Н. П. Горин.

„О некоторых свойствах кривых, полярных системе со-фокусных коник".

I.

Уравнение конического сечения в общей форме имеет вид:

$$g_1(x,y)x+g_2(x,y)y+g_3(x,y)=0 \quad . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \; (1)$$

где $g_1(x,y)=a_{11}x+a_{12}y+a_{13}$

$$g_2(x,y)=a_{21}x+a_{22}y+a_{23}$$

$$g_3(x,y)=a_{31}x+a_{32}y+a_{33}$$

причем $a_{12}=a_{21}$; $a_{13}=a_{31}$; $a_{23}=a_{32}$.

Уравнение касательной к кривой (1) в точке (x_0y_0) как известно, имеет вид:

$$g_1(x_0,y_0)x+g_2(x_0,y_0)y+g_3(x_0,y_0)=0 \quad . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \; (2).$$

Если-же точка (x_0y_0) лежит вне кривой (1), то уравнение (2) есть уравнение поляры точки (x_0y_0).

Условимся относительно некоторых понятий. Если дана какая нибудь кривая второго порядка S и коническое сечение S_1, то взяв полюсы всех касательных к S относительно кривой S_1, мы, как известно, получим новое коническое сечение S_2, которое называется полярным для S относительно S_1. Коническое сечение S_1 называется в таком случае вспомогательным коническим сечением. Мы можем взять даже более общий случай, предположив, что ищем полярные кривые для некоторой системы данных конических сечений относительно одного вспомогательного. Очевидно полярные кривые будут представлять также некоторую систему конических сечений. Пусть вспомогательная кривая 2-го порядка дается уравнением (1), в то время как данные кривые второго порядка представляют систему софокусных конических сечений, отнесенных к обшему центру и осям. Уравнение системы софокусных коник с центром имеет вид:

$$\frac{x^2}{\alpha-\tau}+\frac{y^2}{\beta-\tau}=1 \quad (\alpha>\beta) \quad \dots \dots \dots (3).$$

Все кривые, заданные уравнением (3), обладают одной и той-же парой фокусов, общим центром и некоторыми общими фокальными свойствами.

Какими общими свойствами обладает полярная система?

Для того чтобы ответить на этот вопрос, найдем прежде уравнение кривой полярной коническому сечению (3) относительного вспомогательного конического сечения (1).

Пусть некоторая прямая двигается, оставаясь все время касательной к коническому сечению (3). Найдем геометрическое место ея полюсов относительно вспомогательной кривой (1). Уравнение касательной в точке $(x_1 y_1)$ к кривой (3) имеет вид:

$$\frac{xx_1}{\alpha-\tau}+\frac{yy_1}{\beta-\tau}=1 \quad \dots \dots \dots (4).$$

Положим, что полюс этой прямой относительно вспомогательной кривой имеет координаты $(x_0 y_0)$. Тогда поляра его относительно вспомогательного конического сечения (1) выражается уравнением (2). Так как уравнения (4) и (2) выражают одну и ту же прямую, то имеем:

$$\left.\begin{aligned} \frac{g_1(x_0,y_0)}{g_2(x_0,y_0)}&=\frac{x_1(\beta-\tau)}{y_1(\alpha-\tau)} \\ \frac{g_3(x_0,y_0)}{g_2(x_0,y_0)}&=-\frac{(\beta-\tau)}{y_1} \end{aligned}\right\} \quad \dots \dots \dots (5).$$

Так как x_1 и y_1 удовлетворяют уравнению (3), то, подставляя туда их значения из уравнений (5), получим уравнение полярной кривой:

$$(\alpha-\tau)g_1^2(x,y)+(\beta-\tau)g_2^2(x,y)-g_3^2(x,y)=0 \quad \dots \dots (6).$$

Сравнивая уравнения (3) и (6), замечаем, что при $-\infty<\tau<\alpha$ в том и другом случае, имеем действительные конические сечения; при $\tau>\alpha$ мнимые; при $\tau=\beta$ из уравнения (3) получаем уравнение оси X и при $\tau=\alpha$ уравнение оси У.

Из уравнений (6) при $\tau=\beta$ и $\tau=\alpha$ получим:

$$\left.\begin{array}{l}\sqrt{\alpha-\beta}\,.\,g_1(x,y)=g_3(x,y)\\ \sqrt{\beta-\alpha}\,.\,g_2(x,y)=g_3(x,y)\end{array}\right\}\quad\ldots\ldots\quad(7).$$

Отсюда следует:

1) *Каждому действительному коническому сечению в системе софокусных центральных коник при полярном преобразовании относительно вспомогательной кривой второго порядка, соответствует действительное коническое сечение, мнимому—соответствует мнимое.* Из уравнений (7) следует, что предельным случаям в софокусной системе соответствуют предельные случаи в системе полярной, при чем вторая из прямых (7) мнимая.

Этот вывод не противоречит теореме (1), так как при $\tau=\alpha$ мы имеем $x=0$ и $y=\sqrt{\beta-\alpha}$ т. е. мнимую полуось предельной гиперболы, в то время как действительная ея полуось равна нулю. Для целей дальнейшего исследования развернем уравнение (6):

$$(\alpha-\tau)(a_{11}^2x^2+a_{12}^2y^2+a_{13}^2+2a_{11}a_{12}xy+2a_{11}a_{13}x+2a_{12}a_{13}y)+$$
$$+(\beta-\tau)(a_{21}^2x_2+a_{22}^2y^2+a_{23}^2+2a_{21}a_{22}xy+2a_{21}a_{23}x+2a_{22}a_{23}y)+$$
$$-(a_{31}^2x^2+a_{32}^2y^2+a_{33}^2+2a_{31}a_{32}xy+2a_{31}a_{33}x+2a_{32}a_{33}y)=0$$

Располагая но степеням x и y, получим:

$$x^2[a_{11}^2(\alpha-\tau)+a_{12}^2(\beta-\tau)-a_{13}^2]+y^2[a_{12}^2(\alpha-\tau)+a_{22}^2(\beta-\tau)-a_{32}^2]+$$
$$+2xy[a_{11}a_{12}(\alpha-\tau)+a_{12}a_{22}(\beta-\tau)-a_{13}a_{23}]+2x[a_{11}a_{13}(\alpha-\tau)+$$
$$+a_{21}a_{23}(\beta-\tau)-a_{13}a_{33}]+2y[a_{12}a_{13}(\alpha-\tau)+a_{22}a_{23}(\beta-\tau)-a_{32}a_{33}]+$$
$$+[a_{13}^2(\alpha-\tau)+a_{23}^2(\beta-\tau)+a_{33}^2]=0.$$

Введя обозначения:

$$\left.\begin{array}{l}b_{11}=a_{11}^2(\alpha-\tau)+a_{12}^2(\beta-\tau)-a_{13}^2\\ b_{12}=a_{11}a_{12}(\alpha-\tau)+a_{12}a_{22}(\beta-\tau)-a_{13}a_{23}\\ b_{22}=a_{12}^2(\alpha-\tau)+a_{22}^2(\beta-\tau)-a_{32}^2\\ b_{13}=a_{11}a_{13}(\alpha-\tau)+a_{21}a_{23}(\beta-\tau)-a_{13}a_{33}\\ b_{23}=a_{12}a_{13}(\alpha-\tau)+a_{22}a_{23}(\beta-\tau)-a_{32}a_{33}\\ b_{33}=a_{13}^2(\alpha-\tau)+a_{23}^2(\beta-\tau)-a_{33}^2\end{array}\right\}\quad\ldots\ldots\quad(8)$$

получим уравнение кривой полярной в следующей форме:

$$b_{11}x^2+2b_{12}xy+b_{22}y^2+2b_{13}x+2b_{23}y+b_{33}=0 \quad . \; . \; . \; . \; (9).$$

Для того чтобы судить, какая полярная кривая соответствует данному значению τ, найдем координаты центров кривых (9).

Координаты центров определяются по формулам:

$$x=\frac{b_{12}b_{23}-b_{13}b_{22}}{b_{11}b_{22}-b_{12}^2} \qquad y=\frac{b_{12}b_{13}-b_{11}b_{23}}{b_{11}b_{22}-b_{12}^2} \quad . \; . \; . \; . \; . \; . \; (10).$$

Произведя соответствующие вычисления, мы получим:

$$\left.\begin{aligned} x&=\frac{(\alpha-\tau)(\beta-\tau)A.A_1+(\alpha-\tau)B.B_1+(\beta-\tau)A.C}{(\alpha-\tau)(\beta-\tau)A_1^2-(\alpha-\tau)B_1^2-(\beta-\tau)A^2} \\ y&=\frac{-(\alpha-\tau)(\beta-\tau)A_1.B_1+(\alpha-\tau)B_1.C_1-(\beta-\tau)A.B}{(\alpha-\tau)(\beta-\tau)A_1^2-(\alpha-\tau)B_1^2-(\beta-\tau)A^2} \end{aligned}\right\} \; . \; . \; (11)$$

где:

$$\left.\begin{aligned} A&=a_{12}a_{23}-a_{13}a_{22} \qquad & A_1&=a_{11}a_{22}-a_{12}^2 \\ B&=a_{13}a_{23}-a_{12}a_{33} \qquad & B_1&=a_{11}a_{23}-a_{12}a_{13} \\ C&=a_{23}^2-a_{22}a_{33} \qquad & C_1&=a_{11}a_{33}-a_{13}^2 \end{aligned}\right\} \; . \; . \; . \; . \; . \; . \; (12).$$

причем a_{11}, a_{12},... и т. д. суть коэффициенты в уравнении (1) вспомогательной кривой. Исключив из уравнений (11) параметр τ мы получили-бы геометрическое место центров полярных кривых. В общем случае эта кривая, как результат исключения τ из уравнений (11), есть кривая второго порядка. В дальнейшем мы увидим когда эта кривая вырождается в прямую линию и точку. Итак, геометрическое место центров полярных кривых выражается совокупностью уравнений (11), которые представляют некоторую кривую, а следовательно:

2) *Кривые, полярные системе софокусных эллипсов и гипербол, не обладают общим центром, а следовательно и не софокусны.*

Отсюда мы замечаем, что при полярном преобразовании система (3), расположенная сначала вокруг общего центра, разбрасывается вдоль кривой (11).

Рассматривая выражение:

$$f(\tau)=b_{11}b_{22}-b_{12}^2,$$

установим, при каких значениях τ полярные кривые суть эллипсы, гиперболы и параболы. Согласно уравнений (11) выражение $f(\tau)$ запишется в следующей форме:

$$f(\tau)=(\alpha-\tau)(\beta-\tau)A_1^2-(\alpha-\tau)B_1^2-(\beta-\tau)A^2 \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (13).$$

Из уравнения (13) легко получим таблицу:

при	$\tau=-\infty$	$f(\tau)=+\infty>0$
»	$\tau=\beta$	$f(\tau)=-(\alpha-\beta)B_1^2<0$
»	$\tau=\alpha$	$f(\tau)=-(\beta-\alpha)A^2>0$
»	$\tau>\alpha$	$f(\tau)>0$

Отсюда делаем вывод, что $f(\tau)$ имеет два действительных корня τ' и τ'' причем $-\infty<\tau'<\beta$ и $\beta<\tau''<\alpha$.

Решив уравнение (13) относительно τ, мы определим τ' и τ'' и, исследуя подкоренное выражение, легко могли бы убедиться и этим способом что $f(\tau)$ имеет два действительных и различных корня. Таким образом получим следующую таблицу значений $f(\tau)$:

$-\infty<\tau<\tau'$	$f(\tau)>0$
$\tau=\tau'$	$f(\tau)=0$
$\tau'<\tau<\tau''$	$f(\tau)<0$
$\tau=\tau''$	$f(\tau)=0$
$\tau>\tau''$	$f(\tau)>0$

Следовательно при изменении τ в пределах $-\infty<\tau<\tau'$ полярные кривые будут эллипсами; при изменении τ в пределах $\tau'<\tau<\tau''$ полярные кривые будут гиперболами и при изменении τ в пределах $\tau''<\tau$ полярные кривые будут снова эллипсами, при $\tau=\tau'$ и $\tau=\tau''$—полярные кривые параболы.

Эти выводы однако справедливы лишь при условии $A_1 \neq 0$, ибо только при этом условии $f(\tau)$ имеет два различных корня τ' и τ''. Условие $A_1=0$ равносильно предположению, что наша вспомогательная кривая—парабола, т. к. $A_1=a_{11}a_{22}-a_{12}^2$. Этот случай мы изследуем позднее.

Какие полярные кривые получаются при $\tau=\beta$, $\tau=\alpha$ и $\tau>\alpha$ мы видели уже раньше. Имеем следующий вывод:

3) *Система кривых, полярных системе софокусных эллипсов и гипербол относительно вспомогательной центральной коники, состоит из эллипсов, гипербол, двух парабол и пары прямых* (см. ур-ние 7).

Эллипсы через параболу переходят в гиперболы и наоборот.

Рассмотрим случай, когда вспомогательная кривая—парабола, т. е. когда $A_1=0$.

Из уравнений (11) тогда получаем:

$$\left.\begin{aligned} x&=\frac{(\alpha-\tau)B.B_1+(\beta-\tau)A.C.}{-(\alpha-\tau)B_1^2-(\beta-\tau)A^2} \\ y&=\frac{(\alpha-\tau)B_1.C_1-(\beta-\tau)A.B}{-(\alpha-\tau)B^2+1-(\beta-\tau)A^2} \end{aligned}\right\} \quad \ldots\ldots\ldots (14)$$

В этом случае:

$$f(\tau)=-(\alpha-\tau)B_1^2-(\beta-\tau)A^2$$

Откуда находим, что:

$$\tau_1=\frac{\alpha B_1^2+\beta A^2}{A^2+B_1^2}$$

Для τ_1 мы имеем единственное значение, а следовательно в этом случае в системе полярных кривых имеется одна парабола. Что касается геометрического места центров, то его мы получим исключая τ из уравнений (14).

В результате имеем:

$$\frac{B_1x+B}{B_1y+C_1}=\frac{Ax+C}{Ay-B} \quad \ldots\ldots\ldots (15)$$

Не трудно видеть, что в окончательной форме уравнения (15) исключается член с xy и следовательно:

4) *Геометрическое место центров кривых, полярных системе софокусных центральных конических сечений относительно параболы, есть прямая линия.*

Обращая внимание на уравнение (15), мы видим, что в него не входит ни α, ни β т.е.:

5) *Если системы центральных софокусных конических сечений обладают общими осями при различных фокусах, то*

геометрическим местом центров их полярных кривых относительно данной параболы служит одна и та же прямая.

Изследуя $f(\tau)$, замечаем, что при $-\infty < \tau < \tau_1$ $f(\tau) < 0$, при $\tau = \tau_1$ $f(\tau) = 0$, при $\tau > \tau_1$ $f(\tau) > 0$ и при $\tau = \beta$ из уравнений (7) получаем пару прямых.

Следовательно:

6) *Система кривых, полярных софокусным центральным коническим сечениям относительно вспомогательной параболы, состоит из гипербол, одной параболы, эллипсов и пары прямых.*

Известно, что через каждую точку плоскости проходит два разноименных центральных софокусных конических сечения. Относительно кривых им полярных имеем несколько иной результат. Уравнение (6) относительно τ первой степени и следовательно через данную точку плоскости проходит только одна кривая полярной системы, т. е.

7) *Кривые, полярные системе софокусных центральных конических сечений, между собою не пересекаются.*

Найдем далее некоторые общие свойства полярных кривых. Если мы имеем систему центральных софокусных кривых второго порядка, то известно, что геометрическим местом точек пересечения пар касательных в концах некоторой фокальной хорды будет прямая, точно также проходящая через фокус. Прямые, из которых каждая проходит через полюс второй, называются сопряженными. В данном случае мы имеем пару сопряженных прямых, проходящих через фокус. Выполняя полярное преобразование при помощи вспомогательной кривой, мы получим следующее. Фокусу F софокусной системы будет соответствовать некоторая прямая l, каждой паре касательных—пара точек на каждой полярной кривой; каждой паре точек касания в системе софокусных кривых—пара касательных к соответствующей полярной кривой.

Так как точки касания наших касательных все лежат на прямой, проходящей через фокус, то все „*соответственные*" касательные полярной системы пересекаются в одной точке, лежащей на прямой l. В то же время пары касательных в концах фокальной хорды пересекаются в точках сопряженной прямой, проходящей через фокус, следовательно: пары точек касания „*соответственных*" касательных в полярной системе лежат на прямых, пересекающихся в одной точке и эта точка лежит также на прямой l.

Таким образом имеем:

8) *В системе кривых полярных центральным софокусным коникам геометрическое место точек пересечения „соответственных“ касательных есть прямая линия—поляра фокуса* F *относительно вспомогательной кривой,—и*

9) *геометрическое место точек пересечения прямых, соединяющих пары точек касания „соответственных“ касательных, есть та же прямая—поляра фокуса* F *относительно вспомогательной кривой.*

Так как в системе софокусных центральных кривых два фокуса, то в полярной системе две прямых, обладающих указанными свойствами. Фокус софокусной системы служит центром двух пучков прямых, находящихся в гиперболической инволюции. Следовательно:

10) *В полярной системе на прямой l расположены два точечных ряда, находящихся в гиперболической инволюции.*

Все софокусные конические сечения с центром могут быть разсматриваемы как вписанные в один и тот же четыреугольник, сторонами которого служат четыре мнимых касательных, пересекающихся попарно в фокусах системы. Две вершины этого четырехугольника действительны—фокусы, две вершины мнимы—круговые точки. При полярном преобразовании эти четыре мнимых касательных, общих всем софокусным кривым, перейдут в точки, общия всем полярным кривым, т. е.

11) *Все кривые, полярные системе центральных софокусных конических сечений могут быть рассматриваемы как описанные около одного и того же четырехугольника, две стороны которого действительны (прямые l) и две мнимы —*

Четыре мнимых вершины этого четырехугольника и служат попарно двойными элементами точечных рядов на прямых l.

Соответственные элементы этих точечных рядов назовем *„сопряженными“* точками но аналогии с сопряженными фокальными прямыми софокусной системы. На прилагаемых чертежах изображено взаимное расположение софокусных кривых и сопряженных прямых, полярных кривых и сопряженных точек. (Чертежи I и II).

Точкам A и A′, B и B′, C и C′, в софокусной системе отвечают лучи a и a′, b и b′, c и c′—в полярной системе; прямой CC′ на первом чертеже соответствует точка M на втором чертеже;

точкам P, P′, P″ соответствуют прямые pp′, p_1p_1', p_2p_2'; прямой линии FP″ в первом чертеже соответствует точка N во втором чертеже. Точке F, где пересекается пара сопряженных лучей CC′ и FP″, соответствует прямая l, на которой лежат две *„сопряженных“* точки M и N.

II.

Обратимся теперь к тому случаю, когда система софокусных кривых состоит из парабол. Уравнение софокусных парабол имеет вид:

$$\frac{y^2}{\beta-\tau}+2x+\tau=0 \quad . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \quad (16)$$

При $-\infty<\tau<\beta$ ветви параболы идут влево от фокуса, при $\beta<\tau<+\infty$ ветви параболы идут вправо от фокуса. Положим, что вспомогательная кривая дана в общей форме уравнением (1).

Касательная к кривой (16) имеет вид:

$$\frac{yy_1}{\beta-\tau}+(x+x_1)+\tau=0 \quad . \; . \; . \; . \; . \quad (17)$$

Поляра неизвестного полюса (x_0y_0) относительно вспомогательной кривой дается уравнением (2).

Так как уравнения (2) и (17) выражают, по условию задачи, одну и ту же прямую, то легко получим:

$$\left.\begin{aligned} \frac{\beta-\tau}{y_1}&=\frac{g_1(x_0,y_0)}{g_2(x_0,y_0)} \\ x_1+\tau&=\frac{g_3(x_0,y_0)}{g_1(x_0,y_0)} \end{aligned}\right\} \quad . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \quad (18)$$

Так как (x_1y_1) удовлетворяет уравнению (16), то отсюда получим ур-ие полярной кривой в окончательном виде:

$$g_2^2(x,y)(\beta-\tau)+2g_1(x,y)g_3(x,y)-\tau g_1^2(x,y)=0 \quad . \; . \; . \; . \; . \quad (19)$$

Развертывая ур-ие (19) по степеням x и y, получим уравнение некоторой кривой второго порядка в общей форме:

$$b_{11}x^2+2b_{12}xy+b_{22}y^2+2b_{13}x+2b_{23}y+b_{33}=0 \quad . \; . \; . \quad (20)$$

где:

$$\left.\begin{aligned}
b_{11}&=2a_{11}a_{13}+a_{12}^2(\beta-\tau)-\tau a_{11}^2\\
b_{12}&=(a_{12}a_{32}+a_{12}a_{13})+a_{21}a_{22}(\beta-\tau)-\tau a_{11}a_{12}\\
b_{22}&=2a_{12}a_{32}+a_{22}^2(\beta-\tau)-\tau a_{12}^2\\
b_{13}&=(a_{11}a_{33}+a_{13}^2)+a_{12}a_{23}(\beta-\tau)-\tau a_{11}a_{13}\\
b_{23}&=(a_{12}a_{33}+a_{13}a_{32})+a_{22}a_{23}(\beta-\tau)-\tau a_{12}a_{13}\\
b_{33}&=2a_{13}a_{33}+a_{23}^2(\beta-\tau)-\tau a_{13}^2
\end{aligned}\right\} \quad \ldots\ldots \quad (21)$$

Пользуясь формулами (10) находим:

$$\left.\begin{aligned}
x&=\frac{BB_1+(\beta-\tau)[Ca_{11}a_{22}-2Aa_{12}a_{23}+Da_{22}]-A\cdot A_1\tau(\beta-\tau)}{-B_1^2+2(\beta-\tau)[D_1a_{13}-A_1a_{11}a_{22}]-A_1^2\tau(\beta-\tau)}\\
y&=\frac{B_1C_1+(\beta-\tau)[A_1a_{12}a_{33}-2a_{11}a_{13}a_{22}a_{33}+Ea_{12}]+B_1A_1\tau(\beta-\tau)}{-B_1^2+2(\beta-\tau)[D_1a_{13}-A_1a_{11}a_{22}]-A_1^2\tau(\beta-\tau)}
\end{aligned}\right\}(22)$$

где A, B, C, A_1, B_1, C_1 имеют прежния значения и

$$\left.\begin{aligned}
D\ &=a_{21}^2a_{33}-a_{22}a_{13}^2\\
D_1&=a_{13}^2a_{23}-a_{22}a_{12}^2\\
E\ &=a_{11}a_{23}^2+a_{22}a_{13}^2
\end{aligned}\right\} \quad \ldots\ldots\ldots \quad (23).$$

Ур-ия (22) дают геометрическое место центров кривых, полярных системе софокусных парабол. Исключив τ из ур-ий (22) получим кривую второго порядка при условии $A_1 \neq 0$.

В случае $A_1=0$ совершенно аналогично тому, что мы имели при исследовании кривых с центром, вместо кривой второго порядка, получим прямую линию, уравнение которой не зависит от β. Не останавливаясь на подробном исследовании $f(\tau)$ в обоих этих случаях, скажем лишь, что и для системы софокусных кривых второго порядка без центра теоремы 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9 и 10 остаются справедливыми с тою лишь разницей, что теперь для полярной системы мы имеем одну прямую l вместо двух и две общих мнимых точки вместо четырех.

Прежде чем приступить к исследованию некоторых частных случаев полярных систем, изложим еще одно соображение общего характера.

Вспомогательная кривая выражается уравнением

$$xg_1(x,y)+yg_2(x,y)+g_3(x,y)=0$$

фокус системы софокусных центральных кривых имеет координаты:

$$x=\pm\sqrt{\alpha-\beta}\ .\ y=0.$$

Поляра этой точки относительно вспомогательной кривой, или иначе наша прямая l—будет иметь уравнение:

$$x(a_{11}\sqrt{\alpha-\beta}+a_{13})+y(a_{21}\sqrt{\alpha-\beta}+a_{23})+(a_{31}\sqrt{\alpha-\beta}+a_{33})=0$$

или иначе:

$$\sqrt{\alpha-\beta}(a_{11}x+a_{12}y+a_{13})=-(a_{31}x+a_{32}y+a_{33}).$$

Принимая во внимание, что корень м. б. взят с двумя знаками получим вообще:

$$\sqrt{\alpha-\beta}\ .\ g_1(x,y)=g_3(x,y).$$

Это уравнение тождественно с урав-нием (7) для предельной кривой полярной системы при $\tau=\beta$. Из уравнения (19) при $\tau=\beta$ получим уравнение предельной параболы:

$$\frac{\beta}{2}g_1(x,y)=g_3(x,y) \quad \ldots \ldots \quad (24).$$

При этом значении τ одна из кривых полярных системе софокусных парабол обращается в прямую. Отыскиваем поляру фокуса софокусных парабол относительно вспомогательной кривой. Координаты фокуса суть:

$$x=-\frac{\beta}{2}y=0.$$

Уравнение поляры:

$$x(a_{13}-a_{11}\frac{\beta}{2})+y(a_{23}-a_{21}\frac{\beta}{2})+(a_{33}-a_{31}\frac{\beta}{2})=0$$

или окончательно:

$$\frac{\beta}{2}g_1(x,y)=g_3(x,y).$$

Имеем вывод:

12) *Поляры фокусов софокусных кривых второго порядка относительно вспомогательной коники принадлежат к системе полярных кривых как их предельные случаи.*

III.

Рассмотрим теперь некоторые частные случаи вспомогательных кривых и софокусных систем. Пусть имеем систему софокусных центральных кривых второго порядка, причем коэффициенты вспомогательной кривой удовлетворяют условию:

$$A = a_{12}a_{23} - a_{13}a_{22} = 0$$

или иначе:

$$\frac{a_{12}}{a_{13}} = \frac{a_{22}}{a_{23}} \quad \ldots\ldots\ldots\ldots (25).$$

Тогда из формул (11) получим:

$$\left.\begin{aligned} x &= \frac{B\,B_1}{(\beta-\tau)A_1^2 - B_1^2} \\ y &= \frac{B_1.C_1 - (\beta-\tau)A_1.B_1}{(\beta-\tau)A_1^2 - B_1^2} \end{aligned}\right\} \quad \ldots\ldots\ldots (26).$$

Исключая $(\beta - \tau)$, получим:

$$\frac{A_1x}{A_1y + B_1} = \frac{B_1x + B}{B_1y + C_1} \quad \ldots\ldots\ldots (27).$$

Из (27) следует, что:

13) *Если коэффициенты уравнения вспомогательной кривой удовлетворяют условию* (25), *то геометрическим местом центров кривых полярных центральным софокусным коникам, будет прямая линия.*

Предположим теперь, что коэффициенты вспомогательной кривой удовлетворяют условию:

$$B_1 = a_{11}a_{23} - a_{12}a_{13} = 0$$

или:

$$\frac{a_{11}}{a_{12}} = \frac{a_{13}}{a_{23}} \quad \ldots\ldots\ldots\ldots (28)$$

Из уравнений (12) получим:

$$x = \frac{A.C + AA_1(\beta-\tau)}{(\alpha-\tau)A_1^2 - A_2}$$

$$y = \frac{-A.B}{(\alpha-\tau)A_1^2 - A^2}$$

Исключая ($\alpha-\tau$), получим:

$$\frac{A_1x-A}{A_1y}=\frac{Ax+C}{Ay-B} \quad . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \; (29).$$

Аналогично теореме (13) имеем вывод:

14) *Если коэффициенты вспомогательной кривой удовлетворяют условию* (28), *то геометрическим местом центров кривых, полярных центрельным софокусным коникам, будет прямая линия.*

Не трудно убедиться, что в случае $A=A_1=0$ все полярные кривые софокусных центральных конических сечений обладают общим центром; при $B=B_1=0$ геометрическим местом центров полярных кривых служит большая ось софокусной системы и при $A=B=0$—малая ось; при $A=B_1=0$ все полярные кривые имеют общий центр с софокусной системой. Аналогичным образом можно было-бы разсмотреть и частные случаи для софокусных кривых без центра.

Пусть имеем систему софокусных кривых

$$\frac{x^2}{\alpha-\tau}=\frac{y^2}{\beta-\tau}=1$$

и пусть теперь вспомогательная кривая не только обладает общим с нею центром, как в случае $A=B_1=0$, но и имеет те-же оси.

Уравнение ея будет:

$$\frac{x^2}{a^2}\pm\frac{y^2}{b^2}=1.$$

Полярные кривые легко получим в форме:

$$\frac{x_2}{\left(\frac{a^4}{\alpha-\tau}\right)}=\frac{y^2}{\left(\frac{b^4}{\beta-\tau}\right)}=1 \quad . \; . \; . \; . \; . \; . \; (30).$$

При $-\infty<\tau<\beta$ уравнение (30) дает эллипсы и при $\beta<\tau<\alpha$ гиперболы, при $\tau=\beta$ пару прямых. Следовательно:

15) *Если вспомогательная центральная кривая второго порядка обладает общими осями с софокусной системой, то и полярные кривые имеют те-же оси, а следовательно и тот-же центр, но различные фокусы; эллипсу софокусной*

системы соответствует эллипс в системе полярных кривых и гиперболе соответствует гипербола.

На прилагаемых чертежах изображены софокусная система центральных кривых и система ей полярная, в предположении что вспомогательная кривая имеет с софокусной системой общие оси.

Обозначения на чертеже III те же, что на чертеже I, и на чертеже IV те же, что на чертеже II.

Если вспомогательная кривая имеет уравнение

$$y^2=2px,$$

то уравнение кривых, полярных системе центральных софокусных коник, будет:

$$\frac{x^2}{\alpha-\tau}-\frac{y^2}{p^2(\alpha-\tau)}\cdot(\beta-\tau)=1 \quad . \ . \ . \ . \ . \ . \ . \ . \quad (31).$$

Здесь при $-\infty<\tau<\beta$ имеем гиперболы, при $\tau=\beta$ пару прямых перпендикулярных оси софокусной системы и *проходящих через ея фокусы* и при $\beta<\tau<\alpha$ имеем эллипсы. Таким образом:

16) *Если вспомогательной кривой при полярном преобразовании софокусных центральных конических сечений служит парабола с вершиной в центре системы и фокусом на большой ея оси, то полярные кривые имеют общие оси с софокусной системой; эллипсу при полярном преобразовании соответствует гипербола и наоборот.*

Приведем еще один пример, интересный в смысле однообразия и симметричного расположения полярных кривых. Пусть имеем кривые:

$$\frac{y^2}{\beta-\tau}+2x+\tau=0.$$

Пусть вспомогательная кривая также парабола с вершиной вначале координат:

$$y^2=2px.$$

Тогда уравнение полярных кривых будет:

$$\frac{y^2}{\left(\frac{p^2}{\beta-\tau}\right)}+2x-\tau=0 \quad . \ . \ . \ . \ . \ . \quad (32).$$

Имеем: 17) *полярными кривыми софокусных парабол относительно параболы с вершиной в начале координат и общей осью, будут одни параболы.* В данном случае при $\tau=\beta$ получим из (32) уравнение прямой:

$$x=\frac{\beta}{2}.$$

Наша прямая l в данном случае пересекает ось X в точке, симметричной фокусу софокусных парабол. Не трудно в этом случае изобразить на чертеже систему кривых полярных софокусным параболам относительно параболы (см. черт. V). Система софокусных парабол дана на чертеже VI.

Аналогичными способами мы могли бы изучать случаи, когда полярные кривые имеют общий центр, общие оси и т. д. с полярной кривой. Наконец, остановимся еще на системе концентрических окружностей с центром в начале координат. Их урав-ние:

$$x^2+y^2=\alpha \quad \tau \ldots \ldots \ldots (33).$$

Уравнение полярных кривых получим в форме:

$$(\alpha-\tau)[g_1^2(x,y)+g_2^2(x,y)]-g_3^2(x,y)=0 \ldots \ldots (34).$$

Из уравнений (11) получим геометрическое место центров:

$$\left.\begin{aligned} x&=\frac{(\alpha-\tau)A.A_1+(BB_1+AC)}{(\alpha-\tau)A_1^2-(B_1^2+A^2)}\\ y&=\frac{-(\alpha-\tau)A_1.B_1+(B_1C_1-AB)}{(\alpha-\tau)A_1^2-(B_1^2+A^2)}\end{aligned}\right\}\ldots\ldots(35).$$

При $\tau=\alpha$ из уравнения (34) имеем уравненее прямой l:

$$g_3(x,y)=0.$$

Из рассмотрения знаменателя выражений (35) следует, что в системе полярных кривых имеется одна парабола. Итак:

18) *Геометрическое место центров кривых, полярных концентрическим окружностям относительно центральной кривой второго порядка, есть прямая линия; полярные кривые состоят из эллипсов, гипербол, одной параболы и одной прямой.*

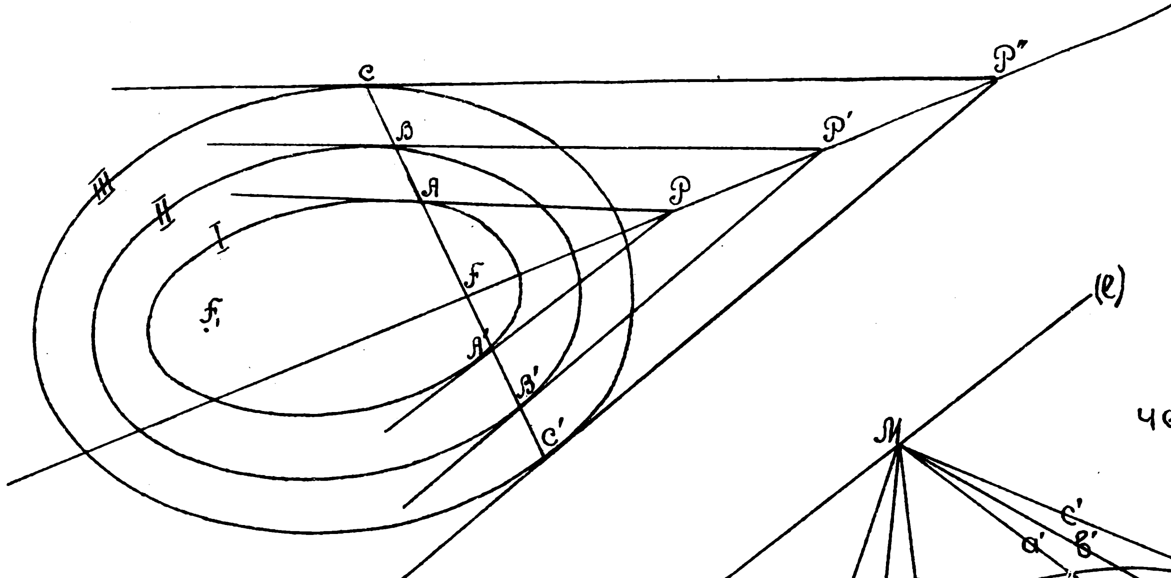
Если вспомогательная кривая—парабола т. е. $A_1=0$, то из (35) получим:

$$\left.\begin{aligned} x &= \frac{BB_1 + AC}{-(B_1^2 + A^2)} \\ y &= \frac{B_1C_1 - AB}{-(B_1^2 + A^2)} \end{aligned}\right\} \quad \ldots\ldots\ldots (36).$$

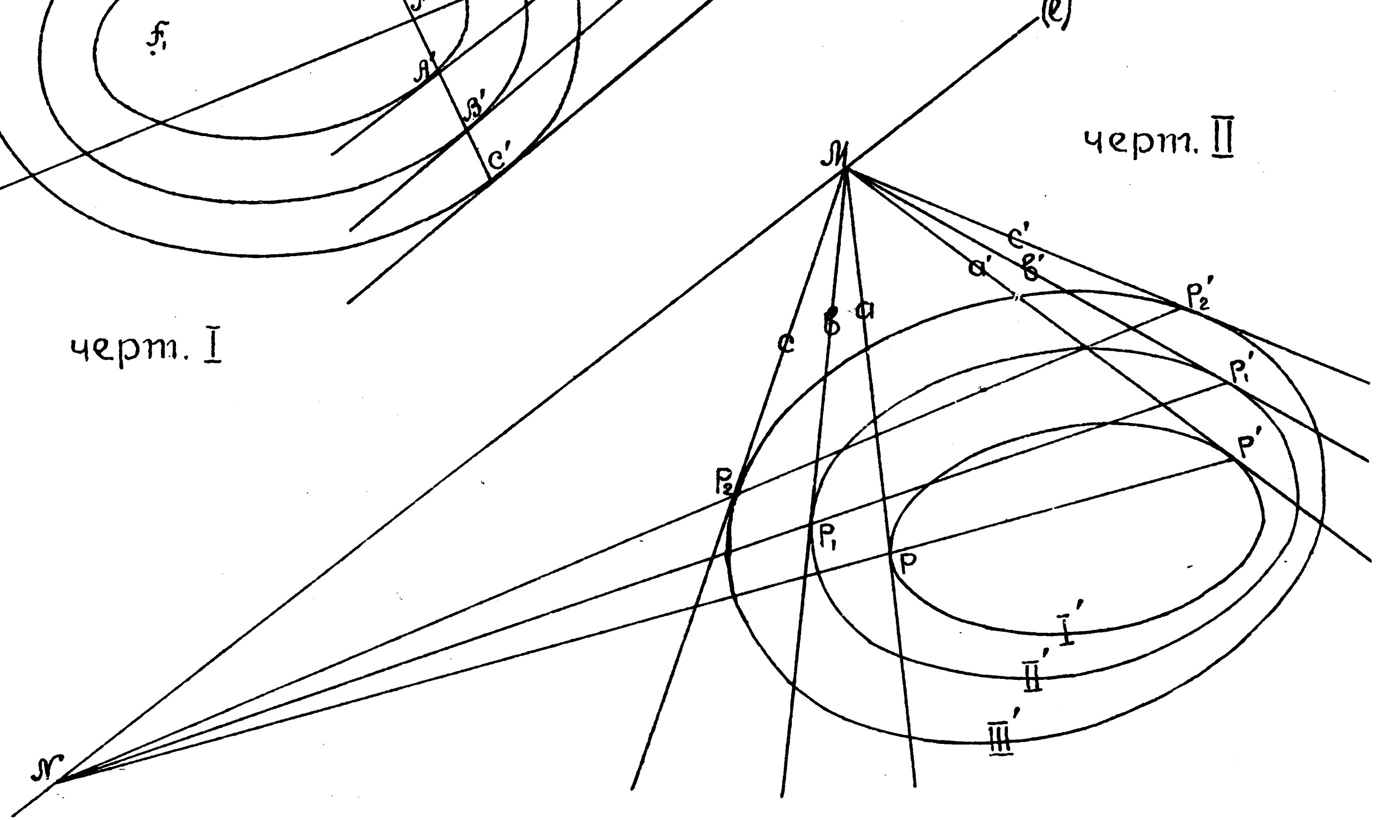
Отсюда следует:

19) *Кривые, полярные концентрическим окружностям относительно параболы, обладают общим центром и состоят из гипербол и одной прямой.*

Екатеринбург. Июнь 1920. **Н. Горин.**

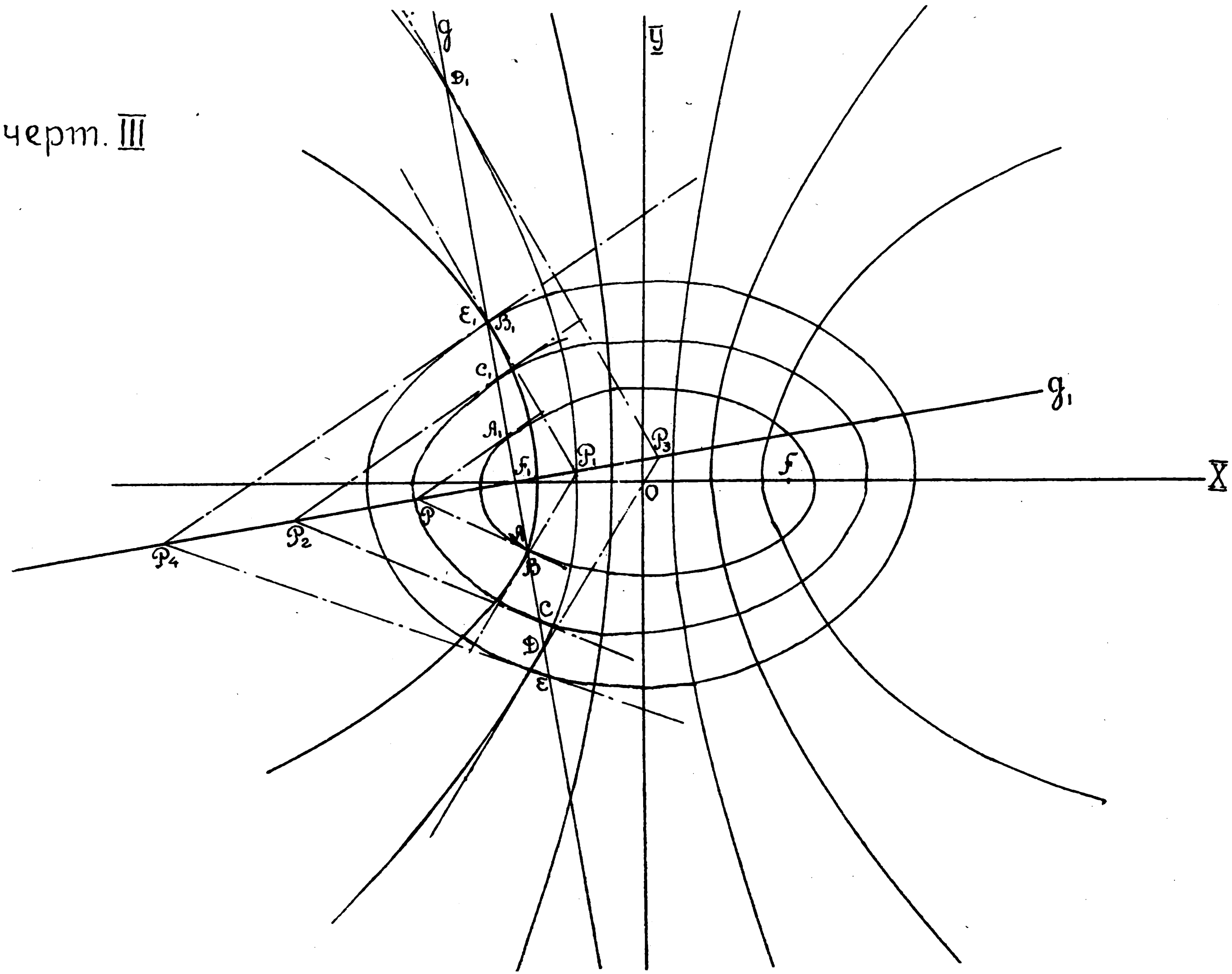


черт. I

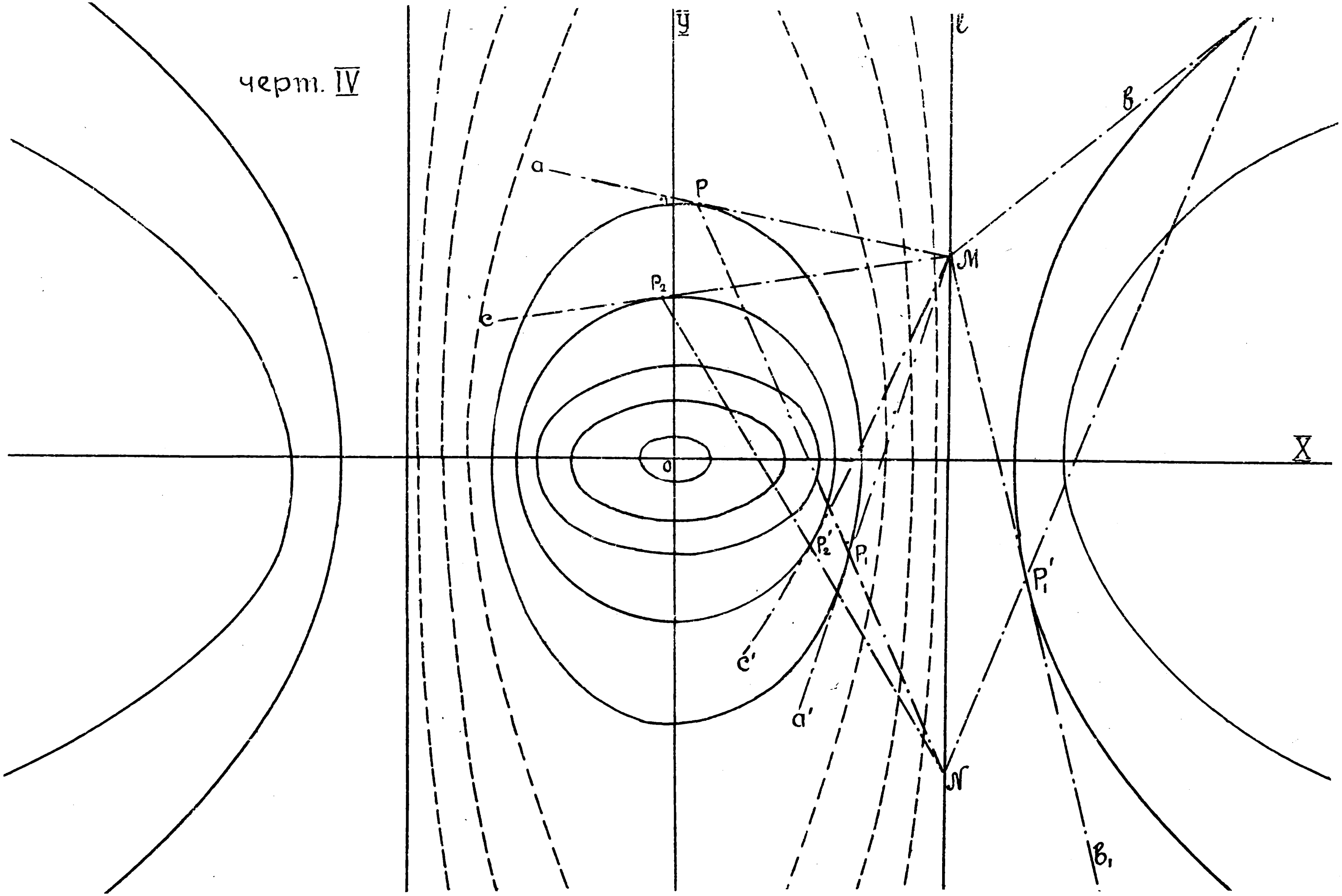


черт. II

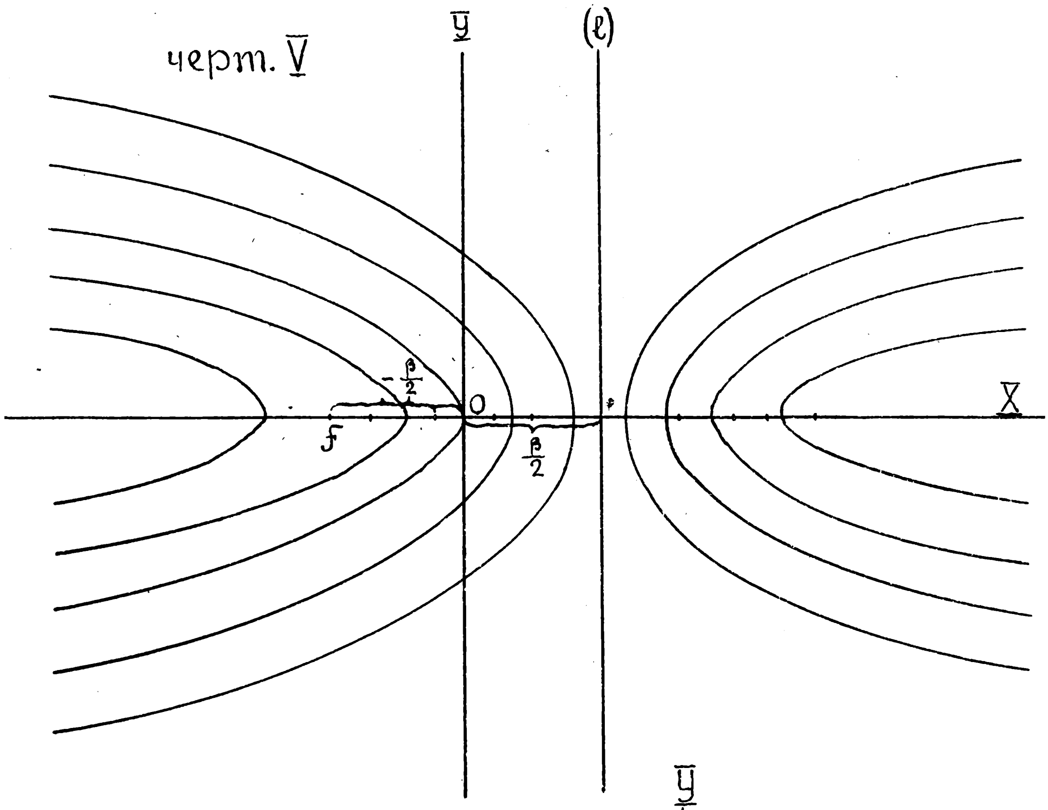
черт. III



черт. IV



черт. V



черт. VI