**ФЕДЕРАЛЬНОЕ АГЕНТСТВО ПО ОБРАЗОВАНИЮ**

Государственное образовательное учреждение высшего профессионального образования «Уральский государственный университет им. А.М. Горького»

Физический факультет

Кафедра общей и молекулярной физики

# Термодинамика нелинейных биологических процессов. Переход к хаосу

## МЕТОДИЧЕСКИЕ УКАЗАНИЯ

**Екатеринбург**

**2008**

**МЕТОДИЧЕСКИЕ УКАЗАНИЯ**
по решению задач к учебному пособию
«Термодинамика нелинейных биологических систем. Переход к хаосу»

Приведены методические указания по решению как качественных, так и количественных приводимых в учебном пособии. Задачи к главе 1 являются качественными задачами, для остальных глав количественными.

Количественные задачи предполагают использование стандартного программного продукта Mathcad. Освоение программного продукта осуществляется по мере решения каждой последующей задачи. В задачу авторов входило нахождение алгоритмов численных решений нелинейных задач.

Для каждой сформулированной задачи приводится алгоритм решения и результаты численных расчетов. Дается графическая интерпретация полученных решений, и делаются выводы по содержанию каждой задачи.

Студент должен посмотреть зависимость решений от различных значений управляющих параметров. Все результаты он должен уметь представлять в графической форме.

## Задачи к главе 1

Одной из наиболее привлекательных черт термодинамического метода всегда была возможность получения глубоких по содержанию следствий на основе небольшого числа первичных принципов. В предлагаемых задачах все эти следствия имеют четкую формулировку и доказываются.

***Задача 1.1***. Докажите, что реальные процессы при фиксированных граничных условиях протекают в направлении уменьшения свободной энергии $F$ до тех пор, пока свободная энергия не достигнет минимума в устойчивом равновесном состоянии.

***Задача 1.2.*** Переходя к дифференциалам, вводя термодинамический потенциал внешней среды $\Lambda_e$ , а также $\Lambda^F=F-F_0$ – термодинамический потенциал неравновесной системы, докажите результат, полученный А.Б. Рубиным $Td_iS=-d(\Lambda^F+\Lambda_e)$ (записан в наших обозначениях).

***Задача 1.3.*** Покажите, что скорость продуцирования энтропии, или диссипации энергии согласно (1.18), в единицу времени равна [11]

$$\beta = T\frac{d_i S}{dt} = -\frac{\Delta\Lambda_e}{\tau_0}.$$

***Задача 1.4.*** Докажите, что если имеются две системы, для которых $\Delta\Lambda_1^* = \Delta\Lambda_2^*$, то из (1.19) при $\tau_1 < \tau_2$ следует что $\beta_1 \succ \beta_2$, т.е. скорость диссипации энергии в первом цикле больше, чем во втором, при том же значении совершенной работы. (задача Т. Мицунойя (1959) [11]).

***Задача 1.5.*** Покажите, что уменьшение энтропии для открытой системы является неустойчивым по Ляпунову процессом, т.е. оно не выполняется на бесконечном интервале времени.

***Задача 1.6.*** Докажите, что приращение энтропии при неравновесном процессе больше, чем при равновесном

$$T\frac{dS}{dt} \geq \frac{dU_0}{dt} + P\frac{dV}{dt}.$$

## Задачи к главе 2

***Задача 2.1.*** Используя литературу, опишите катастрофу складки, подразумевая, выполнимость следующей модели:

$$\frac{dx}{dt} = -\frac{\partial G}{dt}, \qquad G(x,a) = \frac{1}{3}x^3 + ax.$$

Определите устойчивость состояния системы. Дайте графическую и физическую интерпретацию функции $G(x,a)$.

***Задача 2.2.*** Покажите, что коэффициент эффективности энергетических/энтропийных превращений для нелинейных процессов может быть определен по уравнению

$$\phi = -\frac{cy - c_1(cy)^2 + c_2(cy)^3 - b_1}{1/cy - b_2}.$$

***Задача 2.3.*** Покажите, что в стационарном состоянии величина $\chi_{st}$ связана с коэффициентом энергетических превращений $\phi$: $\infty > \chi_{st} = 1/\phi \geq 1$, $0<\phi\leq 1$.

***Задача 2.4.*** Определите решения для уравнения $d\eta / dt = -\left(\eta^3 + a^*\eta + b^*\right)$, задав параметры и начальное условие. Введите шум, изменяющийся по гармоническому закону. Постройте спектр хаотических пульсаций решений.

## Задачи к главе 3

***Задача.3.1.*** В параболическом уравнении теплопроводности с нелинейным тепловым источником

$$\frac{\partial T}{\partial t} = a\nabla^2 T + \beta T - \alpha T^3,$$

определите скорость изменения энтропии и производство энтропии, скорость изменения свободной энергии, функцию Релея. Найдите также вторые производные указанных термодинамических параметров, а также запишите вариационный принцип для этого уравнения.

***Задача 3.2.*** Считая уравнения (4.5) нестационарными уравнениям переноса в локально неравновесных системах сформулируйте и докажите для них теорему 1 для устойчивых по Ляпунову процессов.

***Задача 3.3.*** Определить производство энтропии и скорость изменения энтропии для локально неравновесных процессов, описываемых гиперболическим уравнением с нелинейным тепловым источником

$$\frac{\partial T}{\partial t} + \tau_T \frac{\partial^2 T}{\partial t^2} = a\nabla^2 T + \beta T - \alpha T^3.$$

## Задачи к главе 4

***Задача 4.1.*** Составьте алгоритм решения уравнения (4.7), которое следует представить в виде системы трех нелинейных дифференциальных уравнений – автономной системы уравнений (4.8). Получите результаты, приведенные на рис. 4.1, или близкие к ним. Проведите анализ статистический анализ гомофазных и гетерофазных флуктуаций внутренней термодинамической силы (*а*)(параметра порядка), фазовый портрет (*б*).

***Задача 4.2.*** Используя решения уравнения (4.7) определите хаотическую динамику скорости изменения энтропии $G^*$, т.е. то, что представлено на рис. 4.2 (*а*,*б*)). Как ведет при этом параметр порядка $\eta$ (в)?

***Задача 4.3.*** Найдите хаотические решения, приведенные на рис. 4.3. и эволюцию "расстояния" между двумя расчетными траекториями уравнения (4.7) при заданных отличающихся начальных условиях. Расстояние между двумя соседними траекториями $\eta(t)^{/}$ и $\eta(t)^{//}$ задайте величиной $\delta\eta(t)=\left|\eta(t)^{/}-\eta(t)^{//}\right|$, определите $t_r$ – характерное время, за которое система забывает начальные условия.

***Задача 4.4.*** Научитесь строить псевдофазовые портреты решений уравнения (5.7) для любых произвольно заданных $\Delta$; получите частные решения, приведенные на рис.4.4.

***Задача 4.5.*** Постройте алгоритм получения хаотической динамики параметра порядка и показателя Ляпунова $\lambda$ для термодинамической системы, описываемой отображением (4.14), который приводит к результату, приведенному на рис. 4.5.

***Задача 4.6.*** Постройте бифуркационную диаграмму $\eta=\eta(a^*)$ для отображения сборки (4.14) в интервале $-1.6<a^*<0.1$.

***Задача 4.7.*** Найдите решения для отображения Хенона. Определите показатели Ляпунова.

**Задачи к главе 5.**

***Задача 5.1.*** Найдите решения отображения сборки для показателя Ляпунова $\lambda<0$.

***Задача 5.2.*** Найдите решения отображения сборки для показателя Ляпунова $\lambda>0$.

**Задачи к главе 6.**

***Задача 6.1.*** Найдите решение для странного аттрактора Реслера.

***Задача 6.2.*** При указанных ниже параметров найдите решения аттрактора Лоренца: $\sigma=7, r=28, b=8/3$.

### Задачи к главе 7

***Задача 7.1.*** Составить к схеме цикла реакций (7.1)-(7.7) соответствующие кинетические уравнения. Предложить алгоритм их решений при различных константах реакций $k_i$ и $k_i'$. Получите результаты, приведенные на рис. 7.1-7.2, или близкие к ним. Проведите анализ полученных результатов.

***Задача 7.2.*** Найдите эволюцию “расстояния” между двумя расчетными траекториями кинетических уравнений.

***Задача 7.3.*** Построить псевдофазовые портреты решений кинетических уравнений для для любых произвольно заданных Δ; получите частные решения, приведеные на рис.7.4.

### Задачи к глава 8

***Задача 8.1.*** Используя отображение сборки, разработайте модель шагающего в норме человека (без патологий)? Внешний управляющий параметр $b^*$.

### Решения задач главы 1

**1.1**. Оба выражения в правой части (1.11) являются неполными дифференциалами, так как производство энтропии представляет только часть прироста энтропии . Однако производство энтропии при $\sigma^e$=0 можно преобразовать в полный дифференциал, следуя (1.12), так как выполняется:

$$\frac{d_i S}{dt} = -\frac{1}{T}\left.\frac{d\Lambda_F}{dt}\right|_{\sigma_e=0} .$$

Для устойчивых по Ляпунову термодинамических систем

$$\sigma^i = \frac{d_i S}{dt} \geq 0 \ , \frac{d\Lambda^F}{dt} \leq 0 .$$

Это и означает, что в реальных процессах свободная энергия уменьшается, т.к. $\Lambda^F = F - F_0 > 0$.Этот результат является следствием используемого принципа минимальности потенциала в состоянии равновесия.

Из (1.23) получаем для полного дифференциала Пригожина–Гленсдорфа соотношение $d_i S = -(1/T)dF|_{T,V}$. Этот дифференциал непосредственно связан с изменением свободной энергии Гельмогольца $dF$. Пригожин и Гленсдорф, не доказывая этого соотношения, объясняли последнее тем, что все процессы протекают в направлении уменьшения $F$ до тех пор, пока свободная энергия не достигнет минимума в устойчивом равновесном состоянии. Наличие такой взаимосвязи между изменениями термодинамических потенциалов для неравновесных состояний и производством энтропии в литературе как правило не обсуждается, кроме единственного упоминания в [12] о взаимосвязи свободной энергии и производства энтропии в виде указанного выше дифференциала Пригожина–Гленсдорфа.

**1.2.** Производство энтропии в системе равно:

$$T\frac{d_i S}{dt} = -\frac{d(\Lambda^F + \Lambda_e)}{dt}; \qquad \frac{d\Lambda_e}{dt} \equiv T\frac{d_e S}{dt},$$

где $\Lambda^F = F - F_0$ – термодинамический потенциал неравновесной системы, а $\Lambda_e$ – термодинамический потенциал внешней среды. Последнее и является ответом на вопрос в данной задаче. Если перейти к дифференциалам, то получаем результат, приведенный А.Б. Рубиным. Аналогичные соотношения могут быть получены для других потенциалов.

**1.3.** После совершения одного оборота цикла через $\tau$ система вновь вернется в первоначальное состояние, следовательно скорость продуцирования энтропии, или диссипации энергии, в единицу времени определиться уравнением (1.25). В этом случае изменение значения термодинамического потенциала неравновесной системы через время $\tau_0$ будет равно нулю $\Delta\Lambda^{*F}|_{\tau}=0$. В (1.25) $\tau_0$ – время совершения одного оборота цикла (считается достаточно малым). Для внешней среды $\Delta\Lambda_e|_{\tau}\neq 0$, так как именно за счет взаимодействия с внешней средой и совершается оборот цикла с производимой им за это время работой. Это и доказывает что протекание неравновесных процессов в цикле сопровождается остаточными изменениями в окружающей среде.

**1.4.** Уравнение (1.25) позволяет сравнивать между собой различные циклы в отношении их энергетической эффективности. Действительно, если имеются две системы, для которых $\Delta\Lambda_1^* = \Delta\Lambda_2^*$, то при $\tau_1 < \tau_2$ следует что $\beta_1 \succ \beta_2$. Иными словами, скорость диссипации энергии в первом цикле больше, чем во втором, при том же значении совершенной работы. Этим самым доказывается результат, полученный впервые Т. Мицунойей.

**1.5.** Для открытой системы энтропия может как увеличиваться так и уменьшаться со временем, так как при стремлении $F \to F_0$ функция $\Lambda^F(t)$ в (1.12) уменьшается во времени $d\Lambda^F(t)/dt<0$, а при удалении/отклонении от состояния равновесия $d\Lambda^F(t)/dt>0$. Таким образом, уменьшение энтропии является неустойчивым по Ляпунову процессом, т.е. оно не выполняется на бесконечном интервале времени.

**1.6.** Для доказательства выделим в структуре обратимых потоков через границу, составляющую с теплом $d_0S/dt$:

$$\frac{d_eS}{dt} = \frac{d_0S}{dt} + \frac{d_e^/ S}{dt},$$

$d_e^/ S/dt$ – все остальные потоки через границу. В результате с учетом уравнения для производства энтропии и неравенства (1.16) получаем:

$$T\frac{d_iS}{dt} = T\frac{dS}{dt} - T\left(\frac{d_0S}{dt} + \frac{d_e^/ S}{dt}\right) = T\frac{dS}{dt} - \frac{dU_0}{dt} - P\frac{dV}{dt} \geq 0$$

при $d_e^/ S / dt = 0$.

## Решения задач главы 2

**2.1**. Представим коэффициент $L_{ii}$ в виде:

$$L_{ii}(X_i) = |k_1| - |k_2|X_i + |k_3|X_i^2 .$$

Тогда из (2.11) следует (2.12), в котором

$$c = \sqrt{\frac{|L_{ii}^0|}{|L_{ee}|}}; \qquad b_1 = \frac{|L_{ie}|}{\sqrt{|L_{ii}||L_{ee}|}}, \qquad b_2 = \frac{|L_{ei}|}{\sqrt{|L_{ii}||L_{ee}|}}; \quad c_1 = \frac{|k_2|b_1|X_e|^2}{|L_{ie}|}; \quad c_2 = \frac{c_1}{3x_0^*}.$$

Здесь мы учли, что принцип симметрии коэффициентов для нелинейных процессов не выполняется: $L_{ie} \neq L_{ei}$, для упрощения предполагалось выполнение равенства $X_c \approx X_e$. Здесь также процесс с индексом “*e*” “приводит в движение” процесс “*i*” и $0 \leq \phi \leq 1$ при условии, что знаки у величин *cy* и $b_1$ и $b_2$ различны. Расчеты по (2.12) показали, что кривая энергетических превращений для нелинейных процессов может лежать как выше так и ниже кривой для линейных превращений (рис. 2.4б). Численные расчеты также показали, что наибольшие отклонения $\phi$ имеют место в области максимума кривой в сторону превышения эффективности линейных процессов при $c_1 \approx c_2$: $x_0^* = \dfrac{x_1^* + x_2^*}{2} \approx \dfrac{1}{3}$, или $x_1^* + x_2^* \approx \dfrac{2}{3}$.

2.4.

**КАТАСТРОФА СБОРКИ.**
**ОДНОПАРАМЕТРИЧЕСКАЯ МОДЕЛЬ**

Рассматривается однородное нелинейное дифференциальное уравнение: $d\eta/dt=-(\eta^3+a^*\eta+b^*)$ . Оно является двухпараметрическим, так как имеет два управляющих параметра a, b. На сепаратрисе выполняется соотношение $(a^*/3)^3+(b_s^*/2)^2=0$ и уравнение становится однопараметрическим: $d\eta/dt=-(\eta^3+a^*\eta+b_s^*)$

**А. Задаются управляющие параметры** :

$a := -1.43$ $b := -0.7$

**В.Задаются начальные условия (-1.8< i <1.8)**
рекомендуемое начальное значение в анализе i=0 : $i := 0$

Задается конечное число расчетных точек N и, тем самым, временной интервал рассмотрения процесса $t=N\xi$:

Задается шаг временной расчетной сетки ( $\xi=\Delta t$) : $\xi := 0.01$ $N := 1500$ $N\cdot\xi = 15$

## Задание 1. НЕЛИНЕЙНАЯ ДИНАМИКА ПАРАМЕТРА ПОРЯДКА. ДИССИПАТИВНЫЙ ПОТЕНЦИАЛ

Отсутствие последействия - константы a* и b* определены для момента времени t, что и переменна $\eta$, приводит к обычной нелинейной динамике параметра порядка - достижению ближайшего устойчивого минимума потенциала. Такая система, хотя и является диссипативной, не обнаруживает признаков хаотической динамики.

Диссипативный потенциал $n := -3, -2.9 .. 3$ $F(n) := \left(\frac{1}{4}\right)\cdot(n)^4 + \left(\frac{1}{2}\right)\cdot a\cdot(n)^2 + (b)\cdot n$

А. Экстремумы диссипативного потенциала находятся из решений кубического алгебраического уравнения. Это решение в MATHAD осуществляется по следующей процедуре:

$dF(n) := n^3 + a\cdot n + b$

$dFKoef := \begin{pmatrix} b \\ a \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}$

$roots := polyroots(dFKoef)$

$max\_root := |max(roots)|$

Экстремумы потенциала имеют место при следующих значениях параметра порядка

$roots = \begin{pmatrix} -0.6952382 - 0.1416631i \\ -0.6952382 + 0.1416631i \\ 1.3904764 \end{pmatrix}$

В. **Решение нелинейного ДУ без последействия** . Динамика параметра порядка без эффекта детерминированной стохастичности

$j := 1 .. N$ $y_j := i$ $y_{j+1} := y_j - \xi\cdot\left[b + \left(y_j\right)^3 + a\cdot y_j\right]$

Значение параметра порядка в ближайшем экстремуме

$y_N = 1.3904764$

С. Динамика параметра порядка на потенциальной функции без эффекта детерминированной стохастичности

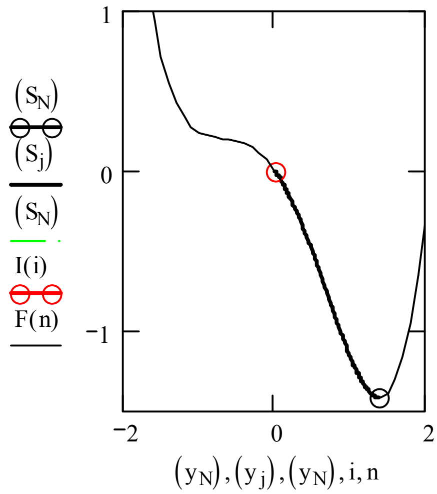
Конечное состояние:

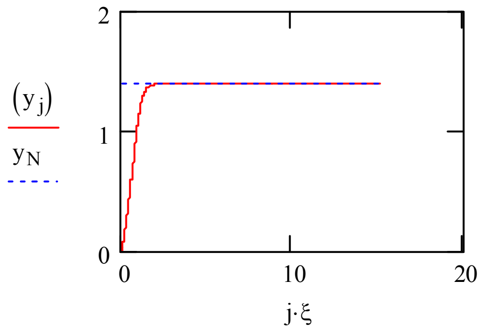
Начальные условия: $I(i) := \left(\frac{1}{4}\right)\cdot(i)^4 + \left[\left(\frac{1}{2}\right)\cdot a\cdot(i)^2 + b\cdot(i)\right]$

$S_N := \left(\frac{1}{4}\right)\cdot\left(y_N\right)^4 + \left[\left(\frac{1}{2}\right)\cdot a\cdot\left(y_N\right)^2 + b\cdot\left(y_N\right)\right]$

Решение на потенциальной функции: $S_j := \left(\frac{1}{4}\right)\cdot\left(y_j\right)^4 + \left[\left(\frac{1}{2}\right)\cdot a\cdot\left(y_j\right)^2 + b\cdot\left(y_j\right)\right]$

$S_N = -1.4211994$




На рисунке слева фиксируется траектория спуска к ближайшему минимуму потенциала как результат строгого решения НДУ численными методами в условиях отсутствия стохастичности, $t = j\,\xi$ - время. Она определяется начальными условиями. Рисунок справа фиксирует само решение. На сепаратрисе устойчивость является асимптотической.

**Задание. 1. Измените начальное условие (-1.8<i<1.8) и проведите анализ полученных решений.**

**Задание 2. Измените приведенные значения управляющих параметров и проведите анализ полученных решений.**

### Задание 2. ВЛИЯНИЕ ВНЕШНИХ ШУМОВ.
### Шум, ограниченный гармонической функцией

В этой задаче рассматривается для примера шум, ограниченный гармонической функцией. Задается интенсивность внешнего шума $\kappa$ (в долях от b) и частота $\omega\omega$:

$$\kappa := 3 \qquad noise := -b\cdot\kappa \qquad \omega\omega := 3$$

$$HARMONIC\_FORCE_j := noise\cdot\cos(\omega\omega\cdot j\cdot\xi) \qquad HARMONIC\_NOISE_j := HARMONIC\_FORCE_j\cdot(rnd(1)-1)$$

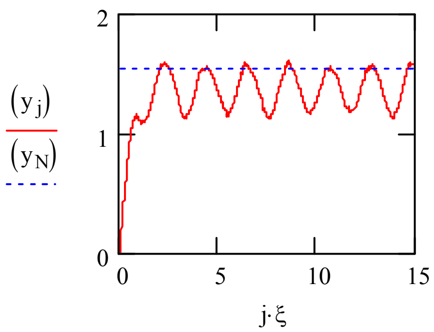
$$NOISE := HARMONIC\_NOISE$$

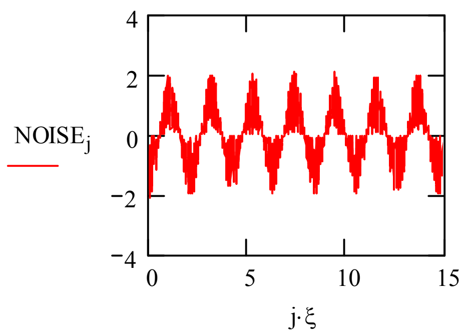
Этот шум вводится в правую часть уравнения:

$$y_{j+1} := y_j - \xi\cdot\left[b + NOISE_j + (y_j)^3 + a\cdot y_j\right]$$

Так выглядит этот шум:
(увеличенный масштаб)

Так шум влияет на решение



**СПЕКТР МОЩНОСТИ** продольных пульсаций находится в рамках интегрального преобразования Фурье для конечного множества точек j=1...N. Используется алгоритм оптимизации представления результатов на рисунке для ограниченного количества точек U=200. Время расчета зависит от мощности компьютера.

$$\zeta(\omega) := \xi^2 \cdot \left[\left(\left|\sum_j y_j \cdot \cos(\omega \cdot j \cdot \xi)\right|\right)^2 + \left(\left|\sum_j y_j \cdot \sin(\omega \cdot j \cdot \xi)\right|\right)^2\right]$$

Алгоритм оптимизации: $u0 := 1$ $\quad U := 200$ $\quad \omega 0 := 0.01$ $\quad \Delta\omega := 0.0417$ $\quad u := u0..U$

$$\omega(u) := \omega 0 \cdot e^{\Delta\omega \cdot u}$$

$$\Omega_u := \zeta(\omega(u))$$

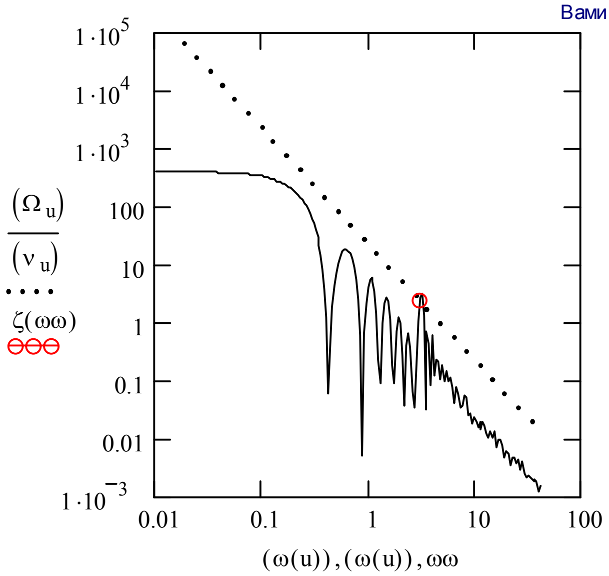
Мощность внешнего шума частоты $\omega\omega$ (число):

$$\zeta(\omega\omega) := \xi^2 \cdot \left[\left(\left|\sum_j y_j \cdot \cos(\omega\omega \cdot j \cdot \xi)\right|\right)^2 + \left(\left|\sum_j y_j \cdot \sin(\omega\omega \cdot j \cdot \xi)\right|\right)^2\right] \qquad \zeta(\omega\omega) = 2.402221$$

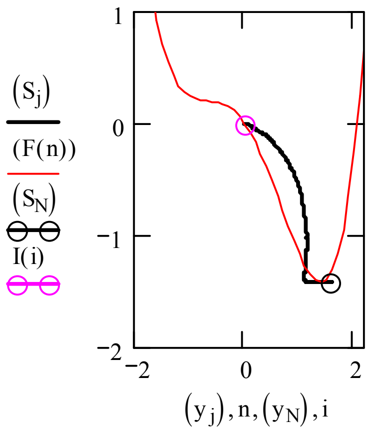
Закон зависимости мощности от частоты: меняя показатель степени в формуле на рисунке установите этот закон:

$$\nu_u := 22 \cdot \left(\frac{1}{\omega(u)}\right)^2$$

Графическое представление спектра мощности поперечных пульсаций от частоты. Обратите внимание, что это непрерывная линия. Точка соответствует спектральной энергии шума.




Шум деформирует потенциальную функцию - интервал деформации зависит от указанных Вами начальных условий:




**Задание:**

**1. Измените значение интенсивности шума ( κ), проведите анализ полученных решений (вид спектра, деформацию потенциальной функции и пр.). Фиксируется ли на спектре всплеск при частоте ωω ?**

**2. Измените значение частоты ωω шума, проведите анализ полученных решений.**

**3. Измените начальные условия (i). Проведите анализ полученных решений)**

## Решения задач главы 3

**3.1.** В уравнении (3.14) источник тепла равен

$$\frac{W}{C_V \rho} = \frac{T_0^2}{C_V \rho}\left(\frac{\partial \sigma^e}{\partial T}\right)_V = \beta T - \alpha T^3 .$$

В случае линейного источника имеем α=0. После интегрирования последнего уравнения получаем, что в данной задаче функция источников $\sigma^e$ содержит слагаемые разных знаков, характеризующие стоки и источники тепла (рис.3.1):

$$\sigma^e = -\frac{C_V \rho \alpha}{T_0^2}\left(\frac{1}{4}T^4 - \frac{\beta}{2\alpha}T^2\right).$$

В результате скорость изменения энтропии (кинетический потенциал) в такой задаче является сложной функцией температуры:

$$\frac{dS}{dt} = \sigma^e + J_q X_q = -\frac{\alpha C_V \rho}{4T_0^2}T^4 + \frac{\beta C_V \rho}{2T_0^2}T^2 + \frac{\lambda}{T_0^2}(\nabla T)^2 .$$

Производство энтропии в этой задаче равно

$$\sigma_i = J_q X_q = \frac{\lambda}{T_0^2}(\nabla T)^2 .$$

Можно доказать, что теорема Пригожина для описываемого уравнения выполняется, т.к. в такой нелинейной системе имеется одно стационарное состояние при $\sigma^e = const$.

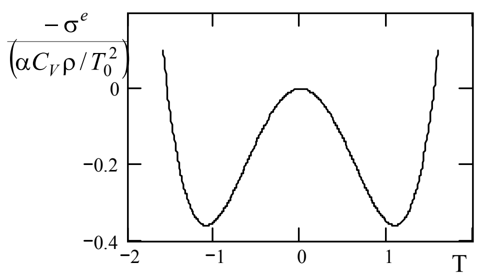



Рис.3.1. Зависимость нелинейного источника тепла для нелинейного уравнения теплопроводности (3.14) при $\beta/\alpha = 1.2$.

**3.2.** В этом уравнении функция внешних источников равна

$$\frac{W}{C_V \rho} = \frac{T_0^2}{C_V \rho}\left(\frac{\partial \sigma^e}{\partial T}\right)_V = \beta T - \alpha T^3 .$$

После интегрирования последнего уравнения получаем, что в данной задаче функция источников $\sigma^e$ содержит слагаемые разных знаков, характеризующие источники и стоки тепла соответственно:

$$\sigma^e = -\frac{C_V \rho\alpha}{T_0^2}\left(\frac{1}{4}T^4 - \frac{\beta}{2\alpha}T^2\right).$$

В результате в такой задаче скорость изменения энтропии (кинетический потенциал) является сложной функцией температуры и содержит слагаемые разных знаков:

$$\frac{dS}{dt} = \sigma^e + J_q X_q = -\frac{\alpha C_V \rho}{4T_0^2}T^4 + \frac{\beta C_V \rho}{2T_0^2}T^2 +$$

$$+\frac{\lambda}{T_0^2}(\nabla T)^2 - \frac{\lambda}{T_0^2}\nabla T \nabla \dot{T} \tau_T \cdot$$

Характерно, что данный тип нелинейности не приводит к нарушению теоремы Пригожина при постоянных граничных условиях ($\sigma^e$=*const*).

# Решения задач главы 4

4.1.-4.6.

**ТЕРМОДИНАМИКА ЛОКАЛЬНО-НЕРАВНОВЕСНЫХ СИСТЕМ** **Быстрай Г.П.**

**Алгоритм решения уравнения (2.18)**

**Задаются начальные условия**

**Задаются параметры уравнения амплитуда внешней силы, частота внешней силы, время релаксации, время последействия**

$$x := \begin{pmatrix} 0.3 \\ 0.02 \\ 0.01 \end{pmatrix} \qquad b := 1.7 \qquad \omega := 2 \qquad \theta := 1 \qquad \tau := 0.24 \qquad \omega\cdot\theta = 2 \qquad a := -1.5$$

**Решение уравнения (системы автономных уравнений, их три)**

$$D(t,x) := \begin{bmatrix} x_1 \\ \dfrac{\left[-\left[1-\tau\cdot\left[3\cdot\left(x_0\right)^2+a\right]\right]\cdot x_1-\left[\left(x_0\right)^3+a\cdot x_0\right]+b\cdot\left(1+\tau\cdot\omega\cdot\tan\left(x_2\right)\right)\cdot\cos\left(x_2\right)\right]}{\theta} \\ \omega \end{bmatrix}$$

**Оператор решения** $Z := \mathrm{rkfixed}(x, 0, 100, 10000, D)$

**Проверка начальных условий**

$Z_{0,1} = 0.3 \qquad Z_{0,2} = 0.02 \qquad Z_{0,3} = 0.01$

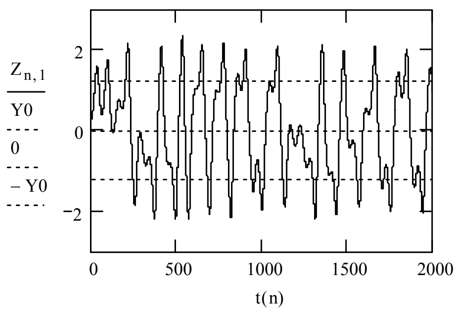
**Количество расчетных точек во времени** $n := 0..10000$

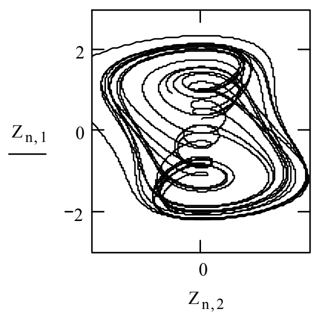
**Значение переменной в аттракторе** $Y0 := \sqrt{-a}$

**Переход к реальному времени** $t(n) := \dfrac{2000\,n}{10000}$

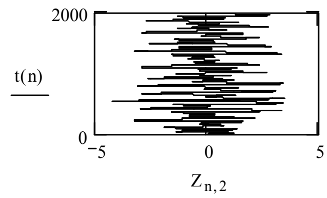
**Расчет: Динамика переменной.Y0 - значения в аттракторах**

**Фазовый портрет (переменная,скорость ее изменения) Это странный аттрактор**



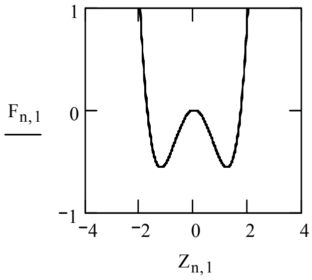



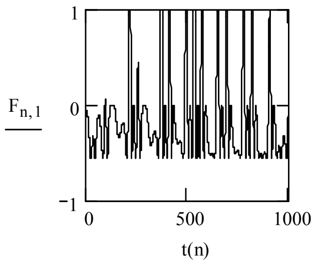

**Расчет: Динамика скорости изменения переменной.**

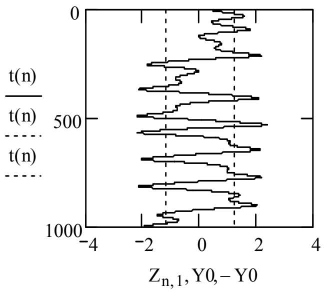


**Потенциальная функция задается значениями переменной. Несмотря на ее хаотический характер эта функция прорисовывается хорошо**

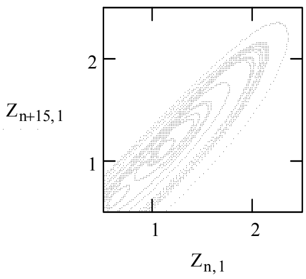
$$F_{n,1} := \left(\frac{1}{4}\right)\cdot\left(Z_{n,1}\right)^4 + \left(\frac{1}{2}\right)\cdot a\cdot\left(Z_{n,1}\right)^2$$




**Псевдофазовый портрет хаотических пульсаций(зависимость последующих решений от предыдущих), t=15 время задержки**



**Алгоритм определения показателей Ляпунова**

$$y := \begin{pmatrix} 0.3000000008 \\ 0.02 \\ 0.01 \end{pmatrix}$$

**Задаются начальные условия, слабо отличающиеся от заданных на странице 1**

**Решается второе уравнение (полностью аналогичное приводимому на первой странице) с начальными условиями, слабо отличающиеся от заданных на странице 1**

$$G(t,y) := \begin{bmatrix} y_1 \\ \dfrac{\left[-\left[1-\tau\cdot\left[3\cdot(y_0)^2+a\right]\right]\cdot y_1-\left[(y_0)^3+a\cdot y_0\right]+b\cdot\left(1+\tau\cdot\omega\cdot\tan(y_2)\right)\cdot\cos(y_2)\right]}{\theta} \\ \omega \end{bmatrix}$$

$$M := \text{rkfixed}(y, 0, 100, 10000, G)$$

**Находится расстояние между двумя траекториями**

$$n := 0..10000 \qquad s := 0..1164 \qquad t(n) := \frac{2000\,n}{10000}$$

$$\delta_{n,1} := \left|Z_{n,1} - M_{n,1}\right|$$

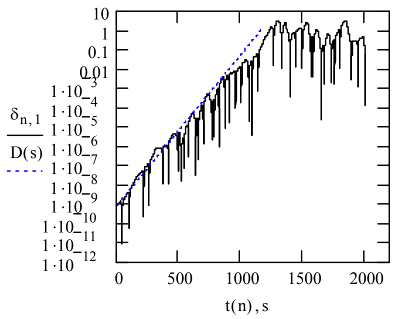
**Задается показатель Ляпунова** $\lambda$

**Начальное расстояние между двумя траекториями**

$$\lambda := 0.018 \qquad D(s) := \left|\delta_{0,1}\right|\cdot e^{\lambda\cdot s}$$

$$\left|\delta_{0,1}\right| = 8\times 10^{-10}$$

**Наклон пунктирной линии подбирается значениями** $\lambda$




**Расчет времени прогнозирования**

$$L := \sum_{n=5820}^{10000} \delta_{n,1}\cdot\left(\frac{1}{4180}\right)$$

$$L = 0.821 \qquad t := \left(\frac{1}{\lambda}\right)\cdot\ln\left(\frac{L}{\delta_{0,1}}\right)$$

$$n := 2000\cdot\frac{10000}{2000}$$

$$n = 1\times 10^{4} \qquad n := 1164\cdot\frac{10000}{2000}$$

**АЛГОРИТМ ПОСТРОЕНИЯ БИФУРКАЦИОННОЙ ДИАГРАММЫ ДЛЯ ОТОБРАЖЕНИЯ СБОРКИ**

$$F(\tau, N, x0, h, a) := \left| \begin{array}{l} \text{for } k \in 0..N \\ \quad \left| \begin{array}{l} x_0 \leftarrow x0 \\ x_{k+1} \leftarrow x_k - h \cdot \left[ \dfrac{(x_k)^3 + a \cdot x_k}{1 - \tau \cdot \left[ 3 \cdot (x_k)^2 + a \right]} \right] \end{array} \right. \\ x \end{array} \right.$$

**Устанавливается шаг изменения параметра**

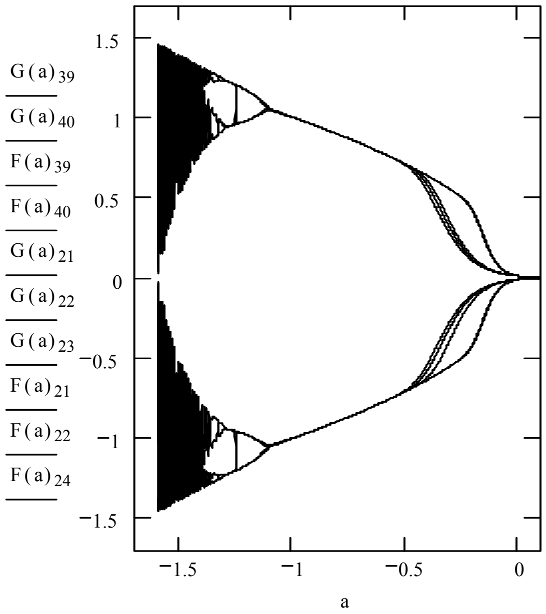
$$a := -1.6, -1.598 .. 0.1$$

**Выбираются численные значения других параметров и начальных условий**

$$G(a) := F(0.14, 100, 0.01, 0.6, a)$$

$$F(a) := F(0.14, 100, -0.01, 0.6, a)$$

**Построение бифуркационной диаграммы**



# 4.7.

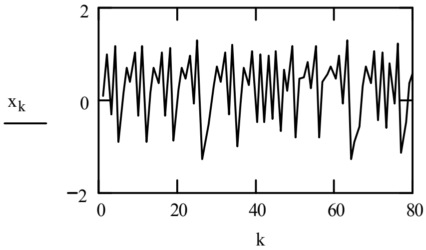
## ОТОБРАЖЕНИЕ ХЕНОНА

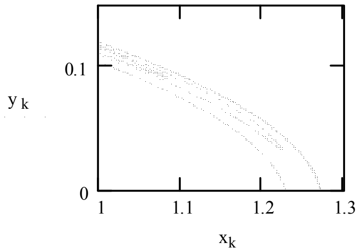
$N := 8000 \quad a := 1.4 \quad b := 0.3$

$k := 1 .. N \quad y_1 := 0.1 \quad x_1 := 0.1$

$$x_{k+1} := \left[ 1 - a \cdot \left( x_k \right)^2 \right] + b \cdot x_{k-1} \qquad y_{k+1} := b \cdot x_k$$

Хаос в детерминированных системах подразумевает чувствительную зависимость от начальных условий. Это означает, что две траектории, близкие друг к другу в фазовом пространстве в некоторый начальный момент времени, экспоненциально расходятся за малое в среднем время.




$N := 80 \quad a1 := 1.4 \quad b1 := 0.3$

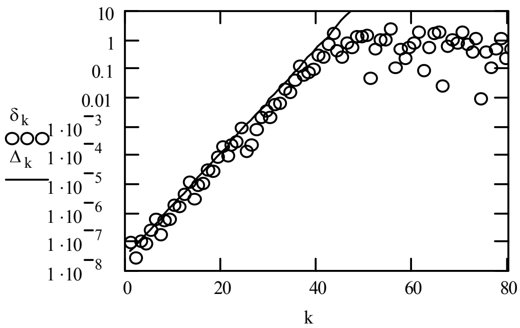
$k := 1 .. N \quad t_1 := 0.1 \quad z_1 := 0.1000001$

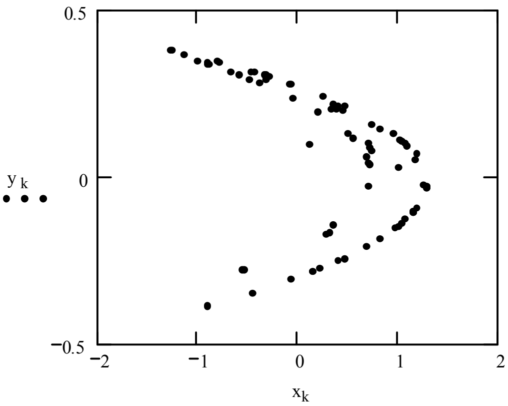
$$z_{k+1} := \left[ 1 - a1 \cdot \left( z_k \right)^2 \right] + b1 \cdot z_{k-1} \qquad t_{k+1} := b \cdot z_k \qquad \nu := 0.58$$

$$\delta_k := \left| z_k - x_k \right| \qquad \lambda := 0.417$$

$$\Delta_k := \left[ \left( z_1 - x_1 \right) \cdot 0.3 \right] \cdot e^{\lambda \cdot k} \qquad D_k := \left( y_1 - x_1 \right) \cdot 2^{\nu \cdot k}$$

Экспоненциальная расходимость хаотических траекторий может быть только локальной, так как если система ограничена, то x(t) не может возрастать до бесконечности. Поэтому когда достигает величины, сравнимой с длиной интервала [0,1], наступает насыщение. Результаты определения показателей Ляпунова для логистического отображения и для других подтверждают этот вывод. Критерий хаоса в терминах показателя Ляпунова принимает следующий вид : >0 - хаотическое движение ;< 0 - регулярное движение.



# Решения задач главы 5

5.1.

**ОТОБРАЖЕНИЕ ДЛЯ СБОРКИ.
ПОКАЗАТЕЛИ ЛЯПУНОВА**

**Задаются параметры уравнения и начальные условия**

$a := -1.0$ $N := 100$ $\tau := 0.03$ $x0 := (-a)^{\frac{1}{2}}$ $x0 = 1$

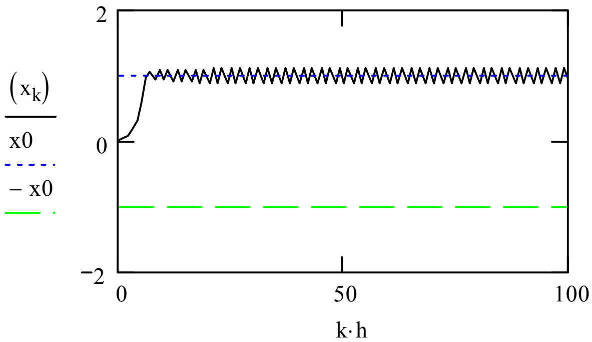
$h := 1$ $k := 0..N$ $x_0 := 0.02000001$ **-начальное условие для первой траектории x**

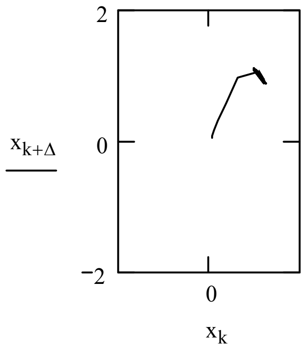
**Решается уравнение для первой траектории**

$$x_{k+1} := x_k - h\cdot\left[\frac{(x_k)^3 + a\cdot x_k}{1-(\tau)\cdot\left[3\cdot(x_k)^2 + a\right]}\right]$$

**Обратная задача. Строятся решения, соответствующие визуально реально наблюдаемым. Псевдофазовый портрет с Δ**

$\Delta := 1$




**Решается уравнение для второй траектории y**

$y_0 := 0.02008$ **-начальное условие для второй траектории y**

$$y_{k+1} := y_k - h\cdot\left[\frac{(y_k)^3 + a\cdot y_k}{1-(\tau)\cdot\left[3\cdot(y_k)^2 + a\right]}\right]$$

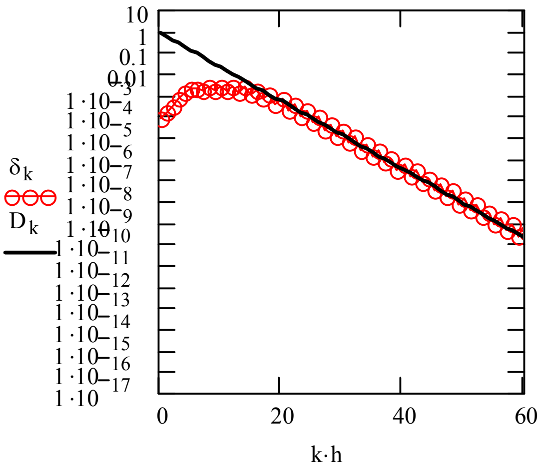
**Находится расстояние между двумя траекториями δк для времени kh**

$\delta_k := |y_k - x_k|$

$\lambda := -0.369$

$D_k := 10^4(y_0 - x_0)\cdot e^{\lambda\cdot k\cdot h}$

**Показатель Ляпунова находится по наклону прямой линии**




**Хаос в детерминированных системах подразумевает чувствительную зависимость от начальных условий. Это означает, что две траектории, близкие друг к другу в фазовом пространстве в некоторый начальный момент времени, экспоненциально расходятся за малое в среднем время.**

**Экспоненциальная расходимость хаотических траекторий может быть только локальной, так как если система ограничена, то x(t) не может возрастать до бесконечности. Поэтому когда достигает величины, сравнимой с длиной интервала [0,1], наступает насыщение. Результаты определения показателей Ляпунова для отображения сборки и для других подтверждают этот вывод. Критерий хаоса в терминах показателя Ляпунова принимает следующий вид: >0 - хаотическое движение ;< 0 - регулярное движение.**

5.2.

## ОТОБРАЖЕНИЕ ДЛЯ СБОРКИ.
## ПОКАЗАТЕЛИ ЛЯПУНОВА

**Задаются параметры уравнения и начальные условия**

$a := -1.5$ $N := 100$ $\tau := 0.03$ $x0 := (-a)^{\frac{1}{2}}$ $x0 = 1.225$

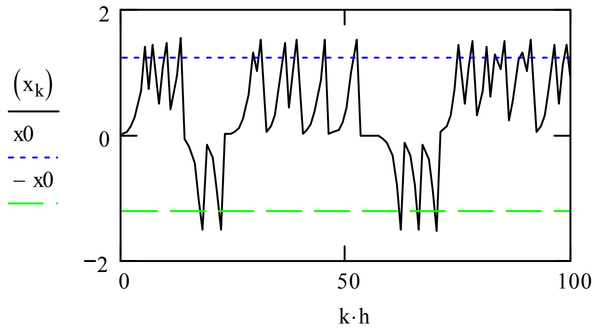
$h := 1$ $k := 0..N$ $x_0 := 0.02000001$ **-начальное условие для первой траектории x**

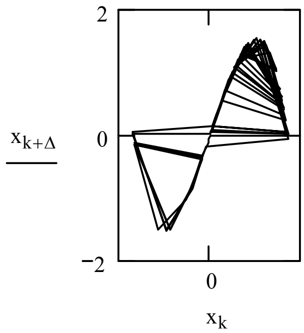
**Решается уравнение для первой траектории**

$$x_{k+1} := x_k - h \cdot \left[ \frac{(x_k)^3 + a \cdot x_k}{1 - (\tau) \cdot \left[ 3 \cdot (x_k)^2 + a \right]} \right]$$

**Обратная задача. Строятся решения, соответствующие визуально реально наблюдаемым. Псевдофазовый портрет с Δ**

$\Delta := 1$



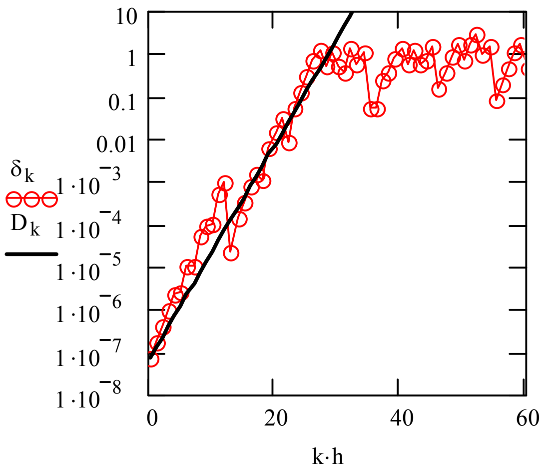

**Решается уравнение для второй траектории y**

$y_0 := 0.02000008$ **-начальное условие для второй траектории y**

$$y_{k+1} := y_k - h \cdot \left[ \frac{(y_k)^3 + a \cdot y_k}{1 - (\tau) \cdot \left[ 3 \cdot (y_k)^2 + a \right]} \right]$$

**Находится расстояние между двумя траекториями $\delta_K$ для времени kh**

$\delta_k := |y_k - x_k|$ $D_k := (y_0 - x_0) \cdot e^{\lambda \cdot k \cdot h}$ $\lambda := 0.58$ **Показатель Ляпунова находится по наклону прямой линии**




**Хаос в детерминированных системах подразумевает чувствительную зависимость от начальных условий. Это означает, что две траектории, близкие друг к другу в фазовом пространстве в некоторый начальный момент времени, экспоненциально расходятся за малое в среднем время.**

**Экспоненциальная расходимость хаотических траекторий может быть только локальной, так как если система ограничена, то x(t) не может возрастать до бесконечности. Поэтому когда достигает величины, сравнимой с длиной интервала [0,1], наступает насыщение. Результаты определения показателей Ляпунова для отображения сборки и для других подтверждают этот вывод. Критерий хаоса в терминах показателя Ляпунова принимает следующий вид: >0 - хаотическое движение ;< 0 - регулярное движение.**

# Решения задач главы 6

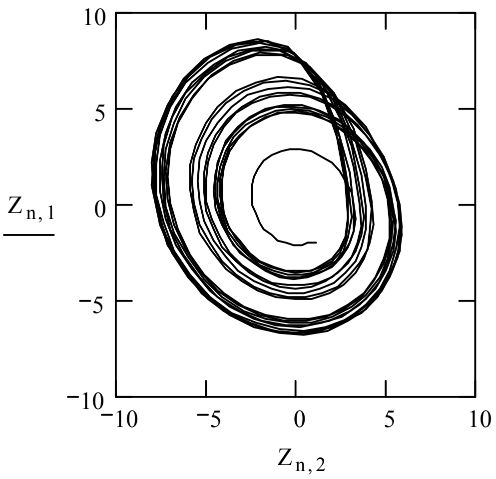
6.1.

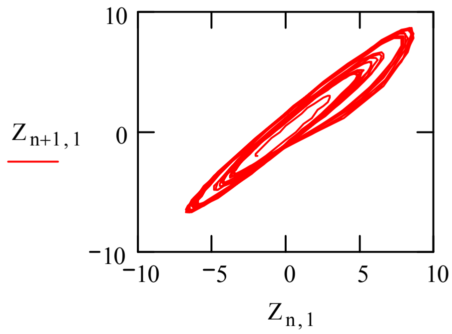
**СТРАННЫЙ АТТРАКТОР Реслера**

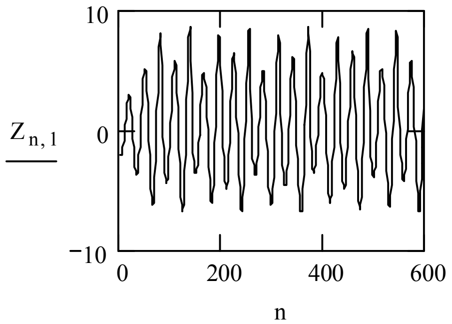
$\mu := 4.25$

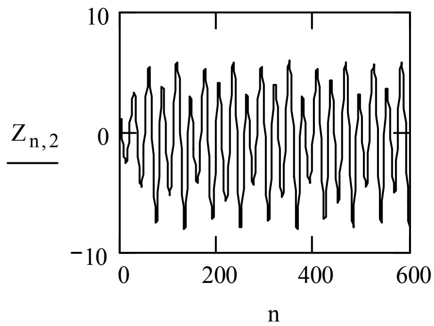
$$x := \begin{pmatrix} -2.0 \\ 1.03 \\ -1.1 \end{pmatrix} \qquad \alpha := \frac{1}{5}$$

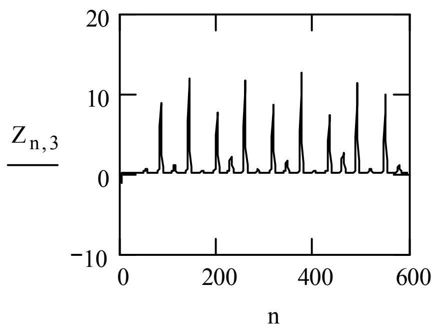
$$D(t,x) := \begin{bmatrix} -x_1 - x_2 \\ x_0 + (\alpha)\cdot x_1 \\ \alpha + x_2\cdot(x_0 - \mu) \end{bmatrix} \qquad Z := \mathrm{rkfixed}(x, 0, 120, 600, D) \qquad n := 0..599$$



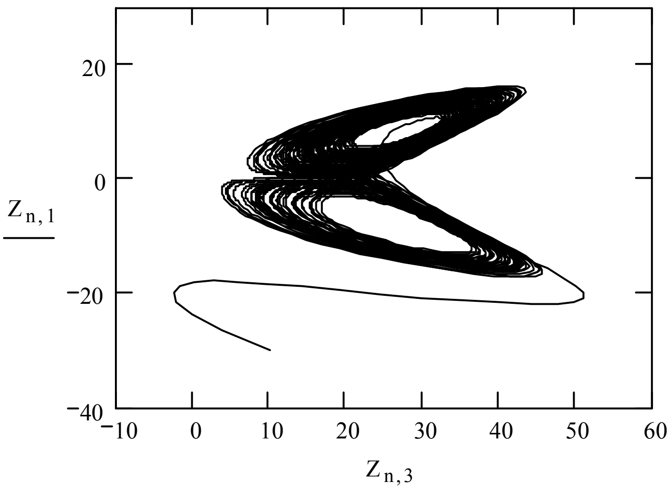
## 6.2.

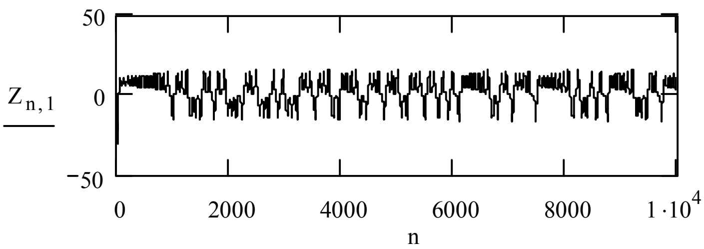
**СТРАННЫЙ АТТРАКТОР ЛОРЕНЦА**

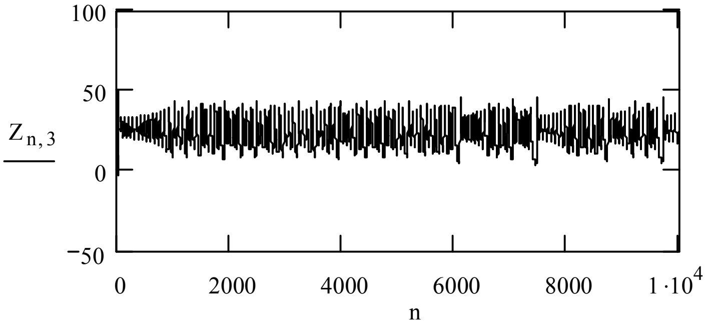
$\sigma := 7 \quad r := 28 \quad b := \frac{8}{3} \quad x := \begin{pmatrix} -30 \\ 25 \\ 10 \end{pmatrix}$

$$D(t,x) := \begin{pmatrix} -\sigma \cdot x_0 + \sigma \cdot x_1 \\ r \cdot x_0 - x_1 - x_0 \cdot x_2 \\ x_0 \cdot x_1 - b \cdot x_2 \end{pmatrix}$$

$Z := \mathrm{rkfixed}(x, 0, 100, 10000, D) \quad n := 0..\,9998$



# Решения задач главы 7

**Цикл реакций , проходящих при сокращении саркомера**

Решение нелинейной системы, описывающих реакции с участием АТФ

**Задаются параметры уравнения приведенные константы прямой и обратной скоростей реакций**

$a := 1.019 \quad b := 0.1 \quad c := 0.049 \quad d := 0.01 \quad f := 3.3 \quad h := 0.01 \quad i := 0.0015$

$j := 10 \quad k := 8.1 \quad l := 7 \quad n := 1.21 \quad p := 0.1 \quad q := 0.00059 \quad r := 2.7111$

**Решение системы 10 нелинейных кинетических уравнений**

$$D(t,x) := \begin{bmatrix} b\cdot(x_2)^2 - a\cdot(x_0)\cdot(x_1)^2 + m\cdot x_5 - p\cdot(x_0)\cdot(x_8)^2\cdot(x_9)^2 + k\cdot x_7\cdot(x_8)^2 - l\cdot(x_0)\cdot(x_8)^2 \\ b\cdot(x_2)^2 - a\cdot(x_0)\cdot(x_1)^2 \\ a\cdot(x_0)\cdot(x_1)^2 - b\cdot(x_2)^2 - c\cdot(x_2)^2 + d\cdot(x_3)^2\cdot(x_4) \\ -d\cdot(x_3)^2\cdot(x_4) + c\cdot(x_2)^2 - r\cdot(x_3)^2\cdot(x_4) + f\cdot x_5 \\ -d\cdot(x_3)^2\cdot(x_4) + c\cdot(x_2)^2 - r\cdot(x_3)^2\cdot(x_4) + f\cdot x_5 \\ r\cdot(x_3)^2\cdot(x_4) - f\cdot x_5 + h\cdot x_6 - q\cdot x_5 \\ q\cdot x_5 - h\cdot x_6 + j\cdot x_7\cdot(x_9)^2 - i\cdot x_6 + p\cdot(x_0)\cdot(x_8)^2\cdot(x_9)^2 - n\cdot x_6 \\ -j\cdot x_7\cdot(x_9)^2 + i\cdot x_6 - k\cdot x_7\cdot(x_9)^2 + l\cdot(x_0)\cdot(x_8)^2 \\ -l\cdot(x_0)\cdot(x_8)^2 + k\cdot x_7\cdot(x_9)^2 \\ -j\cdot x_7\cdot(x_9)^2 + \left[i\cdot x_6 - k\cdot x_7\cdot(x_9)^2 + l\cdot(x_0)\cdot(x_8)^2\right] + n\cdot x_5 - p\cdot(x_0)\cdot(x_8)^2\cdot(x_9)^2 \end{bmatrix}$$

**Задаются начальные условия**

$$x := \begin{pmatrix} 1.89 \\ 1 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$$

**Оператор решения** $Z := \mathrm{rkfixed}(x, 0, 50, 1000, D)$

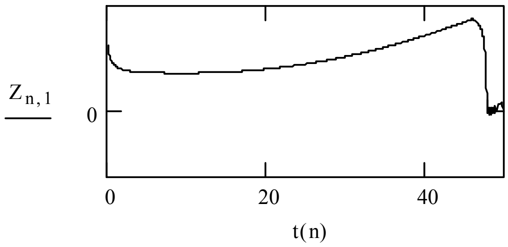
**Проверка начальных условий**

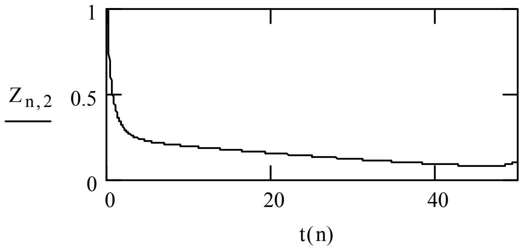
$Z_{0,2} = 1$

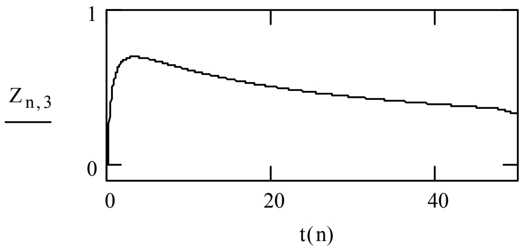
**Количество расчетных точек во времени** $n := 0..\,1000$

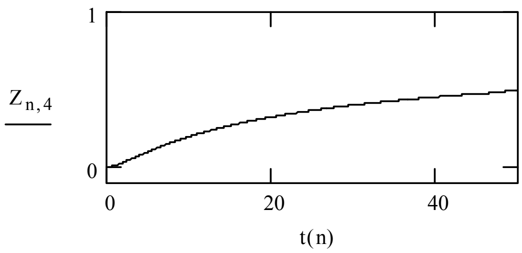
**Переход к реальному времени** $t(n) := \dfrac{50\cdot n}{1000}$

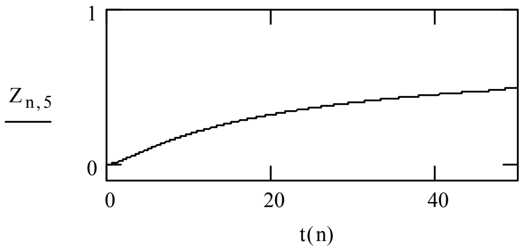
**Расчет: Динамика концентраций веществ системы саркомер-раствор**

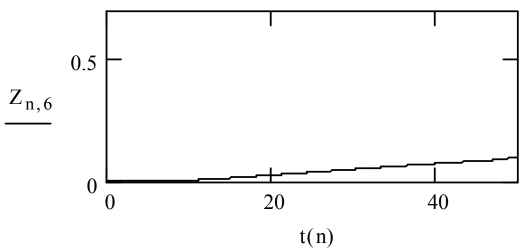


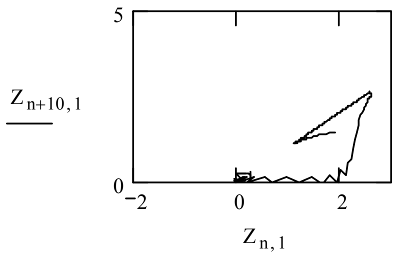



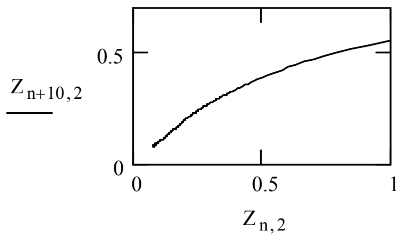



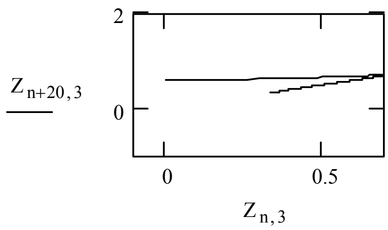



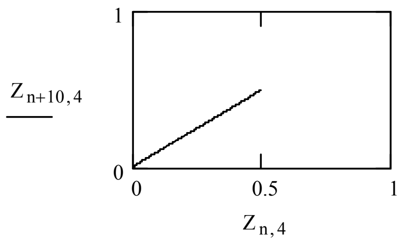



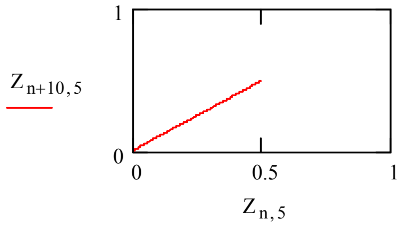

**Расчет: Псевдофазовые портреты (зависимость последующих решений от предыдущих)**

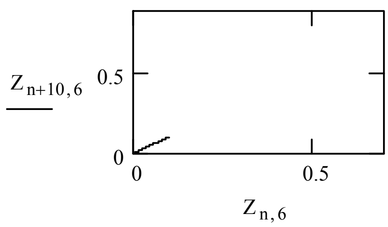


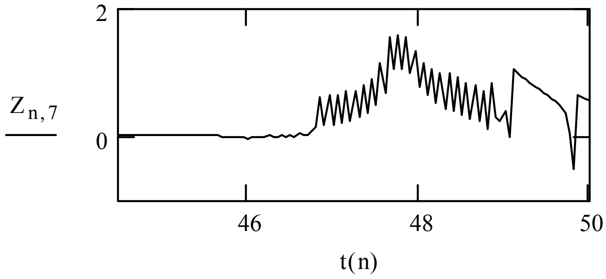



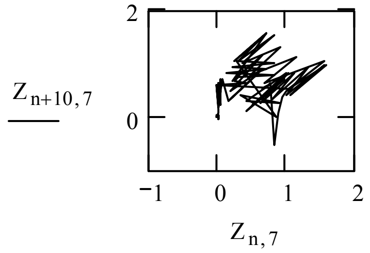



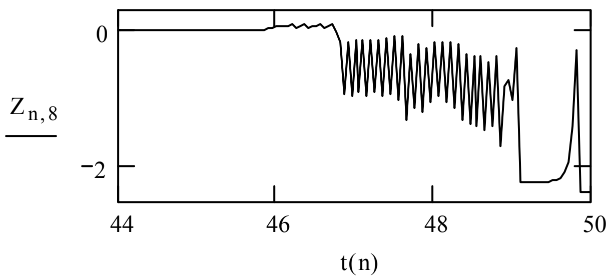





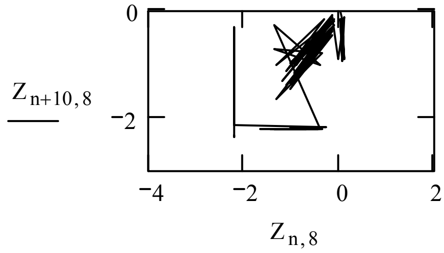
2
0
46
48
50
$Z_{n,7}$
t(n)

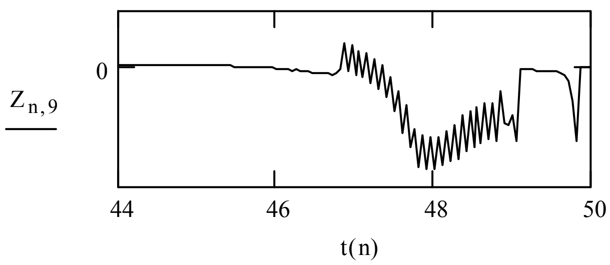
2
0
−1
0
1
2
$Z_{n+10,7}$
$Z_{n,7}$

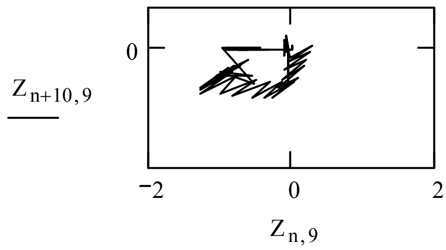
0
−2
44
46
48
50
$Z_{n,8}$
t(n)

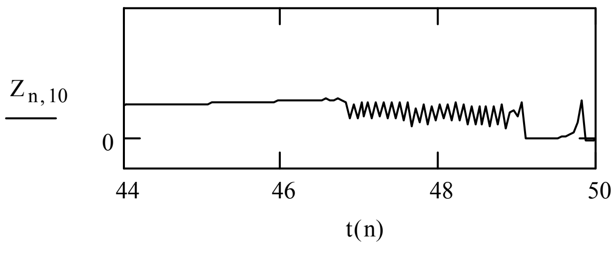
0
−2
−4
−2
0
2
$Z_{n+10,8}$
$Z_{n,8}$

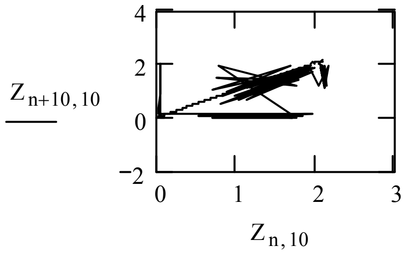
0
44
46
48
50
$Z_{n,9}$
t(n)

0
−2
0
2
$Z_{n+10,9}$
$Z_{n,9}$

0
44
46
48
50
$Z_{n,10}$
t(n)

4
2
0
−2
0
1
2
3
$Z_{n+10,10}$
$Z_{n,10}$

**Решается уравнение для второй траектории**

$$G(t,y) := \begin{bmatrix} b\cdot(y_2)^2 - a\cdot(y_0)\cdot(y_1)^2 + m\cdot y_5 - p\cdot(y_0)\cdot(y_8)^2\cdot(y_9)^2 + k\cdot y_7\cdot(y_8)^2 - l\cdot(y_0)\cdot(y_8)^2 \\ b\cdot(y_2)^2 - a\cdot(y_0)\cdot(y_1)^2 \\ a\cdot(y_0)\cdot(y_1)^2 - b\cdot(y_2)^2 - c\cdot(y_2)^2 + d\cdot(y_3)^2\cdot(y_4) \\ -d\cdot(y_3)^2\cdot(y_4) + c\cdot(y_2)^2 - r\cdot(y_3)^2\cdot(y_4) + f\cdot y_5 \\ -d\cdot(y_3)^2\cdot(y_4) + c\cdot(y_2)^2 - r\cdot(y_3)^2\cdot(y_4) + f\cdot y_5 \\ r\cdot(y_3)^2\cdot(y_4) - f\cdot y_5 + h\cdot y_6 - q\cdot y_5 \\ q\cdot y_5 - h\cdot y_6 + j\cdot y_7\cdot(y_9)^2 - i\cdot y_6 + p\cdot(y_0)\cdot(y_8)^2\cdot(y_9)^2 - n\cdot y_6 \\ -j\cdot y_7\cdot(y_9)^2 + i\cdot y_6 - k\cdot y_7\cdot(y_9)^2 + l\cdot(y_0)\cdot(y_8)^2 \\ -l\cdot(y_0)\cdot(y_8)^2 + k\cdot y_7\cdot(y_9)^2 \\ -j\cdot y_7\cdot(y_9)^2 + \left[i\cdot y_6 - k\cdot y_7\cdot(y_9)^2 + l\cdot(y_0)\cdot(y_8)^2\right] + n\cdot y_5 - p\cdot(y_0)\cdot(y_8)^2\cdot(y_9)^2 \end{bmatrix}$$

**-начальное условие для второй траектории y**

$$y := \begin{pmatrix} 1.89 \\ 1 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0.0000009 \end{pmatrix}$$

$M := \mathrm{rkfixed}(y, 0, 50, 1000, G)$ $\qquad n := 0..1000$

$s := 46..47$

$M_{0,10} = 9\times 10^{-7}$ $\qquad t(n) := \dfrac{50\cdot n}{1000}$

**Находится расстояние между двумя траекториями $\delta_\kappa$ для времени**

$\delta_{n,10} := \left|Z_{n,10} - M_{n,10}\right|$ $\qquad w := 47..50$

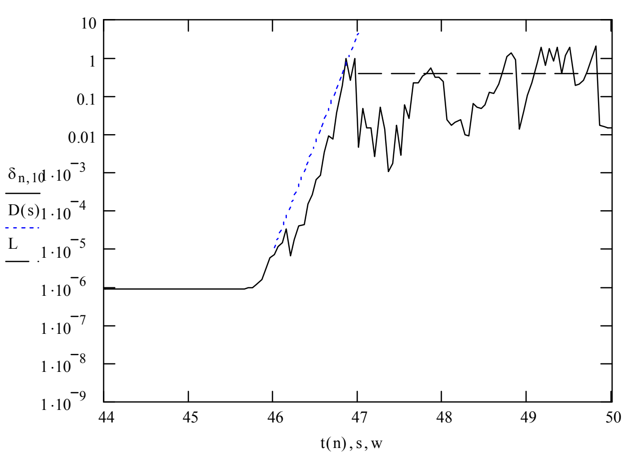
**Показатель Ляпунова находится по наклону прямой линии** $\qquad \lambda := 13.018$

**Находится расстояние в начальный момент времени** $\qquad \delta_{0,10} = 9\times 10^{-7}$

$D(s) := \dfrac{\delta_{0,10}}{10^{259}}\cdot e^{\lambda\cdot s}$ $\qquad L := \displaystyle\sum_{n=940}^{1000}\frac{\delta_{n,10}}{60}$ $\qquad L = 0.376$

$$p := \left(\frac{1}{\lambda}\right)\cdot \ln\left(\frac{L\cdot 10^{259}}{\delta_{0,10}}\right)$$

**-находится время забывания системой начальных условий** $\qquad p = 46.805$



# Решения задач главы 8

8.1.

## Шагающий в норме человек

**Задаются параметры уравнения и начальные условия**

$a := -0.8 \qquad f := -0.31134 \qquad N := 400 \qquad \Omega := 9 \qquad x0 := (-a)^{\frac{1}{2}}$

$h := 1 \qquad k := 0..\,N \qquad \tau := 0.07201$

$b_k := f \cdot \sin(\Omega \cdot k \cdot h) \qquad T := \frac{2\pi}{\Omega} \qquad T = 0.698$

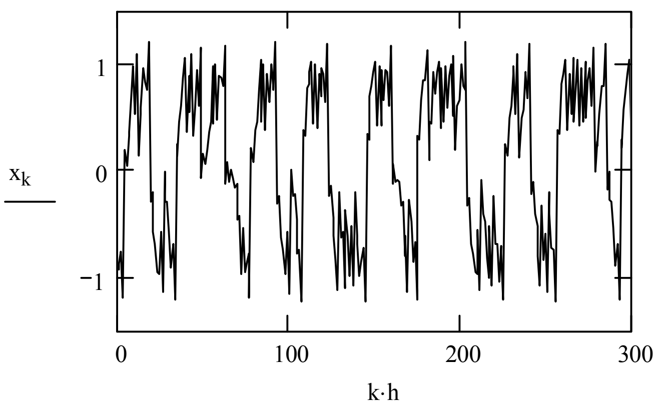
$x_0 := -0.92$ **-начальное условие для первой траектории x**

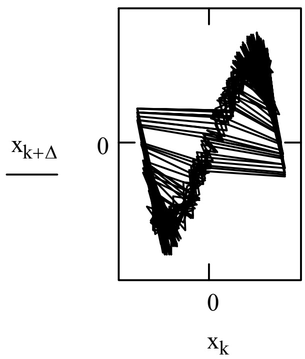
**Решается уравнение для первой траектории**

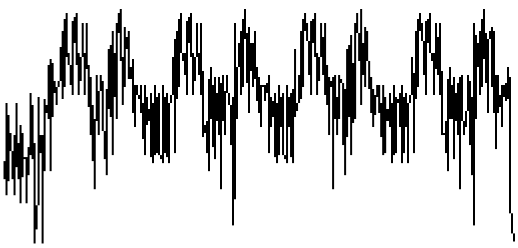
$$x_{k+1} := x_k - h \cdot \left[ \frac{(x_k)^3 + a \cdot x_k + b_k}{1 - \tau \cdot \left[ 3 (x_k)^2 + a \right]} \right]$$

**Обратная задача. Строятся решения, соответствующие визуально реально наблюдаемым. Псевдофазовый портрет с $\Delta$**

$\Delta := 1$



**Реально наблюдаемые решения**

**Решается уравнение для второй траектории**

$y_0 := -0.920001$ **-начальное условие для второй траектории y**

$$y_{k+1} := y_k - h\cdot\left[\frac{(y_k)^3 + a\cdot y_k + b_k}{1 - \tau\cdot\left[3(y_k)^2 + a\right]}\right]$$

$\lambda := 0.24$ **Показатель Ляпунова находится по наклону прямой линии**

**Находится расстояние между двумя траекториями $\delta_k$ для времени kh**

$\delta_k := |x_k - y_k|$ $s := 0..\,N$ $p := 55..\,190$

**Находится расстояние в начальный момент времени** $|\delta_0| = 10\times 10^{-7}$

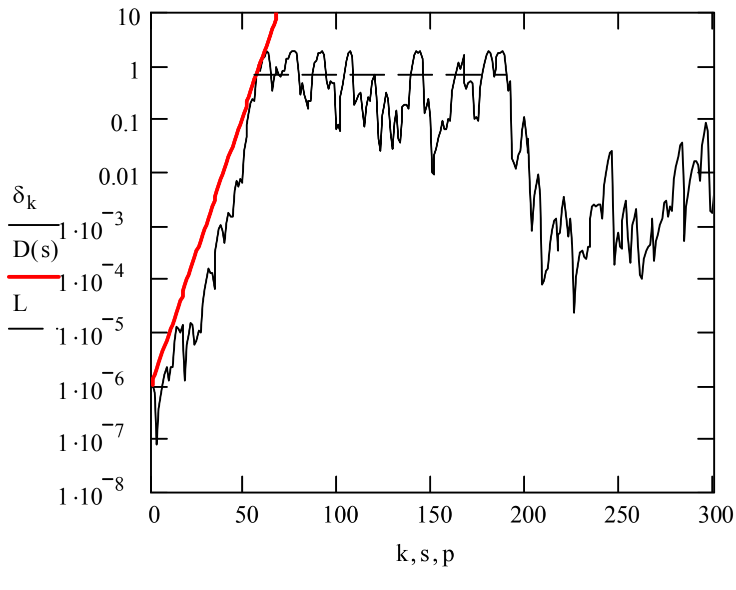
$D(s) := |\delta_0|\cdot e^{\lambda\cdot s}$

$$L := \sum_{k=55}^{190} \delta_k\cdot\left(\frac{1}{135}\right)$$

$L = 0.682$

$t := \left(\frac{1}{\lambda}\right)\cdot\ln\left(\frac{L}{|\delta_0|}\right)$

$t = 55.97$ **-находится время забывания системой н ачальных условий**




**Хаос в детерминированных системах подразумевает чувствительную зависимость от начальных условий. Это означает, что две траектории, близкие друг к другу в фазовом пространстве в некоторый начальный момент времени, экспоненциально расходятся за малое в среднем время. Харпактеристикой этой расходимости является показатель Ляпунова.**