ной зависимости, универсальное развитие человека, свободная индивидуальность (третья ступень).

Признанный знаток истории философской мысли России и СССР нидерландский ученый Эверт ван Цвирде справедливо обобщил: «Советская философия — эпизод истории русской философии и часть истории России. Будучи таковой, она не только часть исторического наследия, но также будущего в рамках традиции русской философской культуры»[7].

Сложившаяся в советское время Уральская философская школа — органическая часть великой русской философской культуры. Не случайно местом проведения II Всероссийского философского конгресса в 1999 году был избран г. Екатеринбург (I конгресс был проведен в 1997 году в Санкт-Петербурге). Важнейшая рекомендация конгресса — изучение российских версий марксизма, темы, которая является одной из основных тем кафедры истории философии Уральского университета.

Свой 80-летний юбилей университет встречает полным творческих планов и немалых свершений. Что же до университетских философов, то надо сказать, что на кафедрах философского факультета и ИППК интенсивно разрабатываются обе интерпретации марксистской философии. Об этом свидетельствуют и печатная продукция, и подготовка сотен специалистов, в том числе кандидатов и докторов наук.

[1] *Лекторский В. А.* Предисловие // Философия не кончается...: В 2 кн. Кн. 1. М., 1998. С. 3.
[2] Там же. С. 4.
[3] *Геллнер Э.* Слова и вещи. М., 1962. С. 26.
[4] *Руткевич М. Н.* Диалектический материализм. М, 1973. С. 37.
[5] *Грэхэм Л. Р.* Естествознание, философия и науки о человеческом поведении в Советском Союзе. М., 1991. С. 415–418.
[6] *Водолагин А.* Онтология политической воли. М., 1992. С. 13.
[7] *Цвирде Э. ван.* Советская философия — идеология и служанка. Неймеген, 1994. С. 627.

Л. Н. Шеврин

МНОГООБРАЗИЯ АЛГЕБРАИЧЕСКИХ СИСТЕМ

Алгебраической системой называется множество, на котором задан некоторый набор алгебраических операций; операций в этом наборе может быть как конечное число (в частности, одна), так и бесконечно много. Понимание высказанного определения предполагает знание математических понятий множества и алгебраической операции. Имея в виду преимущественно читателя-нематематика, я не буду здесь углубляться и приводить соответствующие разъяснения, а проиллюстрирую определение на нескольких, надеюсь, вполне понятных примерах. Множество **N** всех натуральных чисел можно рассматривать как алгебраическую систему с одной операцией сложения; или с одной операцией умножения; или с набором из двух указанных операций; или, например, с набором, который состоит из двух указанных операций и бесконечного множества операций возведения произвольного числа во всевозможные степени с натуральным показателем. Таким образом, одно и то же множество (в данном примере — **N**) может быть превращено в разные алгебраические системы. На множестве всех целых чисел или множестве всех действительных чисел можно кроме перечисленных операций рассматривать, например, операцию вычитания. Различные алгебраические операции естественно рассматривать не только на числовых множествах, но и, например, на множествах векторов, функций, матриц, цепочек сигналов и многих других множествах, служащих предметом внимания и изучения в разных разделах математики и ее приложений. Тем самым ясно, что разного рода алгебраические системы очень распространены в «математическом мире».

Алгебра, являющаяся одной из важнейших областей математики, в двадцатом веке сформировалась именно как наука об алгебраических системах. При этом в ней изучаются и свойства конкретных алгебраических систем, и разнообразные общие свойства алгебраических систем, выражаемые в терминах заданных на них операций. Одним из важнейших языков для выражения свойств алгебраических систем является язык тождеств. *Тождеством* называют равенство буквенных выражений, справедливое при всех значениях входящих в него букв. Понятие тождества можно считать уникальным по «дистанции», охватываемой им в математике, — от самых начальных фактов, с которыми знакомятся младшеклассники, до крупных научных достижений последнего времени и открытых проблем.

Простейшие примеры тождества доставляет то свойство сложения и умножения натуральных чисел, которое называется коммутативностью и которое в школе принято называть переместительным законом. Соответствующие тождества записываются хорошо известными формулами

$$x + y = y + x\,, \qquad x \cdot y = y \cdot x\,. \tag{1}$$

В школьном курсе к переместительному закону вскоре добавляется сочетательный, означающий выполнение для указанных операций свойства ассоциативности, т. е. тождеств

$$(x + y) + z = x + (y + z)\,, \qquad (x \cdot y) \cdot z = x \cdot (y \cdot z)\,. \tag{2}$$

Позднее констатируется так называемый распределительный закон, означающий выполнение тождеств дистрибутивности

$$x \cdot (y + z) = x \cdot y + x \cdot z\,, \qquad (y + z) \cdot x = y \cdot x + z \cdot x\,. \tag{3}$$

Указанные тождества распространяются на более широкие числовые множества: на целые числа, рациональные, действительные. Для числовых множеств в школьной математике отмечаются и другие тождества, как правило, выводимые из более простых, среди которых, конечно, тождества (1)–(3). Типичные примеры таких тождеств:

$$(x+y)^2 = x^2 + 2\cdot x\cdot y + y^2\,, \qquad x^2 - y^2 = (x+y)\cdot(x-y)\,.$$

Имеется немало примеров важных тождеств (как в рамках школьной математики, так и особенно вне этих рамок), в которых участвуют другие операции, заданные на числовых и нечисловых множествах. Можно сказать, что тождества являются непременными участниками многих математических выкладок, и в огромном числе работ, относящихся к самым разным областям математики, так или иначе приходится иметь дело с тождествами алгебраических систем. Стоит отметить, что почти все основные типы алгебраических систем и определяются в терминах тождеств.

Так, *полугруппа* — это множество с одной ассоциативной операцией; если эта операция обозначена, скажем, символом $\circ$, то ассоциативность означает выполнение тождества

$$(x\circ y)\circ z = x\circ(y\circ z)\,.$$

В частности, если такая операция названа сложением [умножением], то полугруппа определяется первым [вторым] из тождеств (2); тем самым, например, множество $\mathbf{N}$ всех натуральных чисел является полугруппой и относительно сложения, и относительно умножения.

Группа может быть определена как полугруппа (с операцией, обозначенной, скажем, символом $\circ$), на которой задана дополнительная операция, сопоставляющая любому элементу x элемент, обозначаемый, скажем, x', причем кроме тождества ассоциативности выполнены тождества

$$x\circ x' = x'\circ x\,,\ (x\circ x')\circ y = y\circ(x\circ x') = y.$$

Группой, например, будет множество всех целых чисел, если в качестве операции $\circ$ взять сложение, а роль x' будет играть элемент $-x$.

Кольцо определяется как множество с двумя операциями, называемыми обычно сложением и умножением, и дополнительной операцией, сопоставляющей любому элементу x элемент $-x$, причем относительно сложения и указанной дополнительной операции это группа, сложение коммутативно, т. е. выполнено первое из тождеств (1), а сложение и умножение связаны тождествами дистрибутивности (3). Простейший пример кольца — множество всех целых чисел относительно обычных операций сложения и умножения.

Очевидно, что различных тождеств бесконечно много, даже если рассматривать только тождества, в которых фигурирует какая-то одна операция. Более того, из любого тождества, выполняющегося в данной алгебраической системе, можно вывести бесконечно много других тождеств, выполняющихся в той же системе. Уже эти простые соображения наводят на мысль о богатстве ситуаций, в которых могут возникать вопросы, связанные с рассмотрением тождеств. (Например, один из принципиальных вопросов такого рода заключается в выяснении того, могут ли все тождества, выполняющиеся в данной алгебраической системе, быть выведены из конечного числа таких тождеств. Это так называемая *проблема конечного базиса*. Известны примеры как положительного, так и отрицательного решения этой проблемы для многих изучавшихся алгебраических систем, — и в большинстве случаев соответствующие результаты представляют собой крупные достижения в современных алгебраических исследованиях*). Проблематика, связанная с изучением тождеств, чрезвычайно богата и обусловила формирование широкого направления исследований, называемого теорией многообразий. *Многообразием* в данном контексте принято называть всякий класс алгебраических систем, который может быть задан некоторой совокупностью тождеств. Важными примерами многообразий являются, как вытекает из сказанного в трех предыдущих абзацах, такие «большие» классы, как класс всех полугрупп, класс всех групп, класс всех колец. У каждого из них имеется бесконечно много подклассов, также являющихся многообразиями; они называются подмногообразиями. Подмногообразия любого многообразия образуют так называемую решетку (это тоже один из основных типов алгебраических систем, но, не забывая о читателе-нематематике, я не буду приводить определение решетки, которое, кстати, также может быть дано на языке тождеств). Значительная часть исследований по теории многообразий устанавливает разнообразные связи между многообразиями и решетками их подмногообразий.

Начало развития теории многообразий алгебраических систем было положено в 1935 году основополагающей работой американского математика Г.Биркгофа. Во второй половине двадцатого века теория многообразий превратилась в одно из магистральных направлений в алгебре. Этой теории посвящено огромное количество исследований, отраженных, пожалуй, в нескольких тысячах работ. Значительное место занимает теория многообразий и в исследованиях участников екатеринбургского семинара «Алгебраические системы», руководимого автором настоящей заметки. В докладе на юбилейной научной конференции Уральского университета 17 октября 2000 года я кратко рассказал об основных направлениях исследований по теории многообразий, проводимых в семинаре. Можно выделить пять таких направлений: тождества, структурные аспекты, решетки многообразий, свободные системы в многообразиях, алгоритмические проблемы; в каждом из них, в свою очередь, естественно выделяются более конкретные разделы. В докладе были охарактеризованы типичные проблемы, на решение которых направлялись усилия многих участников семинара. Среди них, например, упомянутая в предыдущем абзаце проблема конечного базиса, проблема классификации многообразий с теми или иными ограничениями на решетку их подмногообразий и целый ряд других важных проблем. Много существенных результатов было получено участниками семинара в каждом из пяти указанных направлений.

---

* С более подробными первоначальными сведениями о тождествах (включая ряд фактов, относящихся к проблеме конечного базиса для полугрупп, групп и колец) заинтересованный читатель может познакомиться по популярной статье [1] или [2]. О нескольких интересных случаях решения проблемы конечного базиса рассказано в популярной статье [3]. Среди посвященных тождествам обобщающих трудов подготовленному читателю можно рекомендовать обстоятельный обзор [4].

Но содержание упомянутого доклада не ограничилось рамками объявленной темы «Многообразия алгебраических систем»: в докладе была обрисована и общая картина деятельности семинара на протяжении 34 лет. Последующий текст данной заметки отражает эту, вторую, часть доклада. Семинар «Алгебраические системы» начал работу в Уральском университете в ноябре 1966 года. К тому времени вокруг пишущего эти строки сгруппировалось несколько более молодых исследователей — и возникла обычная в таких случаях потребность помимо индивидуальных бесед с каждым регулярно встречаться всем вместе для обсуждения получаемых результатов и вообще для обсуждения проблематики. Позднее в традицию семинара вошло также обсуждение тезисов докладов, посылаемых его участниками на различные крупные конференции. Немалое внимание уделялось и воспитанию у молодых исследователей умения делать научные доклады. Вначале на семинаре было около 10 постоянных участников. В последующие годы их число доходило до 20–25. Пик, по-видимому, пришелся на 80-е годы, когда на отдельных заседаниях присутствовало до 30 человек. С середины 80-х годов среди постоянных участников семинара, наряду с учениками руководителя семинара, появились и ученики его учеников. Число таких «научных внуков» с тех пор неуклонно возрастает; их подготовкой успешно занимаются В.А.Баранский, Ю.М.Važенин, М.В.Волков, Е.В.Суханов.

Объектом рассмотрений в семинаре служит ряд основных типов алгебраических систем: полугруппы, группы, кольца, решетки и некоторые другие. В последнее время тематика семинара обогатилась некоторыми вопросами, которые принято относить к дискретной математике, в частности вопросами дискретной оптимизации. Исследования в семинаре ведутся по целому ряду направлений. Теория многообразий составляет одну из наиболее заметных линий, об исследованиях в этом направлении кратко сказано выше. Подробнее об исследованиях в семинаре рассказано в статье [5], где среди прочего перечислены все диссертации, защищенные участниками семинара до 1999 года; к настоящему времени защищено 45 кандидатских и 8 докторских диссертаций.

За годы существования семинара его участниками опубликовано более 600 статей и более 500 тезисов докладов на различных конференциях, главным образом всесоюзных и международных. При этом более 270 статей напечатано в центральных отечественных математических журналах, более 130 — в международных журналах или трудах международных конференций, более 110 — в «Математических записках Уральского университета» (выходивших в 60–80-х годах). Отмечу обобщающие публикации по областям исследований, которым в семинаре уделялось особенно большое внимание и в которые участники семинара внесли заметный (а в некоторых вопросах — определяющий) вклад. Это обзорные статьи [6]–[13], а также монографии [14] и [15]; вторая из монографий представляет собой не просто английский перевод, а модифицированную и расширенную версию первой. Несколько из упомянутых обзорных статей, как непосредственно видно по их названиям, посвящены проблематике тождеств и другим аспектам теории многообразий. В указанных трудах обозреваются все основные достижения в соответствующих областях, принадлежащие многочисленным авторам из разных стран. Глава [16] справочной монографии по общей алгебре посвящена алгебраической теории полугрупп в целом и дает имеющий энциклопедический характер развернутый очерк этой теории (включая приложения к теориям формальных языков, автоматов и кодов) по состоянию на начало 90-х годов. Аналогичный характер имеют более ранние публикации автора данной заметки в Большой советской энциклопедии (3-е изд.) и пятитомной Математической энциклопедии (1977–1985): для первой была написана статья «Полугруппа», для второй — цикл из 40 статей по теории полугрупп. Недавно несколькими участниками семинара (М. В. Волковым, А. П. Замятиным и И. О. Коряковым) под руководством и при участии автора данной заметки подготовлен цикл из 11 статей для однотомной энциклопедии «Дискретная математика», выход которой ожидается в 2001 году.

Помимо оригинальных публикаций, определенное внимание было уделено нами и переводам на русский язык нескольких фундаментальных зарубежных трудов в областях, входящих в круг интересов участников семинара. Это двухтомная монография [17], основным переводчиком которой был В. А. Баранский (он перевел 11 глав из 12, одна глава переведена В. Г. Житомирским), монография [18] и учебное пособие [19], переведенные И. О.Коряковым. Указанные переводы выполнены под редакцией пишущего эти строки.

Семинар принимал участие в организации нескольких крупных алгебраических конференций, в том числе всех трех всесоюзных симпозиумов по теории полугрупп, проведенных в Свердловске Уральским университетом в 1969, 1978 и 1988 годах, и двух международных конференциях по теории полугрупп и ее приложениям в честь Е. С. Ляпина, проведенных в Санкт-Петербурге в 1995 и 1999 годах (Уральский университет был соорганизатором этих двух конференций). Из участников семинара состояла редколлегия сборника нерешенных проблем по теории полугрупп «Свердловская тетрадь», который трижды выпускался Уральским университетом после каждого всесоюзного симпозиума.

Заседания семинара проходят в течение учебного года еженедельно (с редкими пропусками и, как правило, перерывом на зимнюю сессию). К 2001 году состоялось 880 заседаний. С началом публикации выпусков серии «Математика и механика» журнала «Известия Уральского государственного университета» в них стали публиковаться достаточно информативные отчеты о заседаниях семинара — с тезисами многих сделанных на нем докладов. В трех вышедших к настоящему времени выпусках этой серии помещены отчеты о заседаниях с 800-го по 872-е. С конца 60-х годов помимо свердловских (екатеринбургских) участников на семинаре время от времени выступают иногородние, а с 1989 года — и иностранные алгебраисты. Всего за время работы семинара на нем выступили более 200 докладчиков, в том числе более 120 иногородних (из 43 городов бывшего Советского Союза и 11 городов ряда зарубежных стран: Австралии, Австрии, Великобритании, Венгрии, Испании, Канады, Монголии, Польши, США). Несколько воспитанников семинара работают сейчас в зарубежных университетах; некоторые из них навещают родной город, используя такие визиты и для выступлений на семинаре, где проходило их научное становление.

Каждое 100-е («юбилейное») заседание семинара проводится по специальной программе: обсуждаются основные итоги работы семинара за прошедшие сто заседаний и перспективы исследований на ближайшие годы, сообщается статистика, относящаяся к докладчикам и публикациям. 500-е заседание было особым: мы сделали его расширенным и пригласили многих так или иначе связанных с семинаром коллег из разных городов СССР. Номинально одно заседание на самом деле состояло из пяти отдельных заседаний и проходило в течение трех дней — с 31 января по 2 февраля 1985 года. Фактически получилась своеобразная всесоюзная алгебраическая конференция, в работе которой приняли участие более 90 человек из 20 городов, в том числе более 40 иногородних. На расширенном 500-м заседании было сделано 36 докладов.

В более или менее обозримом будущем видится день, когда семинар соберется и на свое 1000-е заседание: это предположительно может произойти в 2005 году. Надеюсь, что в ближайшие годы участники семинара успешно продолжат свою исследовательскую деятельность как в направлениях, ставших для семинара традиционными, так и, возможно, в тех или иных новых направлениях. Хочется также надеяться, что и впредь семинар будет пополняться молодыми исследователями.

Литература

[1] *Шеврин Л. Н.* Тождества в алгебре // Соросовский Образовательный Журнал. 1996. № 7. С. 111–118.

[2] *Шеврин Л. Н.* Тождества в алгебре // Современное естествознание: Энциклопедия. Т. 3. Математика. Механика. М., 2000. С. 17–22.

[3] *Волков М. В.* Проблема конечности базиса тождеств // МИФ. Екатеринбург, 1996/97. № 2. С.4–15.

[4] *Бахтурин Ю. А., Ольшанский А. Ю.* Тождества // Современные проблемы математики. Фундаментальные направления. Т. 18. М., 1988. С. 117–240.

[5] *Шеврин Л. Н.* О семинаре «Алгебраические системы» // Известия Уральского государственного университета. 1998. № 10. (Математика и механика. Вып. 1). С. 167–173.

[6] *Shevrin L. N., Ovsyannikov A. J.* Semigroups and their subsemigroup lattices // Semigroup Forum. 1983. Vol. 27. P. 1–154.

[7] *Ševrin L. N., Martynov L. M.* Attainability and solvability for classes of algebras // Semigroups (Coll. Math. Soc. J. Bolyai. 39. Eds. G.Pollák, Št.Schwarz, O.Steinfeld). Amsterdam-Oxford-New York, 1985. P. 397–459.

[8] *Шеврин Л. Н., Волков М. В.* Тождества полугрупп // Изв. вузов. Математика. 1985. № 11. С. 3–47.

[9] *Важенин Ю.М.* Разрешимость теорий первого порядка классов полугрупп // Алгебраические системы и их многообразия. (Матем. записки УрГУ. Т. 14, тетр. 3). 1988. С.23–40.

[10] *Шеврин Л. Н., Суханов Е. В.* Структурные аспекты теории многообразий полугрупп // Изв. вузов. Математика. 1989. № 6. С. 3–39.

[11] *Kelarev A. V.* Radicals of semigroup rings of commutative semigroups // Semigroup Forum. 1994. Vol. 48. P. 1–17.

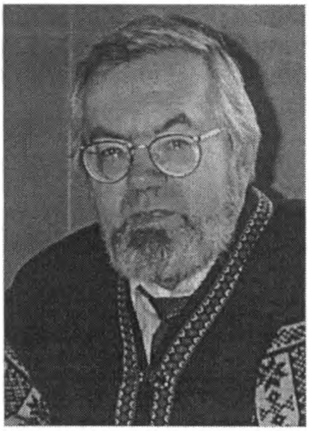
[12] *Kharlampovich O. G., Sapir M. V.* Algorithmic problems in varieties // Inter. J. Algebra and Comput. 1995. Vol.5. P.379–602.

[13] *Volkov M. V.* The finite basis problem for finite semigroups // Scientiae Mathematicae Japonicae. 2000. Vol.53, № 1. P.171–199.

[14] *Шеврин Л. Н., Овсянников А. Я.* Полугруппы и их подполугрупповые решетки. Свердловск, 1990. Ч. 1; 1991. Ч. 2.

[15] *Shevrin L. N., Ovsyannikov A. J.* Semigroups and their subsemigroup lattices. Dordrecht-Boston-London, 1996.
[16] *Шеврин Л. Н.* Полугруппы // Общая алгебра /Под ред. Л.А.Скорнякова. М., 1991. Т. 2. С.11–191.
[17] *Клиффорд А., Престон Г.* Алгебраическая теория полугрупп. М., 1972. Т.1, 2.
[18] *Лаллеман Ж.* Полугруппы и комбинаторные приложения. М., 1985.
[19] *Лидл Р., Пильц Г.* Прикладная абстрактная алгебра. Екатеринбург, 1996.

А. Н. Петров



НЕСТЕХИОМЕТРИЧЕСКИЕ ТВЕРДЫЕ ОКСИДЫ — НОВЫЕ МАТЕРИАЛЫ СОВРЕМЕННОЙ ТЕХНИКИ*

Введение

Обычно об открытиях в химии сообщается в специальных периодических изданиях — научных и технических журналах. Немногие из этих сообщений попадают в ежедневные газеты, потому что массовый читатель не в состоянии оценить их значение и важность. Однако представить число таких открытий можно по новым приборам, материалам и продуктам. Зачастую появление материалов с новыми свойствами или новым сочетанием известных свойств обеспечивает прорыв в какой-либо отрасли техники. Широко известно, что благодаря появлению полупроводниковых, резисторных, магнитных и других подобных материалов произошла революция в радиотехнике. На смену громоздким ламповым пришли компактные приборы, смонтированные на микро- и интегральных схемах. Прогресс в области получения новых материалов, может быть, не столь эффектный, как в приведенном примере, происходит постоянно. Успехи современной техники (радиоэлектроники, оптики, энергетики, машиностроения и т. п.), требующей получения материалов с нужными и воспроизводимыми свойствами, связаны непосредственно со многими химическими проблемами. Одной из этих проблем является проблема нестехиометрических соединений.

В данной статье мне хотелось бы рассказать о небольшой части проблем получения нестехиометрических оксидов, с которыми сталкиваются ученые кафедры физической химии Уральского государственного университета и решение которых в одних случаях уже внесло определенный вклад, в других — может положительно повлиять на развитие некоторых отраслей техники.

---

* Статья написана при поддержке проекта CRDF №REC-005 Уральского образовательного центра «Перспективные материалы».