ТЕОРИЯ ПОЗНАНИЯ И ЛОГИКА

УДК 164.2 + 510.646

Г. К. Ольховиков

О НЕКОТОРЫХ ТЕОРЕМАХ ТЕОРИИ Δ

В статье рассматривается второпорядковая теория Δ, построенная автором в рамках развиваемого им проекта по обоснованию деонтической логики. Доказывается непротиворечивость теории, после чего выводится ряд ее теорем, позволяющих лучше понять общую структуру ее моделей.

Ключевые слова: второпорядковая логика, непротиворечивость, теоремы.

Теория Δ является центральной частью проекта по обоснованию деонтической логики, изложенного в [1]. Там же в деталях рассмотрена неформальная интерпретация этой теории в естественном языке и дано интуитивное обоснование ее отдельных аксиом в контексте более общих философских принципов. Поэтому в настоящей статье мы не будем вопроизводить все эти рассуждения, а рассмотрим Δ исключительно с точки зрения ее формальных свойств. Поскольку Δ является теорией в классической логике предикатов второго порядка, ее единственной интерпретацией для нас останется стандартная формальная семантика по Тарскому, предусмотренная для теорий такого вида. В настоящей статье мы намерены (1) установить непротиворечивость этой теории, (2) дать вывод некоторых формул, доказуемых в ней, и (3) сделать из факта доказуемости этих формул некоторые выводы по поводу общей структуры моделей Δ.

Данная теория формулируется в языке классической логики второго порядка с сигнатурой $\Sigma(\Delta) = \langle B^3, L^1, Ag^2, Pos^4, Neg^4 \rangle$, где верхний индекс означает местность соответствующего предиката. В дальнейшем предметные переменные, n-местные предикатные переменные, будут обозначаться соответственно через: x, y, z, w; X^n, Y^n, Z^n, W^n, возможно с нижними индексами в виде натуральных чисел. Верхние индексы констант и переменных для предикатов и функций будут опускаться там, где это не вызовет путаницы. Для натурального n

$Fin^n(X)$ обозначает некоторую формулу второпорядковой логики предикатов, истинную, если и только если значением переменной X является конечное множество n-ок.

Для того чтобы сделать изложение аксиом D более компактным, введем следующие обозначения:

d1. $P(x, y) =_{\text{def}} B(x, y, y) \wedge x \neq y$;

d2. $f(x) = y =_{\text{def}}$
$(\exists z P(z, x) \to (P(y, x) \wedge \forall z(P(z, x) \to B(z, y, y)))) \wedge (\neg\exists z P(z, x) \to x = y)$;

d3. $AG(x, y) =_{\text{def}} \forall z(Ag(z, x) \to Ag(z, y))$;

d4. $x \equiv y =_{\text{def}} AG(x, y) \wedge AG(y, x)$;

d5. $Ag!(x) =_{\text{def}} Ag(x, x) \wedge \forall y(Ag(x, y) \to AG(x, y))$;

d6. $Ex(x, y) =_{\text{def}} Ag(y, y) \wedge \exists zw(B(z, w, x) \wedge AG(y, w))$;

d7. $Sub(X, x) =_{\text{def}}$
$\forall y(X(y) \to (Ex(x, y) \wedge Ag!(y))) \wedge \forall zw((X(z) \wedge X(w) \wedge z \neq w) \to \neg Ag(z, w))$;

d8. $T(z, w, z_1, w_1) =_{\text{def}}$
$\forall xy((Pos(x, y, z, w) \leftrightarrow Pos(x, y, z_1, w_1)) \wedge (Neg(x, y, z, w) \leftrightarrow Neg(x, y, z_1, w_1)))$.

Множество аксиом $Ax(\Delta)$ теории Δ является множеством универсальных замыканий следующих формул:

A1. $B(x, y, z) \to B(x, y, y)$;

A2. $B(x, y, z) \to B(x, z, y)$;

A3. $(B(x, y, z) \wedge B(x, z, w)) \to B(x, y, w)$;

A4. $B(x, x, x)$;

A5. $(B(x, y, y) \wedge B(y, x, x)) \to x = y$;

A6. $(B(x, y, y) \wedge B(y, z, w)) \to B(x, z, w)$;

A7. $\exists w X(w) \to \exists x \forall y(X(x) \wedge ((B(y, x, x) \wedge X(y)) \to x = y))$;

A8. $P(y, x) \to \exists z(P(z, x) \wedge \forall w(P(w, x) \to B(w, z, z)))$;

A9. $B(x, x, y) \to x = y$;

A10. $B(z, x, y) \to \exists w(B(w, x, y) \wedge f(x) = w)$[1];

A11. $\forall y(B(x, y, y) \to x = y) \to L(x)$;

A12. $Ag(x, y) \to Ag(y, x)$;

A13. $Ag(x, y) \to Ag(x, x)$;

A14. $Ag(x, y) \to \exists z(Ag(z, x) \wedge Ag(z, y) \wedge Ag!(z))$;

A15. $\exists y(B(x, y, y) \wedge Ag(y, y))$;

A16. $Sub(X, x) \to Fin^1(X)$;

A17. $Pos(x, y, z, w) \to \neg Neg(x, y, z, w)$;

A18. $(Pos(x, y, z, w) \vee Neg(x, y, z, w)) \to (Ex(x, y) \wedge Ex(w, z))$;

[1] Поскольку пока не доказано, что **d2** определяет некоторую функцию, мы не можем заменить консеквент **A10** на более простую формулу $B(f(x), x, y)$.

A19. $(y \equiv y_1 \wedge z \equiv z_1) \to ((Pos(x, y, z, w) \leftrightarrow Pos(x, y_1, z_1, w)) \wedge$
$\wedge (Neg(x, y, z, w) \leftrightarrow Neg(x, y_1, z_1, w)))$;

A20. $[\forall zw(X(z, w) \to Pos(x, y, z, w)) \wedge \forall z_1 w_1 z_2 w_2((X(z_1, w_1) \wedge X(z_2, w_2) \wedge$
$\wedge (z_1 \neq w_1 \vee z_2 \neq w_2)) \to \neg T(z_1, w_1, z_2, w_2))] \to Fin^2(X)$;

A21. $[\forall zw(X(z, w) \to Neg(x, y, z, w)) \wedge \forall z_1 w_1 z_2 w_2((X(z_1, w_1) \wedge X(z_2, w_2) \wedge$
$\wedge (z_1 \neq w_1 \vee z_2 \neq w_2)) \to \neg T(z_1, w_1, z_2, w_2))] \to Fin^2(X)$.

Поскольку Δ является второпорядковой теорией, возникает хорошо известный разрыв между истинностью и доказуемостью формулы в Δ. Для определенности будем считать формулу Φ сигнатуры Σ(Δ) доказуемой в Δ (выводимой в Δ из множества формул Γ сигнатуры Σ(Δ)), если и только если Φ выводима из множества $Ax(\Delta)$ (из множества $Ax(\Delta) \cup \Gamma$), в дедуктивной системе $D2$. Эта система изложена в [2, *66–67*] и представляет собой естественное обобщение аксиом и правил вывода для первопорядковых кванторов на кванторы по предикатам и функциям, дополненное аксиомами свертывания и выбора. Фактически в приводимых ниже доказательствах две последние аксиомы не используются, так что мы не будем приводить здесь их формулировки. Когда в доказательстве в качестве посылки используется формула, выводимая с помощью аксиом первопорядковой логики и их второпорядковых аналогов, она сопровождается комментарием «Taut». Форма приводимых ниже доказательств приближена к форме стандартных доказательств и выводов из посылок гильбертовского типа, при этом некоторые очевидные промежуточные переходы опускаются в целях экономии места там, где это не вредит очевидности доказательства.

Теорема 1. Δ непротиворечива.

Доказательство. Выберем произвольный элемент a и рассмотрим следующую структуру $M_a = \langle D_a, I_a \rangle$ сигнатуры Σ(Δ): $D_a = \{a\}$, $I_a(B) = \{\langle a, a, a\rangle\}$, $I_a(L) = \{a\}$, $I_a(Ag) = \{\langle a, a\rangle\}$, $I_a(Pos) = I_a(Neg) = \varnothing$. Очевидно, в M_a истинны следующие суждения:

(1) $\forall x \forall y \forall z B(x, y, z)$;

(2) $\forall x L(x)$;

(3) $\forall x \forall y Ag(x, y)$;

(4) $\forall x \forall y \forall z \forall w \neg Pos(x, y, z, w)$;

(5) $\forall x \forall y \forall z \forall w \neg Neg(x, y, z, w)$;

(6) $\forall x \forall y (x = y)$;

(7) $\forall X^1 Fin^1(X^1)$;

(8) $\forall X^2 Fin^2(X^2)$.

Покажем, что из (1)–(8) следует $Ax(\Delta)$:

(9) $\forall x \forall y \neg P(x, y)$ (из (6) и **d1**);

(10) $\forall x \forall y AG(x, y)$ (из (3) и **d3**);

(11) $\forall x Ag(x, x)$ (из (3));

(12) $\forall x \forall y (Ag(x, y) \to AG(x, y))$ (из (10));

(13) $\forall x Ag!(x)$ (из (11), (12) и **d5**);

(14) $\forall x \forall y \forall z(Ag(z, x) \wedge Ag(z, y) \wedge Ag!(z))$ (из (3) и (13));

(15) $\forall x \forall y(B(x, y, y) \wedge Ag(y, y))$ (из (1) и (3));

(16) $\forall x \forall y \forall z \forall w(\neg Pos(x, y, z, w) \wedge \neg Pos(x, y_1, z_1, w))$ (из (4));

(17) $\forall x \forall y \forall z \forall w(Pos(x, y, z, w) \leftrightarrow Pos(x, y_1, z_1, w))$ (из (16));

(18) $\forall x \forall y \forall z \forall w(\neg Neg(x, y, z, w) \wedge \neg Neg(x, y_1, z_1, w))$ (из (5));

(19) $\forall x \forall y \forall z \forall w(Neg(x, y, z, w) \leftrightarrow Neg(x, y_1, z_1, w))$ (из (18));

(20) $\forall x \forall y(\exists z P(z, x) \to (P(y, x) \wedge \forall z(P(z, x) \to B(z, y, y))))$ (из (9));

(21) $\forall x \forall y(\neg \exists z P(z, x) \to x = y)$ (из (6));

(22) $\forall x \forall y(f(x) = y)$ (из (20), (21) и **d2**);

(23) $\forall x \forall y \forall w(B(w, x, y) \wedge f(x) = w)$ (из (1) и (23));

(24) $\forall x \forall y(X(x) \to (X(x) \wedge x = y))$ (из (6));

(25) $\exists w X(w) \to \exists x \forall y(X(x) \wedge x = y)$ (из (24)).

Осталось лишь заметить, что **A4** и консеквенты **A1–A3**, **A6** следуют из (1), консеквент **A11** — из (2), консеквенты **A12** и **A13** — из (3), отрицание антецедента **A17** — из (4), отрицание антецедента **A18** — из конъюнкции (4) и (5), консеквенты **A5** и **A9** следуют из (6), консеквент **A16** — из (7), консеквенты **A20** и **A21** — из (8). Из (14) следует консеквент **A14**, из (15) — консеквент **A15**, из (17) и (19) — консеквент **A19**, из (23) — консеквент **A10**. **A8** следует из (20). Наконец, аксиома **A7** очевидным образом выводима из (25). Таким образом, из (1)–(8) следуют все формулы **A1–A21**. Поскольку в (1)–(8) отсутствуют свободные переменные, то по правилу Бернайса мы можем вывести из них также универсальные замыкания формул **A1–A21**.

Таким образом, $M_a \models Ax(\Delta)$, следовательно, $M_a \models \Delta$, что и требовалось доказать.

Поскольку Δ непротиворечива, свойство выводимости в Δ не является тривиальным, а значит представляет определенный интерес в качестве объекта исследования. С другой стороны, получение любого нетривиального результата по поводу свойств Δ с необходимостью включает, в качестве подзадачи, вывод в Δ некоторых формул. Поэтому основной задачей настоящей статьи является доказательство в Δ ряда внутренних теорем, открывающих ключ к пониманию общей структуры моделей этой теории.

T1. $\forall xy(P(y, x) \to \exists! z(P(z, x) \wedge \forall w(P(w, x) \to B(w, z, z))))$.

1. $(P(z_1, x) \wedge \forall w(P(w, x) \to B(w, z, z))) \to B(z_1, z, z)$ — Taut;
2. $(P(z, x) \wedge \forall w(P(w, x) \to B(w, z_1, z_1))) \to B(z, z_1, z_1)$ — Taut;
3. $[P(z_1, x) \wedge \forall w(P(w, x) \to B(w, z, z)) \wedge P(z, x) \wedge \forall w(P(w, x) \to B(w, z_1, z_1))] \to$ $\to (B(z_1, z, z) \wedge B(z, z_1, z_1))$ — из 1, 2;
4. $[P(z_1, x) \wedge \forall w(P(w, x) \to B(w, z, z)) \wedge P(z, x) \wedge \forall w(P(w, x) \to B(w, z_1, z_1))] \to$ $\to z_1 = z$ — из 3, **A5**;
5. $P(y, x) \to \exists! z(P(z, x) \wedge \forall w(P(w, x) \to B(w, z, z)))$ — из 4, **A8**.

Из **T1** следует, что бинарный предикат $f(x) = y$, введенный в **d2**, определяет в любой модели Δ некоторую функцию, что позволяет нам использовать далее записи вида $f(x)$ в качестве термов рассматриваемого языка. С учетом этого нового соглашения, например, **A10** может быть сформулирована в следующей эквивалентной (и более короткой) форме:

A10′ $B(z, x, y) \to B(f(x), x, y)$.

T2. $\forall xyz((B(y, x, x) \wedge B(z, x, x)) \to (B(y, z, z) \vee B(z, y, y)))$.

1. $(P(y, x) \wedge P(z, x)) \to \exists w(P(w, x) \wedge \forall w_1(P(w_1, x) \to B(w_1, w, w)))$ — из **A8**;
2. $[P(y, x) \wedge P(z, x) \wedge \exists w(P(w, x) \wedge \forall w_1(P(w_1, x) \to B(w_1, w, w)))] \to$ $\to \exists w(B(y, w, w) \wedge B(z, w, w) \wedge P(w, x))$ — из **d1**;
3. $(P(y, x) \wedge P(z, x)) \to \exists w(B(y, w, w) \wedge B(z, w, w) \wedge P(w, x))$ — из 1, 2;
4. $[B(y, x, x) \wedge B(z, x, x) \wedge \forall w((B(y, w, w) \wedge B(z, w, w) \wedge B(w, x, x)) \to w = x)] \to$ $\to (y = x \vee z = x)$ — из 3, **d1**;
5. $(B(y, x, x) \wedge B(z, x, x)) \to \exists x_1[B(y, x_1, x_1) \wedge B(z, x_1, x_1) \wedge$ $\wedge \forall w((B(y, w, w) \wedge B(z, w, w) \wedge B(w, x_1, x_1)) \to w = x_1)]$ — из **A7**;
6. $(B(y, x, x) \wedge B(z, x, x)) \to \exists x_1(B(y, x_1, x_1) \wedge B(z, x_1, x_1) \wedge (y = x_1 \vee z = x_1))$ — из 4, 5;
7. $(B(y, x_1, x_1) \wedge B(z, x_1, x_1) \wedge (y = x_1 \vee z = x_1)) \to (B(y, z, z) \vee B(z, y, y))$ — Taut;
8. $(B(y, x, x) \wedge B(z, x, x)) \to (B(y, z, z) \vee B(z, y, y))$ — из 6, 7.

T3. $\forall xy(P(x, y) \to B(x, f(y), f(y)))$.

1. $f(y) = f(y)$ — Taut;
2. $f(y) = f(y) \to (\exists wP(w, y) \to \forall x(P(x, y) \to B(x, f(y), f(y))))$ — из **d2**;
3. $\exists wP(w, y) \to \forall x(P(x, y) \to B(x, f(y), f(y)))$ — из 1, 2;
4. $\exists wP(w, y) \to (P(x, y) \to B(x, f(y), f(y)))$ — из 3;
5. $P(x, y) \to (P(x, y) \to B(x, f(y), f(y)))$ — из 4;
6. $P(x, y) \to B(x, f(y), f(y))$ — из 5.

T4. $\forall xy(B(z, x, x) \to f(x) = f(y))$.

1. $(B(z, x, y) \wedge f(x) = y) \to (B(f(x), y, x) \wedge f(x) = y)$ — из **A10′** и **A2**;
2. $(B(f(x), y, x) \wedge f(x) = y) \to f(x) = x$ — из **A9**;
3. $(f(x) = y \wedge f(x) = x) \to x = y$ — Taut;
4. $(B(f(x), y, x) \wedge f(x) = y) \to x = y$ — из 2, 3;
5. $x = y \to f(x) = f(y)$ — Taut;
6. $(B(f(x), y, x) \wedge f(x) = y) \to f(x) = f(y)$ — из 4, 5;
7. $(B(z, x, y) \wedge f(x) = y) \to f(x) = f(y)$ — из 1, 6;
8. $(B(z, x, y) \wedge f(x) \neq f(y)) \to f(x) \neq y$ — из 7;
9. $B(z, x, y) \to B(f(x), y, y)$ — из **A10′**, **A1** и **A2**;
10. $(B(z, x, y) \wedge f(x) \neq f(y)) \to P(f(x), y)$ — из 8, 9 и **d1**;
11. $P(f(x), y) \to B(f(x), f(y), f(y)))$ — из **T3**;

12. $(B(z, x, y) \wedge f(x) \neq f(y)) \to B(f(x), f(y), f(y)))$ — из 10, 11;
13. $(B(z, y, x) \wedge f(x) \neq f(y)) \to B(f(y), f(x), f(x)))$ — из 12;
14. $(B(z, x, y) \wedge f(x) \neq f(y)) \to B(f(y), f(x), f(x)))$ — из 13, **A2**;
15. $(B(f(x), f(y), f(y)) \wedge B(f(y), f(x), f(x))) \to f(x) = f(y)$ — из **A5**;
16. $(B(z, x, y) \wedge f(x) \neq f(y)) \to f(x) = f(y)$ — из 12, 14 и 15.

T5. $\forall xyzw((P(x, y) \wedge B(z, y, w)) \to B(x, y, w))$.

1. $B(z, y, w) \to B(f(y), y, w)$ — из **A10′**;
2. $(B(x, f(y), f(y)) \wedge B(f(y), y, w)) \to B(x, y, w)$ — из **A6**;
3. $(P(x, y) \wedge B(z, y, w)) \to B(x, y, w)$ — из **T3**, 1 и 2.

T6. $\forall xB(f(x), x, x)$.

1. $f(x) = f(x)$ — Taut;
2. $f(x) = f(x) \to ((\exists zP(z, x) \to P(f(x), x)) \wedge (\neg\exists zP(z, x) \to x = y))$ — из **d2**;
3. $(\exists zP(z, x) \to P(f(x), x)) \wedge (\neg\exists zP(z, x) \to x = y)$ — из 1, 2;
4. $P(f(x), x) \to B(f(x), x, x)$ — из **d1**;
5. $x = y \to B(f(x), x, x)$ — из **A4**;
6. $(\exists zP(z, x) \to B(f(x), x, x)) \wedge (\neg\exists zP(z, x) \to B(f(x), x, x))$ — из 4, 5;
7. $B(f(x), x, x)$ — из 6.

T7. $\forall xyz((x \neq y \wedge f(x) = f(y) \wedge P(z, x)) \to \neg B(x, y, y))$.

1. $(B(x, f(y), f(y)) \wedge f(x) = f(y)) \to B(x, f(x), f(x))$ — Taut;
2. $(P(x, y) \wedge f(x) = f(y)) \to B(x, f(x), f(x))$ — из 2, **T3**;
3. $(B(f(x), x, x) \wedge B(x, f(x), f(x))) \to f(x) = x$ — из **A5**;
4. $B(x, f(x), f(x))$ — из **T6**;
5. $B(x, f(x), f(x)) \to f(x) = x$ — из 4, 5;
6. $(P(x, y) \wedge f(x) = f(y)) \to f(x) = x$ — из 3, 6;
7. $f(x) = f(x) \to (\exists zP(z, x) \to P(f(x), x))$ — из **d2**;
8. $P(z, x) \to P(f(x), x)$ — из 8;
9. $P(f(x), x) \to f(x) \neq x$ — из **d1**;
10. $P(z, x) \to f(x) \neq x$ — из 9, 10;
11. $(\neg(P(x, y) \wedge f(x) = f(y) \wedge P(z, x))$ — из 7, 11;
12. $(x \neq y \wedge f(x) = f(y) \wedge P(z, x)) \to \neg B(x, y, y)$ — из 12, **d1**.

T8. $\forall x\forall y\forall z((B(z, x, y) \wedge x \neq y) \to (\neg B(x, y, y) \wedge \neg B(y, x, x)))$.

1. $B(z, x, y) \to f(x) = f(y)$ — из **T4**;
2. $(z = x \wedge B(z, x, y)) \to x = y$ — из **A9**;
3. $(x \neq y \wedge B(z, x, y)) \to z \neq x$ — из 2;
4. $B(z, x, y) \to B(z, x, x)$ — из **A1**;
5. $(x \neq y \wedge B(z, x, y)) \to P(z, x)$ — из 3, 4 и **d1**;
6. $(x \neq y \wedge B(z, x, y)) \to \neg B(x, y, y)$ — из 1, 5 и **T7**;

7. $(x \neq y \wedge B(z, y, x)) \to \neg B(y, x, x)$ — из 6;
8. $(x \neq y \wedge B(z, x, y)) \to \neg B(y, x, x)$ — из 7 и **A2**;
9. $(B(z, x, y) \wedge x \neq y) \to (\neg B(x, y, y) \wedge \neg B(y, x, x))$ — из 6, 8.

T9. $\forall X((\forall x(f(x) = x \to X(x)) \wedge \forall y(X(f(y)) \to X(y))) \to \forall z X(z))$.

В данном доказательстве используем следующее сокращение:

d9. $\Phi(X, y) =_{\text{def}} \neg X(y) \wedge \forall z((\neg X(z) \wedge B(z, y, y)) \to z = y)$.

1. $(\Phi(X, y) \wedge B(f(y), y, y) \wedge f(y) \neq y) \to (X(f(y)) \wedge \neg X(y))$ — Taut;
2. $(\Phi(X, y) \wedge f(y) \neq y) \to (X(f(y)) \wedge \neg X(y))$ — из 1, **T6**;
3. $\exists y(\Phi(X, y) \wedge f(y) \neq y) \to \exists y(X(f(y)) \wedge \neg X(y))$ — из 2;
4. $\exists y(\Phi(X, y) \wedge f(y) = y) \to \exists y(f(y) = y \wedge \neg X(y))$ — Taut;
5. $\exists y \Phi(X, y) \to (\exists y(\Phi(X, y) \wedge f(y) \neq y) \vee \exists y(\Phi(X, y) \wedge f(y) = y))$ — Taut;
6. $\exists y \Phi(X, y) \to (\exists y(X(f(y)) \wedge \neg X(y)) \vee \exists y(f(y) = y \wedge \neg X(y)))$ — из 3–5;
7. $\exists y \neg X(y) \to \exists y \Phi(X, y)$ — из **A7**;
8. $\exists y \neg X(y) \to (\exists y(X(f(y)) \wedge \neg X(y)) \vee \exists y(f(y) = y \wedge \neg X(y)))$ — из 6, 7.

T10. $\forall xyz(f(x) = x \to (B(z, x, y) \to x = y))$.

1. $f(x) = x \to \neg \exists w P(w, x)$ — из **d2**;
2. $f(x) = x \to \forall w(B(w, x, x) \to w = x)$ — из 1, **d1**;
3. $B(z, x, y) \to B(z, x, x)$ — из **A1**;
4. $(f(x) = x \wedge B(z, x, y)) \to z = x$ — из 2, 3;
5. $(z = x \wedge B(z, x, y)) \to B(x, x, y)$ — Taut;
6. $(z = x \wedge B(z, x, y)) \to x = y$ — из 5, **A9**;
7. $(f(x) = x \wedge B(z, x, y)) \to x = y$ — из 4, 6.

Сделаем здесь паузу и попробуем понять, о чем же нам говорят уже выведенные теоремы. **T2** говорит о том, что отношение $B(x, y, y)$, которое, согласно **A4–A7**, является отношением фундированного частичного порядка, является «древовидным», причем имеет ветвление «вперед». Отношение $P(x, y)$ представляет собой, в силу **d1**, ассоциированное с $B(x, y, y)$ отношение строгого порядка. С отношением $P(x, y)$ связана функция $f(x)$, которая, при наличии у данного a собственных предшественников по отношению $B(x, y, y)$, сопоставляет ему наибольшего такого предшественника, в противном случае сопоставляет данному a само же a. Это дает нам основание называть элемент $f(a)$ наибольшим предшественником a по отношению $B(x, y, y)$. **T3** делает довольно очевидное утверждение о том, что любой собственный предшественник любого данного элемента модели является предшественником (но не обязательно собственным) наибольшего предшественника этого элемента. **T6**, в свою очередь, говорит о том, что наибольший предшественник любого данного элемента предшествует этому элементу. Особенно важное значение имеет теорема **T9**, которая позволяет доказывать утверждения обо всей совокупности элементов любой данной модели Δ по индукции, где базой выступает совокупность элементов модели, у которых отсутствуют собственные предшественники по отношению

$B(x, y, y)$, а индукционным шагом — переход от наибольшего предшественника произвольного элемента к самому этому элементу[2].

T4 указывает на важное свойство отношения $\exists zB(z, x, y)$, которое, в силу **A1–A3**, представляет собой отношение эквивалентности. Согласно **T4** наибольшие предшественники любых двух связанных этим отношением элементов совпадают. **T8**, в свою очередь, утверждает, что любые два различных элемента любого класса эквивалентности по отношению $\exists zB(z, x, y)$ несравнимы между собой в смысле порядка $B(x, y, y)$. **T10** говорит о том, что класс эквивалентности по $\exists zB(z, x, y)$ любого элемента, у которого отсутствуют собственные предшественники по отношению $B(x, y, y)$, состоит из одного этого элемента.

Перейдем к доказательству теорем, выявляющих свойства предиката Ag и производных от него предикатов.

T11. $\forall xAG(x, x)$.

T12. $\forall x\forall y\forall z((AG(x, y) \wedge AG(y, z)) \rightarrow AG(x, z))$.

T13. $\forall x\forall y\forall y_1((Ex(x, y) \wedge AG(y_1, y) \wedge Ag(y_1, y_1)) \rightarrow Ex(x, y_1))$.

Теоремы **T11–T13**, строго говоря, не нуждаются в доказательстве: при замене в них производных предикатов в соответствии с **d3** и **d6** они превращаются в теоремы первопорядковой логики.

T14. $\forall x\forall y((Ag(y, y) \wedge AG(y, x)) \rightarrow Ex(x, y))$.

1. $AG(y, x) \rightarrow (B(x, x, x) \wedge AG(y, x))$ — из **A4**;
2. $AG(y, x) \rightarrow \exists z\exists w(B(z, w, x) \wedge AG(y, w))$ — из 1;
3. $(Ag(y, y) \wedge AG(y, x)) \rightarrow Ex(x, y)$ — из 2, **d6**.

T15. $\forall x\forall y(f(x) = x \rightarrow ((Ag(y, y) \wedge AG(y, x)) \leftrightarrow Ex(x, y)))$.

1. $Ex(x, y) \rightarrow Ag(y, y)$ — из **d6**;
2. $(f(x) = x \wedge Ex(x, y)) \rightarrow (\forall zw(B(z, x, w) \rightarrow x = w) \wedge \exists zw(B(z, w, x) \wedge$ $\wedge AG(y, w)))$ — из **T10**, **d6**;
3. $(f(x) = x \wedge Ex(x, y)) \rightarrow (\forall zw(B(z, w, x) \rightarrow x = w) \wedge \exists zw(B(z, w, x) \wedge$ $\wedge AG(y, w)))$ — из 2, **A2**;
4. $(\forall zw(B(z, w, x) \rightarrow x = w) \wedge \exists zw(B(z, w, x) \wedge AG(y, w))) \rightarrow$ $\rightarrow \exists zw(B(z, w, x) \wedge x = w \wedge AG(y, w))$ — Taut;
5. $\exists zw(B(z, w, x) \wedge x = w \wedge AG(y, w)) \rightarrow AG(y, x)$ — Taut;
6. $(f(x) = x \wedge Ex(x, y)) \rightarrow AG(y, x)$ — из 3–5;
7. $f(x) = x \rightarrow (Ex(x, y) \rightarrow (Ag(y, y) \wedge AG(y, x)))$ — из 1, 6;
8. $f(x) = x \rightarrow ((Ag(y, y) \wedge AG(y, x)) \leftrightarrow Ex(x, y))$ — из 7, **T14**.

T16. $\forall xy((x \equiv y \wedge Ag(x, x)) \rightarrow Ag(y, y))$.

1. $x \equiv y \rightarrow \forall z(Ag(z, y) \rightarrow Ag(z, x))$ — из **d3**, **d4**;

---

[2] С **T9** связана теорема о том, что порядковый тип любой ветви (т. е. линейно упорядоченного отношением $B(x, y, y)$ множества элементов) того дерева, в которое упорядочивает любую данную модель Δ отношение $B(x, y, y)$, не превосходит ω. К сожалению, доказательство этой, последней теоремы выходит за пределы настоящей статьи.

2. $x \equiv y \to (Ag(x, x) \to Ag(x, y))$ — из 1;
3. $(x \equiv y \wedge Ag(x, x)) \to Ag(x, y)$ — из 2;
4. $Ag(x, y) \to Ag(y, y)$ — из **A13**;
5. $(x \equiv y \wedge Ag(x, x)) \to Ag(y, y)$ — из 3, 4.

T17. $\forall xyy_1(y \in y_1 \to (Ex(x, y) \leftrightarrow Ex(x, y_1)))$.

1. $Ex(x, y) \to Ag(y, y)$ — из **d6**;
2. $(y \equiv y_1 \wedge Ex(x, y)) \to Ag(y_1, y_1)$ — из 1, **T16**;
3. $y \equiv y_1 \to AG(y_1, y)$ — из **d4**;
4. $(y \equiv y_1 \wedge Ex(x, y)) \to (Ag(y_1, y_1) \wedge AG(y_1, y))$ — из 2, 3;
5. $(Ex(x, y) \wedge AG(y, y_1) \wedge Ag(y_1, y_1)) \to Ex(x, y_1)$ — из **T13**;
6. $(y \equiv y_1 \wedge Ex(x, y)) \to Ex(x, y_1)$ — из 4, 5;
7. $(y_1 \equiv y \wedge Ex(x, y_1)) \to Ex(x, y)$ — из 6;
8. $(y \equiv y_1 \wedge Ex(x, y_1)) \to Ex(x, y)$ — из 7, **d4**;
9. $y \equiv y_1 \to (Ex(x, y) \leftrightarrow Ex(x, y_1))$ — из 6, 8.

T18. $\forall xyzw((Ex(x, y) \wedge B(z, x, w)) \to Ex(w, y))$.

1. $Ex(x, y)$ — посылка;
2. $B(z, x, w)$ — посылка;
3. $Ag(y, y)$ — из 1, **d6**;
4. $\exists z_1 w_1(B(z_1, w_1, x) \wedge AG(y, w_1))$ — из 1, **d6**;
5. $\exists z_1 w_1(B(z_1, x, w_1) \wedge AG(y, w_1))$ — из 4, **A2**;
6. $\exists w_1(B(f(x), x, w_1) \wedge AG(y, w_1))$ — из 5, **A10′**;
7. $\exists w_1(B(f(x), w_1, x) \wedge AG(y, w_1))$ — из 1, **A2**;
8. $B(f(x), x, w)$ — из 2, **A10′**;
9. $\exists w_1(B(f(x), w_1, x) \wedge B(f(x), x, w) \wedge AG(y, w_1))$ — из 7, 8;
10. $\exists w_1(B(f(x), w_1, w) \wedge AG(y, w_1))$ — из 9, **A3**;
11. $Ex(w, y)$ — из 3, 10, **d6**.

Из теорем **T11–T12** мы видим, что отношение $AG(x, y)$ является рефлексивным и симметричным, таким образом, отношение $x \equiv y$ оказывается, в силу **d4**, ассоциированным с $AG(x, y)$ отношением эквивалентности. **T17** и **T18** утверждают взаимозаменимость в контекстах вида $Ex(x, y)$ элементов, связанных различными отношениями эквивалентности: отношением $\exists zB(z, x, y)$ для левого и отношением $x \equiv y$ для правого аргумента данного контекста. **T15** говорит о том, что для элементов, не имеющих собственных предшественников по отношению $B(x, y, y)$, можно заменить определение предиката $Ex(x, y)$, данное в **d6**, более простым определением $Ag(y, y) \wedge AG(y, x)$.

В завершение настоящей статьи сформулируем и докажем еще две теоремы Δ, иллюстрирующие некоторые свойства (антисимметричность и транзитивность) отношения, индуцированного порядком $B(x, y, y)$ на фактор-множестве основного множества данной модели Δ по отношению $\exists zB(z, x, y)$.

T19. $\forall xyzwx_1((B(x, y, y) \wedge B(z, y, w) \wedge B(w, x_1, x_1)) \to B(x, x_1, x_1))$.

T20. $\forall xyzwx_1z_1((B(x, y, y) \wedge B(z, y, w) \wedge B(z_1, x, x_1) \wedge B(w, x_1, x_1)) \to x = y)$.

Рассмотрим следующий вывод:

1. $B(x, y, y)$ — посылка;
2. $B(z, y, w)$ — посылка;
3. $B(z_1, x, x_1)$ — посылка;
4. $B(w, x_1, x_1)$ — посылка;
5. $B(x, y, w)$ — из 1, 2, **A6**;
6. $B(x, w, w)$ — из 5, **A2**, **A1**;
7. $B(x, x_1, x_1)$ — из 4, 6, **A6**;
8. $x = x_1$ — из 3, 7, **T8**;
9. $B(w, x, x)$ — из 4, 8;
10. $x = w$ — из 6, 9, **A5**;
11. $B(z, y, x)$ — из 2, 10;
12. $x = y$ — из 1, 11, **T8**.

Доказательство **T20** получается применением теоремы дедукции к этому выводу. Для доказательства **T19** эта теорема должна быть применена к пп. 1–2, 4–7 того же вывода.

---

1. *Ольховиков Г. К.* Теория Δ: философские основания аксиоматизации // Полигнозис. 2010. № 3.

2. *Shapiro S.* Foundations without Foundationalism. 2nd ed. OUP, 2002.

Рукопись поступила в редакцию 19 мая 2010 г.