Федеральное агентство по образованию
Государственное образовательное учреждение
высшего профессионального образования
«Уральский государственный университет им. А. М. Горького»

ИОНЦ «Информационная безопасность»

Математико-механический факультет

Кафедра алгебры и дискретной математики

УЧЕБНО-МЕТОДИЧЕСКИЙ КОМПЛЕКС

**Математическая логика и
теория алгоритмов**

Программа дисциплины

Автор: доцент кафедры алгебры
и дискретной математики
А. П. Замятин

Екатеринбург
2008

ФЕДЕРАЛЬНОЕ АГЕНТСТВО ПО ОБРАЗОВАНИЮ

Государственное образовательное учреждение
высшего профессионального образования
«Уральский государственный университет им. А.М.Горького»

Математико-механический факультет

Кафедра алгебры и дискретной математики

МАТЕМАТИЧЕСКАЯ ЛОГИКА
И ТЕОРИЯ АЛГОРИТМОВ

Программа дисциплины

Екатеринбург
2008

УТВЕРЖДАЮ
Декан мат.-мех факультета
___________М. О. Асанов
«   »_________2008

Программа дисциплины «Математическая логика и теория алгоритмов» составлена в соответствии с требованиями федерального компонента к обязательному минимуму содержания и уровню подготовки

Дипломированного специалиста по специальности «Компьютерная безопасность» 090102

по циклу «Дисциплины специализаций» государственного образовательного стандарта высшего профессионального образования.

Семестры 7 и 8

Общая трудоемкость дисциплины 216 часов, в том числе
лекций 72 часа,
практических занятий 72 часа

Контрольные мероприятия
зачет, экзамен

Разработчик программы Замятин Алексей Петрович, кандидат физ.-мат. наук, доцент.

Рекомендовано к печати
кафедрой алгебры и дискретной математики,
протокол №   от «   »   2008.

Согласовано на заседании
естественно-научного совета
Зам. председателя естественно-научного совета М.О.Асанов
_____________ «   »   2008.

1. Введение

1.1. Цель дисциплины – изучить семантику логики предикатов и один из вариантов исчисления предикатов гильбертовского типа; освоить формализацию понятия алгоритм как машины Тьюринга и на этой основе изучить основные положения теории сложности вычислений.

1.2. Задачи дисциплины:

– освоить способы преобразования формул логики предикатов;

– освоить выразительные возможности языка логики предикатов;

– изучить теоретические положения метода резолюций и освоить применение метода при доказательстве логичности;

– изучить методологию построения логических исчислений на примере исчисления предикатов;

– освоить методы доказательства полноты классов функций многозначной логики;

– изучить формализацию понятия алгоритм на примере машины Тьюринга, иметь представление об алгоритмически неразрешимых проблемах;

– изучить основные понятия, связанные с оценкой сложности вычислений, освоить проблематику *NP*-полноты.

1.3 . Перечень дисциплин, усвоение которых необходимо для данной дисциплины: дискретная математика, информатика, дискретная оптимизация.

1.4. Требования к уровню освоения содержания курса:

1. Освоить основные понятия семантики логики предикатов: равносильность, логическое следствие, выполнимость.
2. Изучить законы логики высказываний и логики предикатов. Уметь применять их для доказательства равносильности формул.
3. Освоить алгоритмы приведения к нормальным формам (ДНФ, СДНФ, КНФ, СНФ).
4. Уметь переводить выражения, сформулированные на обычном математическом языке, на язык логики предикатов.
5. Изучить аксиоматизацию логики предикатов и основные теоремы: о дедукции, о непротиворечивости, о полноте. Уметь строить выводы и доказательства формул.
6. Иметь представление о способах доказательства независимости аксиом в исчислении высказываний.
7. Изучить основные понятия и теоремы метода резолюций в логике предикатов. Уметь применять метод для доказательства логичности рассуждений.
8. Понимать роль метода резолюций в логическом программировании.
9. Освоить понятие машины Тьюринга. Уметь писать программу машины для решения несложных задач.
10. Освоить понятие машины универсальной Тьюринга. Знать примеры алгоритмически неразрешимых проблем.

11. Иметь представление о других вариантах формализации понятия алгоритм: рекурсивные функции, алгоритмы Маркова.

12. Освоить понятие временной сложности машины Тьюринга в детерминированном и недетерминированном случаях. Знать примеры задач из классов ***P***-*time* и ***NP***-*time*. Понимать содержание проблемы ***P*** = ***NP***.

13. Изучить понятие полиномиальной сводимости задач. Уметь доказывать полиномиальную сводимость одной задачи к другой в несложных случаях.

14. Освоить понятие *NP*-полноты. Знать примеры *NP*-полных задач.

15. Иметь представление о приближенных алгоритмах решения комбинаторных задач.

1.5. Методическая новизна курса – предполагается использование традиционной методики.

2. Содержание курса

2.1. Наименование разделов курса, их краткое содержание.

Глава 1. Логика высказываний.

Высказывания и операции над ними, формулы логики высказываний. Основные понятия семантики логики высказываний: равносильность, логическое следствие, выполнимость. Законы логики высказываний. Дизъюнктивная и конъюнктивная нормальные формы. Применение к контактным схемам.

Глава 2. Логика предикатов.

Предикаты и операции над ними. Формулы логики предикатов, свободные переменные, интерпретация. Основные понятия семантики логики предикатов: равносильность, логическое следствие, выполнимость. Законы логики предикатов. Сколемовская нормальная форма. Невыразимость в логике предикатов. Многосортная логика предикатов и теория баз данных.

Глава 3. Исчисление предикатов.

Аксиоматизация логики предикатов гильбертовского типа. Основные теоремы исчисления: о дедукции, о непротиворечивости, о полноте. Независимость схем аксиом исчисления высказываний. Другие варианты аксиоматизации логики высказываний.

Глава 4. Метод резолюций.

Основные понятия метода резолюций: подстановка, унификация, правило резолюций, вывод. Универсум Эрбрана и семантические деревья, полнота метода резолюций. Применение метода резолюций для доказательства логичности рассуждений. Метод резолюций и логическое программирование.

Глава 5. Функции k-значной логики.

Булевы функции, способы задания булевых функций. Замкнутость и полнота классов булевых функций, примеры полных классов. Основные замкнутые классы булевых функций. Теорема Поста, предполные классы булевых функций. Функции k-значной логики, примеры. Полные классы функций k-значной логики, примеры. Классы сохранения отношений. Теорема Розенберга, предполные классы функций k-значной логики.

Глава 6. Алгоритмы и машины Тьюринга.

Понятие машины Тьюринга, примеры. Функции, вычислимые на машинах Тьюринга. Универсальные машины, алгоритмически неразрешимые проблемы. Рекурсивные и рекурсивно перечислимые множества. Другие варианты формализации понятия алгоритм: рекурсивные функции и алгоритмы Маркова.

Глава 7. Сложность вычислений.

Задачи и языки. Временная сложность детерминированной машины Тьюринга, класс ***P***-*time*. Полиномиальная сводимость задач, примеры. Недетерминированные машины Тьюринга, их временная сложность, класс ***NP***-*time*. Проблема ***P*** = ***NP***? *NP*-полнота задач, примеры. Приближенные алгоритмы решения комбинаторных задач.

2.2. Темы практических занятий.

1. Равносильность формул логики высказываний. Доказательство равносильности построением таблиц истинности и с помощью законов логики высказываний.
2. Перевод предложений естественного языка на язык логики высказываний. Проверка рассуждений на логичность.
3. Нормальные формы в логике высказываний.
4. Логика высказываний и контактные схемы.
5. Равносильность формул логики предикатов. Доказательство равносильности с помощью законов логики предикатов.
6. Перевод предложений естественного языка на язык логики предикатов. Проверка рассуждений на логичность.
7. Нормальные формы в логике предикатов.
8. Многосортная логика предикатов и теория баз данных.
9. Построение выводов и доказательств в исчислении предикатов (аксиоматика Мендельсона).
10. Построение выводов и доказательств в других исчислениях высказываний (аксиоматики Гильберта и Аккермана, Россера, Клини).
11. Независимость схем аксиом исчисления высказываний.
12. Метод резолюций в логике высказываний.
13. Метод резолюций в логике предикатов.
14. Универсум Эрбрана и семантические деревья.
15. Стратегии метода резолюций.
16. Метод резолюций и логическое программирование.
17. Основные замкнутые классы булевых функций.
18. Критерий Поста полноты классов булевых функций.
19. Полные классы функций k-значной логики.

20. Классы сохранения отношений.

21. Критерий Розенберга полноты классов функций k-значной логики.

22. Понятие машины Тьюринга. Задание таблицей и диаграммой.

23. Функции, вычислимые на машинах Тьюринга.

24. Алгоритмически неразрешимые проблемы.

25. Рекурсивные функции.

26. Алгоритмы Маркова.

27. Задачи и языки, варианты кодировок.

28. Полиномиальные детерминированные машины Тьюринга. Класс ***P**-time*.

29. Полиномиальные недетерминированные машины Тьюринга. Класс **NP**-*time*.

30. Полиномиальная сводимость задач. *NP*-полнота.

2.3. Перечень заданий для самостоятельной работы.

1. Выделить законы логики высказываний, наиболее часто используемые при доказательстве равносильности двух формул. Показать их применение на ряде примеров.

2. Доказать самостоятельно теорему о взаимосвязи логического следствия и выполнимости. Решить задачи 2.1 – 2.3 на анализ логичности рассуждений.

3. Придумать способ построения КНФ по таблице истинности формулы. Решить те задачи из 11а – 13г, которые не решены на практическом занятии.

4. Придумать определение формулы логики предикатов, исключающее коллизию переменных в формуле (коллизия – использование в качестве свободной и связанной одной и той же переменной).

5. Повторить определение интерпретации в логике предикатов. Решить задачи 9 – 11.

6. Доказать один из законов 26 – 33 логики предикатов. Решить те задачи из 13а – 13г, которые не решены на практическом занятии.

7. Просмотреть доказательство теоремы о приведении к сколемовской нормальной форме (теорема 3.4). Используя алгоритм приведения к СНФ, решить задачи 15г – 15е.

8. Изучить доказательство теоремы о невыразимости транзитивного замыкания (теорема 3.15). Придумать естественные примеры других предикатов, невыразимых в логике предикатов.

9. Выразить запросы из задачи 19 на языке логики предикатов и на языке SQL. Сравнить полученные выражения.

10. Повторить определение выводимости и доказуемости в исчислении предикатов. Решить задачи 1 – 7, не решенные на практических занятиях.

11. Изучить доказательство теоремы о дедукции. На ряде примеров показать, как с помощью теоремы о дедукции упрощается построение выводов и доказательств.

12. Изучить доказательство теоремы о непротиворечивости и предшествующих лемм.

13. Изучить доказательство теорем о полноте и о компактности.

14. Просмотреть доказательство теорем о независимости схем аксиом. Придумать другие варианты интерпретации отрицания и импликации на трехэлементном множестве, ведущие к независимости схем аксиом.

15. Повторить определение выводимости в методе резолюций для логики высказываний. Изучить доказательство теоремы о полноте метода (теорема 4.1). Решить те задачи из 2.1 – 2.5, которые не решены на практических занятиях.

16. Изучить алгоритм унификации и доказательство теоремы 4.2.

17. Повторить определение выводимости в методе резолюций для логики предикатов. Решить те задачи из 10а – 11.4, которые не решены на практических занятиях.

18. Изучить понятие эрбрановского универсума и доказательство теоремы 4.5.

19. Изучить понятие семантического дерева и доказательство теоремы Эрбрана.

20. Изучить доказательство теоремы о полноте метода резолюций в логике предикатов.

21. Изучить взаимосвязь метода резолюций и процедурной семантики языка Пролог.

22. Повторить методы доказательства самодвойственности, монотонности и линейности функций. Решить те из задач 6 – 12, которые не решены на практических занятиях.

23. Освоить методы доказательства полноты классов булевых функций (сведением к известным полным классам и с помощью теоремы Поста). Решит задачи 15а – 15з.

24. Освоить построение сокращенной ДНФ тремя способами: с помощью преобразований неполного склеивания и поглощения, по карте Карно, по геометрическому изображению. Решить задачи 17 – 19.

25. Освоить способ нахождения тупиковых и минимальных ДНФ. Решить те из задач 20 – 25, которые не решены на практических занятиях.

26. Изучить понятие класса сохранения отношения. Уметь доказывать неполноту данного класса функций построением отношения, сохраняемого всеми функциями этого класса.

27. Проработать доказательство полноты классов функций, приведенных в § 11 главы 5. Уметь доказывать полноту класса функций сведением к известным полным классам. Решить те из задач 26.1 – 26.8, которые не решены на практических занятиях.

28. Освоить способ доказательства полноты классов функций, основанный на критерии Розенберга. Решить те из задач 27 – 29, которые не решены на практических занятиях.

29. Изучить примеры машин Тьюринга, приведенные в § 2 главы 6.

30. Показать, что функции $x - y$ и $x \cdot y$ правильно вычислимы.

31. Изучить способ построения универсальной машины Тьюринга.

32. Изучить доказательство теоремы о неразрешимости проблемы остановки. Доказать неразрешимость проблемы печати.

33. Повторить определения рекурсивного и рекурсивно перечислимого множеств. Изучить доказательства теорем о рекурсивной перечислимости рекурсивного множества и о существовании рекурсивно перечислимого множества, которое не является рекурсивным.

34. Освоить понятие рекурсивной и примитивно рекурсивной функций. Решить задачи 11а – 11е.

35. Освоить понятие нормального алгоритма Маркова. Решить задачи 12 – 14.

36. Для некоторых задач из § 1 главы 7 привести несколько вариантов кодировок, сводящих эти задачи к соответствующим языкам.

37. Освоить понятие временной сложности детерминированной машины Тьюринга. Уметь приводить примеры задач из класса ***P**-time*.

38. Изучить доказательство теорем о полиномиальной сводимости из § 4 главы 7.

39. Освоить понятие недетерминированной машины Тьюринга и временной сложности такой машины. Для задач из § 1 главы 7 уметь доказывать их принадлежность классу ***NP**-time*.

40. Изучить понятие *NP*-полноты и доказательство теоремы Кука.

41. Освоить понятие оптимизационной массовой задачи и приближенного и точного решения такой задачи. Уметь приводить соответствующие примеры для оптимизационных задач из § 1 главы 7.

42. Изучить доказательство теорем из § 7 о существовании полиномиальных приближенных алгоритмов решения некоторых задач.

2.4. Рефераты и курсовые работы не предусмотрены.

2.5. Примерный перечень вопросов к экзамену.

1. Высказывания и операции над ними. Формулы логики высказываний.
2. Равносильность и тождественная истинность в логике высказываний. Основные законы логики высказываний.
3. Логическое следствие и выполнимость в логике высказываний.
4. Дизъюнктивная и конъюнктивная нормальные формы. Алгоритмы приведения к ДНФ и КНФ.
5. Совершенная дизъюнктивная нормальная форма. Алгоритм приведения к СДНФ.
6. Логика высказываний и контактные схемы.
7. Предикаты и операции над ними.
8. Формулы логики предикатов, интерпретация.
9. Равносильность и тождественная истинность в логике предикатов. Основные законы логики предикатов.
10. Логическое следствие и выполнимость в логике предикатов.
11. Сколемовская нормальная форма. Алгоритм приведения к СНФ.
12. Невыразимость в логике предикатов.
13. Аксиомы и правила вывода для логики предикатов.

14. Теорема о дедукции.
15. Теорема об оправданности аксиоматизации.
16. Теорема о непротиворечивости (леммы).
17. Теорема о непротиворечивости (доказательство теоремы).
18. Теоремы о полноте и о компактности.
19. Независимость схем аксиом в исчислении высказываний.
20. Метод резолюций в логике высказываний.
21. Подстановка и унификация.
22. Метод резолюций в логике предикатов.
23. Эрбрановский универсум множества дизъюнктов.
24. Семантические деревья, теорема Эрбрана.
25. Полнота метода резолюций в логике предикатов.
26. Метод резолюций и логическое программирование.
27. Стратегии в методе резолюций.
28. Основные замкнутые классы булевых функций.
29. Теорема Поста, предполные классы булевых функций.
30. Полные классы функций k-значной логики.
31. Классы сохранения отношений.
32. Критерий Розенберга.
33. Понятие машины Тьюринга, примеры.
34. Функции, вычислимые на машинах Тьюринга, Теорема о вычислимости суперпозиции.
35. Функции, вычислимые на машинах Тьюринга, Теорема о вычислимости ветвления.
36. Универсальные машины Тьюринга.
37. Алгоритмически неразрешимые проблемы.
38. Рекурсивные и рекурсивно перечислимые множества. Теорема о рекурсивной перечислимости рекурсивного множества.
39. Рекурсивные и рекурсивно перечислимые множества. Существование рекурсивно перечислимого множества, не являющегося рекурсивным.
40. Рекурсивные функции и алгоритмы Маркова.
41. Задачи и языки, варианты кодировки.
42. Временная сложность детерминированных машин Тьюринга. Класс ***P***-*time*.
43. Полиномиальная сводимость задач. Сводимость задачи «выполнимость» к задаче «полное множество».
44. Полиномиальная сводимость задач. Сводимость задачи «полное множество» к задаче «вершинное покрытие».
45. Полиномиальная сводимость задач. Сводимость задачи «вершинное покрытие» к задаче «гамильтонов контур».
46. Полиномиальная сводимость задач. Сводимость задачи «гамильтонов контур» к задаче «гамильтонов цикл».
47. Полиномиальная сводимость задач. Сводимость задачи «выполнимость» к задаче «3-выполнимость».

48. Полиномиальная сводимость задач. Сводимость задачи «3-выполнимость» к задаче «раскраска».

49. Недетерминированные машины Тьюринга, класс ***NP***-*time*. Проблема ***P*** = ***NP***?

50. Понятие *NP*-полноты. *NP*-полнота задачи «выполнимость».

51. Приближенные алгоритмы. Приближенные полиномиальные алгоритмы для задачи коммивояжера.

52. Существование приближенных полиномиальных приближенных алгоритмов в предположении ***P*** ≠ ***NP***.

3. Распределение часов курса по темам и видам работ

	Наименование разделов	Лекц.	Практ. занятия	Самост. работа	Итого по разделам
1.	Логика высказываний	6	6	6	18
2.	Логика предикатов	10	12	12	34
3.	Исчисление предикатов	10	8	8	26
4.	Метод резолюций	10	10	10	30
5.	Функции k-значной логики	14	14	14	42
6.	Алгоритмы и машины Тьюринга	12	12	12	36
7.	Сложность алгоритмов	10	10	10	30
	Всего	72	72	72	216

4. Форма итогового контроля

Устный экзамен по билетам.

5. Учебно-методическое обеспечение курса

5.1. Рекомендуемая литература (основная)

1. Ахо А., Хопкрофт Дж., Ульман Дж. Построение и анализ вычислительных алгоритмов. – М.: «Мир», 1979.

2. Гэри М., Джонсон Д. Вычислительные машины и трудно решаемые задачи. М.: «Мир», 1982.

3. Замятин А. П. Математическая логика. – Екатеринбург: Изд-во Урал. ун-та, 2004.

4. Линдон Р. Заметки по логике. М.: «Мир», 1968.

5. Мальцев А. И. Алгоритмы и рекурсивные функции. – М.: «Наука», 1986.

6. Мендельсон Э. Введение в математическую логику. – М.: «Наука», 1984.

7. Чень Ч., Ли Р. Математическая логика и автоматическое доказательство теорем. – М.: «Наука». 1983.

8. Яблонский С. В. Введение в дискретную математику. – М.: «Наука», 1986.

5.2. Рекомендуемая литература (дополнительная)

1. Асанов М. О., Баранский В. А., Расин В. В. Дискретная математика: графы, матроиды, алгоритмы. – М.: «РХВ», 2001.

2. Ершов Ю. Л., Палютин Е. А. Математическая логика. – СПб: «Лань», 2005.

3. Игошин В. И. Математическая логика и теория алгоритмов. – М.: «Академия», 2004.

4. Клини С. Математическая логика. – М.: «Мир», 1973.

5 Кузнецов О. П., Адельсон-Вельский Г. М. – Дискретная математика для инженера.

6. Марков А. А., Нагорный Н. М. Теория алгорифмов. – М.: «Наука», 1984.

7. Новиков П. С. Элементы математической логики. – М.: «Наука», 1973.

8. Судоплатов С. В., Овчинникова Е. В. Математическая логика и теория алгоритмов. – М.: «ИНФРА-М», 2004.

6. Ресурсное обеспечение – не требуется.