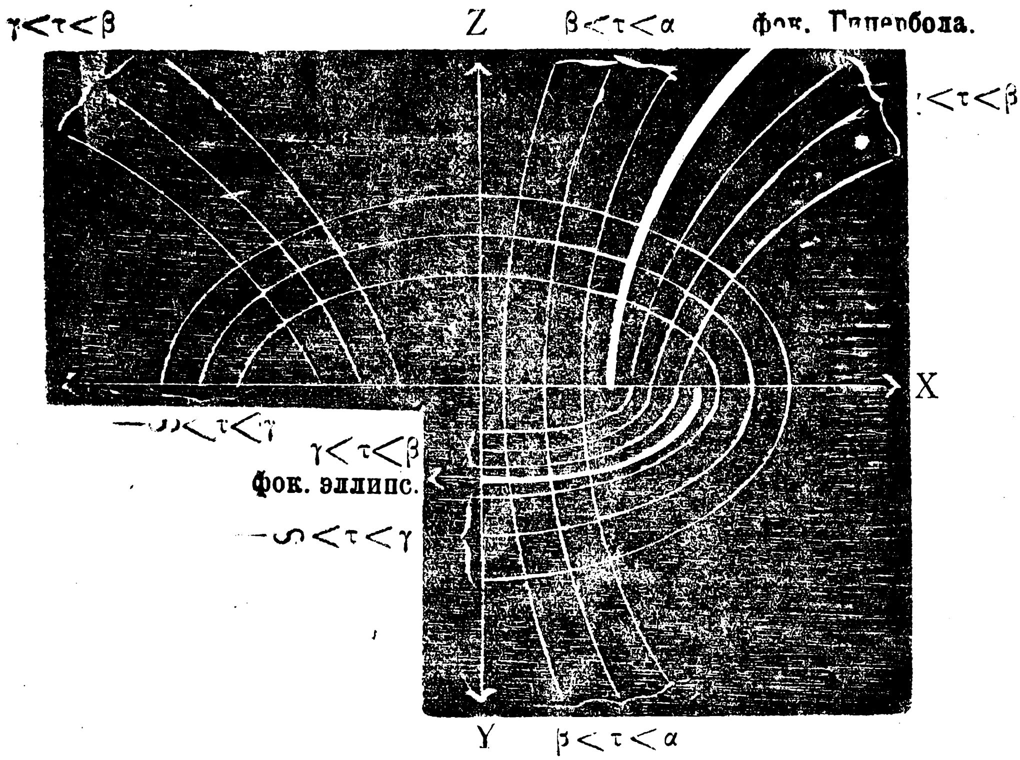
При $-\infty < \tau < \gamma$ уравнение (2) дает все софокусные эллиптические параболоиды, направленные влево, при $\gamma < \tau < \beta$ гиперболические параболоиды, при $\beta < \tau < +\infty$ все эллиптические параболоиды, направленные вправо. Взаимное расположение этих поверхностей может быть представлено при помощи их сечений плоскостями фокальных кривых (см. рисунок).

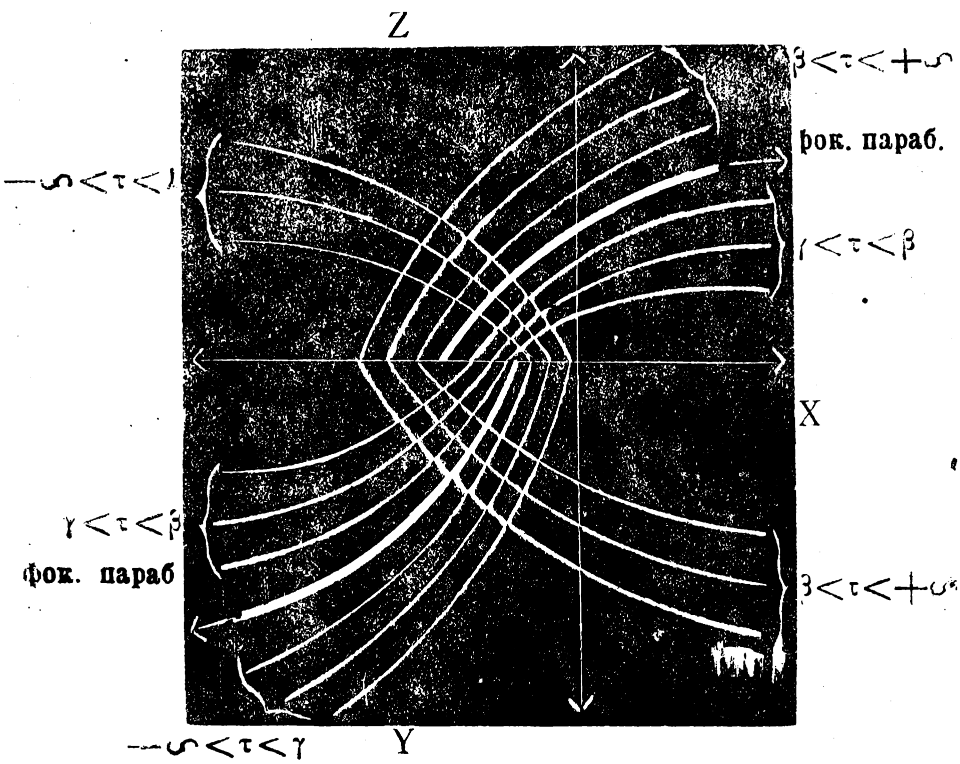
Касательные плоскости к параболоидам $-\infty < \tau < \gamma$ не пересекают фокальной параболы плоскости ХОУ, но пересекают вторую фокальную параболу в плоскости XOZ.

Следовательно, нормали в точках касания пересекают ХОУ внутри фокальной параболы, плоскость XOZ вне фокальной параболы. Из аналогичных соображений легко получить, что нормали к гиперболическим параболоидам пересекают обе плоскости вне фокальных кривых и что нормали к эллиптическим параболоидам $\beta < \tau < +\infty$ пересекают плоскость ХОУ вне, а XOZ—внутри фокальной параболы. Таким образом получаем вывод, вполне аналогичный теореме 8 для поверхностей с центром.

Полная аналогия в данном случае между эллипсоидами и эллиптическими параболоидами $-\infty < \tau < \gamma$, между однополыми гиперболоидами и гиперболическими параболоидами, между двуполыми гиперболоидами и эллиптическими параболоидами $\beta < \tau < +\infty$ выступает столь же ясно при изучении фокальных свойств Jacobi, линий кривизны поверхностей, и является следствием того, к какому классу принадлежат фокус верхности и имеет-ли последняя фокусы обоих классов или только одного.

Н. Горин.


γ<τ<β
Z
β<τ<α
фок. Гипербола.
γ<τ<β
X
−∞<τ<γ
γ<τ<β
фок. эллипс.
−∞<τ<γ
Y
β<τ<α


Z
β<τ<+∞
фок. параб.
−∞<τ<γ
γ<τ<β
X
γ<τ<β
фок. параб
β<τ<+∞
−∞<τ<γ
Y