На правах рукописи

Комиссарова Дарья Амировна

ПРОСТЫЕ ОЦЕНКИ ОБЛАСТЕЙ УСТОЙЧИВОСТИ В ДИСКРЕТНЫХ МОДЕЛЯХ ДИНАМИКИ ПОПУЛЯЦИЙ

05.13.18 – математическое моделирование,
численные методы и комплексы программ

АВТОРЕФЕРАТ
диссертации на соискание ученой степени
кандидата физико-математических наук

Екатеринбург – 2008

Работа выполнена на кафедре математического анализа
ГОУ ВПО «Южно–Уральский государственный университет»

Научный руководитель: доктор физико–математических наук, профессор Кипнис Михаил Маркович

Официальные оппоненты: доктор физико–математических наук, профессор Долгий Юрий Филиппович

кандидат физико–математических наук, доцент Малыгина Вера Владимировна

Ведущая организация: ГОУ ВПО «Тамбовский государственный университет им. Г.Р. Державина»

Защита диссертации состоится «........» .... 2008 г. в .... часов на заседании диссертационного совета Д 212.286.10 по защите докторских и кандидатских диссертаций при ГОУ ВПО «Уральский государственный университет им. А.М.Горького» по адресу:
620083, г. Екатеринбург, пр. Ленина, 51, комн. 248.

С диссертацией можно ознакомиться в научной библиотеке ГОУ ВПО «Уральский государственный университет им. А.М.Горького».

Автореферат разослан «.........» .... 2008 г.

Ученый секретарь
диссертационного совета,
доктор физ.-мат. наук,
профессор В.Г. Пименов

ОБЩАЯ ХАРАКТЕРИСТИКА РАБОТЫ

Актуальность темы. В последние годы модели динамики популяций интенсивно изучались в работах таких авторов, как E.C. Pielou, C.W. Clark, K. Gopalsamy, J.H. Jaroma, S.A. Kuruklis, G. Ladas, V.L. Kocic, H.B. Nichols, M. Begon, M. Mortimer, F.R. Gell, C.M. Roberts, Л.В. Недорезов, В.Н. Новосельцев и многих других.

В настоящее время актуальна проблема устойчивости скалярных и матричных разностных уравнений, являющихся линеаризациями дискретных уравнений динамики популяций. Изучению этой проблемы посвящены работы В.Б. Колмановского, А.М. Родионова, Ю.П. Николаева, А.Н. Новоселова, А.Д. Козака, М.М Кипниса, L. Berezansky, E. Braverman, E. Liz, J.B. Ferreiro, M. Pituk, F.M. Dannan, S.N. Elaydi, K. Gopalsamy, K.L. Cooke, I. Györi, F. Hartung, E.I. Jury, I. Kovácsvölgyi, S.A. Kuruklis, J.P. LaSalle, S.A. Levin, R. May, S. Zhang и многих других авторов.

При нынешней вычислительной технике любая задача об устойчивости конкретной дискретной системы с точно определенными коэффициентами невысокой размерности решается в секунды. Но практически в любой модели динамики популяций коэффициенты не могут быть высчитаны точно (это касается и технических систем, хотя, возможно, в меньшей степени). Поэтому актуальна задача исследования геометрии области устойчивости самых общих дискретных уравнений, чтобы по "облаку" возможных коэффициентов модели динамики популяций оценить, находится ли оно, полностью или частично, в области устойчивости в пространстве параметров. Полное описание области устойчивости скалярного разностного уравнения с двумя запаздываниями, например, проведено в работе М.М. Кипниса и Р.М. Нигматулина[1]. Геометрия области устойчивости для более общих уравнений и систем изучается в работах Б.Т. Поляка и Е.Н. Грязиной[2]

[1]Кипнис, М.М. Устойчивость трехчленных линейных разностных уравнений с двумя запаздываниями / М.М. Кипнис, Р.М. Нигматулин // АиТ. - 2004. - № 11. - С. 25–39.

[2]Грязина, Е.Н. К теории D-разбиения / Е.Н. Грязина // АиТ. - 2004. - № 12. - С. 15–28; Gryazina, E.N. Stability regions in the parameter space: D-decomposition revisited / E.N. Gryazina, B.T. Polyak // Automatica. - 2006. - № 1. - P. 13–26.

и Ю.П. Николаева[3]. Вышеуказанные работы обнаруживают такую изощренность областей устойчивости, что становится очевидной нужда в простых, эффективных, быстро проверяемых (explicit) методах оценки областей устойчивости, причем для самых общих уравнений, которые могут содержать несколько (или много) запаздываний. Именно это и является темой диссертации.

Актуальность этой задачи подтверждается публикациями последних лет, наряду со статьями автора диссертации и ее научного руководителя, работ Э. Лиза[4], Л. Березанского[5], К. Кука и И. Дьери[6], И. Дьери и Ф. Хартунга[7]. Результаты автора диссертации переносят результаты двух первых из вышеназванных работ на более общие системы, и усиливают оценки двух последних работ. Об актуальности темы также свидетельствует появление с интервалом в четыре месяца в одном журнале статьи китайских исследователей Танга и Джианга[8] и статьи автора диссертации[9] (совместно с научным руководителем). Эти две статьи конкурируют в простых оценках областей устойчивости. Как показано в диссертации, во многих случаях оценки автора диссертации эффективнее.

Цель работы — поиск простых эффективных достаточных признаков асимптотической устойчивости разностных уравнений высших порядков

[3]Николаев, Ю.П. Анализ геометрии D-разбиения двумерной плоскости произвольных коэффициентов характеристического полинома дискретной системы / Ю.П. Николаев // АиТ. - 2004. - № 12. - С. 49–61;

Николаев, Ю.П. К исследованию геометрии множества устойчивых полиномов линейных дискретных систем / Ю.П. Николаев // АиТ. - 2002. - № 7. - С. 44–54.

[4]Liz, E. On explicit conditions for the asymptotic stability of linear higher order difference equations / E. Liz // J. Math. Anal. Appl. - 2005. - V. 303. - P. 492–498.

[5]Berezansky, L. Sufficient conditions for the global stability of nonautonomous higher order difference equations / L. Berezansky, E. Braverman, E. Liz // J. Difference Equ. Appl. - 2005. - V. 11, № 9. - P. 785–798.

[6]Cooke, K.L. Numerical approximation of the solutions of delay differential equations on an infinite interval using piesewise constant arguments / K.L.Cooke, I. Györi // Comp. Math. Appl. - 1994. - V. 28. - P. 81–92.

[7]Györi, I. Stability in delay perturbed differential and difference equations / I. Györi, F. Hartung // Fields Institute Communications. - 2001. - V. 29. - P. 181–194.

[8]Tang, X.H. Asymptotic behavior of Volterra difference equations / X.H. Tang, Z. Jiang // J. Difference Equ. Appl. - 2007. - V. 13, № 1. - P. 25–40.

[9]Kipnis, M.M. A note on explicit stability conditions for autonomous higher order difference equations / M.M. Kipnis, D.A. Komissarova // J. Difference Equ. Appl. - 2007. - V. 13, № 5. - P. 457–461.

для оценки областей устойчивости моделей динамики популяций. Цель включает перенос на линейные разностные системы некоторых признаков асимптотической устойчивости соответствующих скалярных уравнений, чтобы они были применимы к многомерным моделям динамики популяций; улучшение известных достаточных признаков асимптотической устойчивости линейных разностных уравнений, чтобы повысить эффективность применения их к моделям динамики популяций с многими запаздываниями.

Методика исследования. В работе используются методы Z-преобразования, принцип аргумента, конструирование и анализ годографов систем и уравнений. Используется также один из современных методов — удлинение памяти разностных уравнений. Этот метод был применен впервые А. Халанаем[10] для дифференциальных уравнений, а затем перенесен на разностные уравнения Лизом[4] и Лизом, Ивановым и Ферейро[11].

Научная новизна работы. Новыми являются следующие результаты работы:

1. Ослаблены известные ранее достаточные условия асимптотической устойчивости линейных разностных уравнений высоких порядков. Получен симплекс устойчивости в пространстве параметров уравнений, принадлежность к которому параметров уравнения гарантирует устойчивость.

2. Доказана максимальность найденного симплекса устойчивости.

3. Получены достаточные условия асимптотической устойчивости разностного уравнения Вольтерра в свертках для моделей динамики популяций с учетом неограниченной предыстории.

4. Найдены достаточные признаки асимптотической устойчивости и неустойчивости линейных разностных систем, аналогичные известным признакам для соответствующих скалярных уравнений.

[10]Halanay, A. Differential equations: stability, oscillations, time lags / A. Halanay. - New York : Academic press, 1966.

[11]Liz, E. Discrete Halanay-type inequalities and applications / E. Liz, A. Ivanov, J.B. Ferreiro // Nonlinear Analysis. - 2003. - V. 55, № 6. - P. 669–678.

5. Получено характеристическое уравнение линейной разностной системы, позволяющее анализировать поведение демографического вектора в моделях популяций.

Практическая и теоретическая ценность. Изучение динамики популяций — важный раздел прикладной математики, в котором существенную роль играют запаздывания, длинная память, последействие — три названия по существу одного феномена. Те же эффекты возникают и в технических системах. Задача выявления устойчивости в таких случаях имеет первостепенную важность.

Чаще устойчивость в динамике популяции является желательным фактом, если речь идет об устойчивости ненулевого уровня популяции тех видов, которые важны для сохранения биологического многообразия Земли. Устойчивость нежелательна — если речь идет об устойчивости нулевого уровня популяции, так как в этом случае устойчивость означает ее неизбежную гибель. Поэтому для нас важны признаки устойчивости моделей динамики популяций, которые и являются предметом диссертации.

В исследовании устойчивости, как показал опыт, разностные модели ничуть не хуже дифференциальных. В них выявляются те же эффекты (устойчивость и неустойчивость, бифуркации и т.д.), но по количеству исследование разностных уравнений значительно уступает исследованию дифференциальных уравнений.

Данная работа является вкладом в установление равновесия между исследованиями непрерывных и дискретных моделей.

Результаты диссертации используются в университетах в преподавании специальных курсов, посвященных динамике систем.

Апробация работы. Основные результаты диссертации были представлены на Всероссийской научной конференции «Математика. Механика. Информатика» (Челябинск, 2006 г.), XIV Международной конференции «Математика. Компьютер. Образование» (Пущино, 2007 г.), XII региональной научно-практической конференции «Математика. Информатика. Технологический подход к обучению в вузе и школе» (Курган, 2007 г.), Международной конференции «Dynamical System Modelling and Stability

Investigation» (Киев, 2007 г.), 12-й Международной конференции по разностным уравнениям (ICDE 2007, Лиссабон, Португалия, 2007 г.), VIII Всероссийском симпозиуме по прикладной и промышленной математике (Сочи, 2007 г.), а так же на семинаре профессора В.П. Тананы в Южно-Уральском государственном университете (Челябинск, 2006 г.).

Публикации. Основные результаты по теме диссертации опубликованы в 10 работах, из них 2 – в изданиях, включенных в перечень ВАК (1 – статья и 1 – тезисы). Во всех работах, выполненных в соавторстве с научным руководителем, последнему принадлежит постановка задач и общее руководство.

Структура и объем работы. Диссертационная работа состоит из введения, двух глав, заключения и списка литературы, включающего 113 наименований. Материал изложен на 102 страницах машинописного текста, включая 14 рисунков.

СОДЕРЖАНИЕ ДИССЕРТАЦИИ

Во введении обоснована актуальность темы диссертации, определены цель, задачи и методы исследования, кратко изложены основные результаты диссертации.

Первая глава «Устойчивость систем разностных уравнений с запаздываниями, описывающих динамику популяций» посвящена исследованию асимптотической устойчивости линейных разностных систем.

В параграфе 1.1 обосновано применение математических моделей для исследования устойчивости биологических систем. Изложены основания для рассмотрения разностной системы общего вида, как линеаризованной модели динамики популяции, а также введены основные определения, касающиеся асимптотической устойчивости разностных систем.

Под асимптотической устойчивостью уравнения

$$x_n = \sum_{i=1}^{k} A_i x_{n-i}, \tag{1}$$

где A_i действительные матрицы размера $(m \times m)$ $(1 \leqslant i \leqslant k)$,
$x_n : \mathbb{N} \to \mathbb{R}^m$, будем понимать асимптотическую устойчивость его нулевого

решения. Здесь координаты вектора x_n обозначают либо численность j-й популяции ($1 \leqslant j \leqslant m$), либо численность различных возрастных страт одной популяции в момент наблюдений n, либо численность особей одной популяции, находящихся в разных ареалах. Другие возможные интерпретации координат x_n — это отклонения указанных величин от стационарных значений, определяемых условиями обитания популяции.

Определение 1. Нулевое решение уравнения (1) устойчиво, если

$$\forall\varepsilon > 0\ \exists\delta > 0\,[\ \forall i\ (-k \leqslant i \leqslant -1)\ \|x_i\| < \delta\ \Rightarrow \forall n \geqslant 0\ \|x_n\| < \varepsilon\,].$$

Определение 2. Нулевое решение уравнения (1) асимптотически устойчиво, если оно устойчиво и для любого решения (x_n) этого уравнения $\lim\limits_{n\to\infty} x_n = 0$.

В параграфе 1.2 представлены некоторые известные признаки асимптотической устойчивости линейных скалярных уравнений вида

$$x_n = \sum_{i=1}^{k} a_i x_{n-i}, \tag{2}$$

где $a_i \in \mathbb{R}$ ($1 \leqslant i \leqslant k$). Для частного случая уравнения (2), а именно уравнения

$$x_n = x_{n-1} - bx_{n-k}, \tag{3}$$

Левин и Мэй[12] нашли следующий критерий асимптотической устойчивости: уравнение (3) асимптотически устойчиво тогда и только тогда, когда

$$0 < b < 2\sin\frac{\pi}{2(2k-1)}. \tag{4}$$

Поскольку в одной биологической нише обитают различные биологические виды, на динамику популяции неизбежно оказывают воздействие и особи других популяций. Поэтому целесообразен переход от уравнения (2) к многомерной модели (1). В работах Л. Березанского, Е. Браверман, Э. Лиза, М. Питука, Ж. Ферейро (2002 – 2005 гг.), были найдены простые

[12]Levin, S.A. A note on difference-delay equations / S.A. Levin, R. May // Theor. Pop. Biol. - 1976. - V. 9, № 2. - P. 178–187.

достаточные признаки асимптотической устойчивости уравнения (2), основанные на удлинении памяти уравнения. В диссертации эти результаты перенесены на системы (1).

В параграфе 1.3 получено характеристическое уравнение системы (1) и доказан критерий асимптотической устойчивости.

Теорема 1. *Уравнение* (1) *асимптотически устойчиво тогда и только тогда, когда все корни уравнения*

$$\det(Ez^k - \sum_{i=1}^{k} A_i z^{k-i}) = 0 \tag{5}$$

лежат внутри единичного круга. Если хотя бы один корень уравнения (5) *лежит вне единичного круга, то система* (1) *неустойчива.*

Уравнение (5) мы называем *характеристическим* для (1).

Получен достаточный признак неустойчивости системы (1).

Теорема 2. *Если* $|\det A_k| > 1$*, то система* (1) *неустойчива.*

В параграфе 1.4 доказан многомерный аналог известного условия устойчивости Кона для скалярных уравнений.

Теорема 3. *Если*

$$\sum_{i=1}^{k} \|A_i\| < 1, \tag{6}$$

то нулевое решение уравнения (1) *асимптотически устойчиво.*

В параграфе 1.5 получены достаточные признаки асимптотической устойчивости системы (1), для вывода которых применяются идеи Халаная, ранее использовавшиеся другими авторами[4,11] для нахождения признаков устойчивости скалярных уравнений.

Теорема 4. *Если существуют натуральное число* $p \quad (1 \leqslant p \leqslant k)$ *и множество индексов* $I \subset \{p, p+1, \ldots, k\}$*, такие что*

$$\left\| \sum_{i \in I} A_i \right\| + \sum_{i \notin I} \|A_i\| + \sum_{i \in I} \|A_i\| (i-p) \left(\|A_1 - E\| + \sum_{j=2}^{k} \|A_j\| \right) < 1,$$

то уравнение (1) *асимптотически устойчиво.*

Теорема 5. *Если существуют натуральное число p $(1 \leqslant p \leqslant k)$ и множество индексов $I \subset \{p, p+1, \ldots, k\}$, такие что*

$$\left\| \sum_{i \in I} (-1)^{i+1} A_i \right\| + \sum_{i \notin I} \|A_i\| + \sum_{i \in I} \|A_i\| (i-p) \left(\|A_1 + E\| + \sum_{j=2}^{k} \|A_j\| \right) < 1,$$

то уравнение (1) *асимптотически устойчиво.*

В параграфе 1.6 произведен перенос полученных признаков устойчивости и неустойчивости на матричное уравнение

$$x_n = Ax_{n-1} + Bx_{n-k}, \tag{7}$$

где A, B действительные матрицы размера $(m \times m)$, $x_n : \mathbb{N} \to \mathbb{R}^m$, натуральное число k – запаздывание.

На примерах проиллюстрировано применение найденных признаков асимптотической устойчивости.

Здесь же приведен пример, показывающий невозможность сформулировать критерий асимптотической устойчивости системы (7) в терминах ограничений только на собственные числа матриц A и B.

В параграфе 1.7 найденные в параграфе 1.6 признаки устойчивости применены для исследования поведения дискретной модели динамики популяций «хищник–жертва»[13] с учетом влияния двух поколений: непосредственно предшествующего и отстающего на k единиц времени

$$\begin{cases} x_n = \alpha x_{n-1}(1 - x_{n-1}) - x_{n-k}\, y_{n-k}, \\ y_n = \frac{1}{\beta} x_{n-1}\, y_{n-1}, \end{cases} \tag{8}$$

где $\alpha \geqslant 0$, $\beta > 0$ – некоторые параметры, x_n, y_n – численности соответственно жертв и хищников в n-й момент времени. Система (8) имеет три стационарные точки. Посредством линеаризации получена линейная система, которая проанализирована с помощью полученных автором признаков устойчивости. Аналогичным образом изучена дискретная модель

[13]Murakami, K. Stability and bifurcation in a discrete-time predator–prey model / K. Murakami // J. Difference Equ. Appl. - 2007. - V. 13, № 10. - P. 911–925.

«хищник–жертва», в которой модель Пиелоу дополнена взаимодействием с хищником

$$\begin{cases} x_n = \frac{\alpha x_{n-1}}{1+\beta x_{n-k}} - \gamma x_{n-1} y_{n-1}, \\ y_n = \delta x_{n-1} y_{n-1}. \end{cases} \tag{9}$$

Здесь $\alpha > 0$ — коэффициент прироста популяции жертв, $\beta > 0$ — коэффициент обратной связи, $\gamma > 0$ характеризует возможность гибели жертвы при встрече с хищниками, $\delta > 0$ характеризует возможность роста популяции хищников за счет их взаимодействия с жертвами.

В параграфе 1.8 изучен частный случай системы (7) при $A = -E$, для которого найден критерий асимптотической устойчивости в терминах ограничений на собственные числа матрицы B.

Теорема 6. *Система*

$$x_n = -x_{n-1} + Bx_{n-k} \tag{10}$$

асимптотически устойчива тогда и только тогда, когда все собственные значения матрицы B лежат внутри области комплексной плоскости, ограниченной кривой

$$\Gamma = \left\{ z \in C : z = (-1)^k 2i \sin \frac{\varphi}{2k-1} e^{i\varphi},\ -\frac{\pi}{2} \le \varphi \le \frac{\pi}{2} \right\}. \tag{11}$$

На рисунке 1 представлены некоторые овалы устойчивости для уравнения (10).

Если запаздывание $k = 1$, то овал устойчивости – круг радиуса 1 с центром в точке $(1+0i)$. Если k нечетное, то овал устойчивости расположен в правой полуплоскости комплексной плоскости, а если k четное, то он расположен в левой полуплоскости. Мы констатируем «прыжки» областей устойчивости при изменении запаздывания на единицу.

Таким образом, для асимптотической устойчивости уравнения (10) необходимо выполнение условий $\mathrm{Re}\lambda_i > 0$ при нечетном k или $\mathrm{Re}\lambda_i < 0$ при четном k. Здесь λ_i $(1 \le i \le m)$ – собственные значения матрицы B.

Следствие 1. *Если существуют собственные значения λ_1 и λ_2 матрицы B такие, что* $\mathrm{Re}\,\lambda_1 > 0,\ \mathrm{Re}\,\lambda_2 < 0$, *то система $x_n = -x_{n-1} + Bx_{n-k}$ неустойчива при любом значении k.*

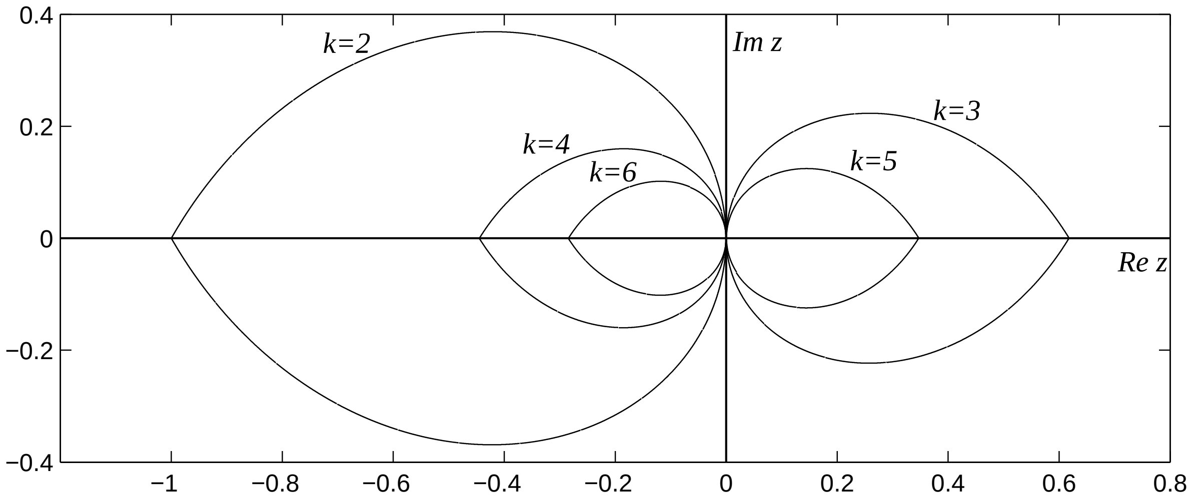

Рис. 1: Овалы устойчивости системы (10).

Применение полученных признаков проиллюстрировано на примерах.

В параграфе 1.9 приведено сравнение полученных в первой главе результатов с известными признаками асимптотической устойчивости скалярных и матричных разностных уравнений.

Во второй главе «Устойчивость линейных разностных уравнений с запаздываниями» изучается область устойчивости линейного разностного уравнения

$$x_n = x_{n-1} - \sum_{i=1}^{k} a_i x_{n-i}, \tag{12}$$

где $a_i \in \mathbb{R},\ (1 \leqslant i \leqslant k)$. При изучении локальных процессов, уравнение (12) можно рассматривать как модель динамики популяций. На больших временных интервалах уравнение (12) рассматривается как линеаризация относительно стационарного решения логистического уравнения Пиелоу с обратной связью по предыстории длины k

$$y_n = \frac{\alpha y_{n-1}}{1 + \sum\limits_{i=1}^{k} \beta_i y_{n-i}}. \tag{13}$$

Компоненты последовательности y_n обозначают численность популяции в момент наблюдений n, $\alpha > 1$ — коэффициент прироста популяции, $\beta_i > 0$ $(1 \leqslant i \leqslant k)$ — коэффициент обратной связи в момент наблюдений $n - i$.

В свою очередь, модель Пиелоу происходит от модели Бевертона-Холта

$$y_n = \frac{\alpha y_{n-1}}{1 + \beta y_{n-1}},$$

в которой численность популяции в данный момент наблюдений зависит только от ее численности в предыдущий момент.

Модель (13) имеет два стационарных решения, одно из которых нулевое, а второе положительное. В уравнении (12) значения x_n интерпретируются как отклонения значений y_n от своих стационарных значений. Если уравнение (12) получено линеаризацией уравнения вокруг нулевого решения, то асимптотическая устойчивость нулевого решения уравнения (12) означает неизбежность депопуляции. Если же (12) получено линеаризацией уравнения вокруг положительного стационарного решения, то асимптотическая устойчивость означает стремление численности популяции к своему стационарному положительному решению.

Отсюда ясна важность проблемы исследования устойчивости разностных уравнений для выявления устойчивости биологических систем.

В параграфе 2.1 приведены линеаризации различных вариантов логистического уравнения. Указана связь между логистическим уравнением Пиелоу (13) и разностным уравнением (12). Поставлена задача поиска простых достаточных условий устойчивости.

В параграфе 2.2 сформулирована гипотеза о симплексе устойчивости в пространстве параметров уравнения (12).

Определение 3. Областью устойчивости уравнения (12) будем называть множество всех таких конечных последовательностей коэффициентов $(a_1, \ldots, a_k)$, что уравнение (12) с данными коэффициентами $(a_1, \ldots, a_k)$ асимптотически устойчиво.

С помощью численных экспериментов, основанных на методе D - разбиения и принципе аргумента, может быть построена область устойчивости уравнения

$$x_n = x_{n-1} - a x_{n-m} - b x_{n-k}. \tag{14}$$

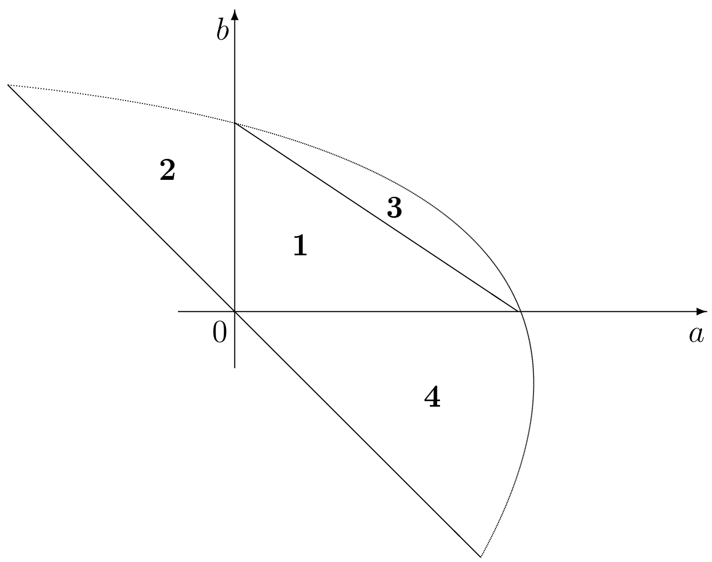

Рис. 2: 1, 2, 3, 4 — область устойчивости уравнения (14) при $m = 3, k = 5$;
1 — симплекс устойчивости (15).

Сопоставляя рисунок 2 с результатом работы Левина-Мэя (см. условие (4)), и рассматривая только неотрицательные коэффициенты a, b, мы пришли к гипотезе, что симплекс

$$a \geqslant 0,\ b \geqslant 0, \quad 0 < \frac{a}{2\sin\frac{\pi}{2(2m-1)}} + \frac{b}{2\sin\frac{\pi}{2(2k-1)}} < 1 \tag{15}$$

является подмножеством области устойчивости уравнения (14).

Расширяя эту гипотезу для уравнения (12), мы выдвинули гипотезу, что симплекс

$$a_s \geqslant 0\ (1 \leqslant s \leqslant k), \quad 0 < \sum_{s=1}^{k} \frac{a_s}{2\sin\frac{\pi}{2(2s-1)}} < 1$$

является подмножеством области устойчивости уравнения (12).

Эта гипотеза действительно дает простую оценку области устойчивости уравнения (12), а следовательно, и дискретных одномерных моделей динамики популяций, сколь бы сложными они ни были. Ее доказательство является центром главы 2 диссертации.

В параграфе 2.3 приведены некоторые вспомогательные леммы, необходимые для дальнейших рассуждений.

В параграфе 2.4 представлен основной результат данной главы, в котором определена граница симплекса устойчивости в пространстве положительных параметров уравнения (12).

Теорема 7. *Если* $a_s \geqslant 0 \quad (1 \leqslant s \leqslant k)$ *и*

$$0 < \sum_{s=1}^{k} \frac{a_s}{2\sin\frac{\pi}{2(2s-1)}} < 1, \tag{16}$$

то уравнение (12) *асимптотически устойчиво.*

В параграфе 2.5 получены следствия из основной теоремы 7, которые дают еще более простые достаточные признаки асимптотической устойчивости уравнения (12).

Теорема 8. *Если* $a_s \geqslant 0 \quad (1 \leqslant s \leqslant k)$ *и*

$$0 < \sum_{s=1}^{k} s\, a_s \leqslant \frac{\pi}{2}, \tag{17}$$

то уравнение (12) *асимптотически устойчиво.*

Как показано в дальнейшем, в параграфе 2.6, постоянная $\frac{\pi}{2}$ в теореме 8 неулучшаема. Однако если мы позволим правой части неравенства (17) быть зависимой от порядка уравнения, то ее можно увеличить, что подтверждается следующей теоремой.

Теорема 9. *Если* $a_s \geqslant 0 \quad (1 \leqslant s \leqslant k)$ *и*

$$0 < \sum_{s=1}^{k} s\, a_s < 2k\sin\frac{\pi}{2(2k-1)}, \tag{18}$$

то уравнение (12) *асимптотически устойчиво.*

В параграфе 2.6 доказана неулучшаемость полученных в двух предыдущих параграфах результатов. Следующая теорема показывает невозможность увеличения хотя бы одного из знаменателей в неравенстве (16) с сохранением устойчивости уравнения (12).

Теорема 10. *Пусть* $A_s \geqslant 0$ $(1 \leqslant s \leqslant k)$, *пусть существует такое* s $(1 \leqslant s \leqslant k)$,*что* $A_s > 2\sin\frac{\pi}{2(2s-1)}$. *Тогда найдется точка* $(a_1, \ldots, a_k)$ *такая, что* $a_s \geqslant 0 \quad (1 \leqslant s \leqslant k)$, $0 < \sum_{s=1}^{k} \frac{a_s}{A_s} < 1$ *и уравнение* (12) *с коэффициентами* $a_1, \ldots, a_k$ *неустойчиво.*

На рисунке 3 показан симплекс устойчивости разностного уравнения с тремя запаздываниями

$$x_n = x_{n-1} - a_r x_{n-r} - a_m x_{n-m} - a_k x_{n-k}. \tag{19}$$

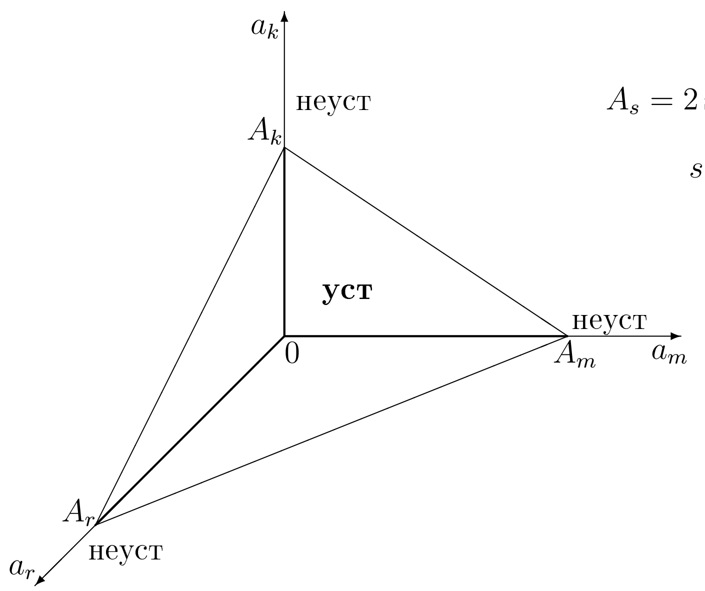

Рис. 3: Симплекс устойчивости уравнения (19).

Далее в параграфе 2.6 доказано, что движение констант в правой части неравенства (17)

$$1 \text{ (Кук–Дьери}^6) \to 1 + \frac{1}{e} \text{ (Дьери–Хартунг}^7) \to \frac{3}{2} \text{ (Танг–Джианг}^8)$$
$$\to \frac{\pi}{2} \text{ (результат диссертации).}$$

должно быть остановлено на константе $\frac{\pi}{2}$.

Теорема 11. *Для всякого* $r > \frac{\pi}{2}$ *найдется такое* $k \in \mathbb{N}$ *и точка* $(a_1, \ldots, a_k) \in \mathbb{R}^k$ *такая, что* $a_s \geqslant 0 \quad s$ $(1 \leqslant s \leqslant k)$, $0 < \sum_{s=1}^{k} s\, a_s \leqslant r$ *и уравнение* (12) *с коэффициентами* $a_1, \ldots, a_k$ *неустойчиво.*

Правая часть неравенства (18) также неулучшаема.

Теорема 12. *Для всякого* $R \geqslant 2k \sin\frac{\pi}{2(2k-1)}$ *найдется точка* $(a_1, \ldots, a_k)$ *такая, что* $a_s \geqslant 0$ $(1 \leqslant s \leqslant k)$, $0 < \sum_{s=1}^{k} s\, a_s < R$ *и уравнение* (12) *с коэффициентами* $a_1, \ldots, a_k$ *неустойчиво.*

В параграфе 2.7 указаны достаточные условия локальной асимптотической устойчивости логистического уравнения Пиелоу.

В параграфе 2.8 приведены некоторые теоретические факты относительно разностного уравнения Вольтерра в свертках

$$x_n = x_{n-1} - \sum_{i=1}^{n} a_i x_{n-i}, \quad n = 1, 2, \ldots \tag{20}$$

где $a_i \in \mathbb{R}$, $a_i \geqslant 0$ $(i = 1, 2, \ldots)$, и существуют $c > 0$, $q \in (0, 1)$ такие, что для всех $n \in \mathbb{N}$ $a_n \leqslant cq^n$.

В параграфе 2.9 доказаны достаточные условия асимптотической устойчивости уравнения (20).

Теорема 13. *Пусть $a_s \geqslant 0$ для всех $s \in \mathbb{N}$. Если*

$$0 < \sum_{s=1}^{\infty} \frac{a_s}{2 \sin \frac{\pi}{2(2s-1)}} < 1,$$

то уравнение Вольтерра (20) асимптотически устойчиво.

Отсюда вытекает следующий результат.

Теорема 14. *Пусть $a_s \geqslant 0$ для всех $s \in \mathbb{N}$. Если*

$$0 < \sum_{s=1}^{\infty} s\, a_s \leqslant \frac{\pi}{2},$$

то уравнение Вольтерра (20) асимптотически устойчиво.

В параграфе 2.10 проведено сравнение полученных во второй главе результатов с известными результатами относительно дифференциальных и интегро-дифференциальных уравнений. Показано, что найденные автором достаточные условия устойчивости лучше некоторых известных признаков устойчивости. Проведено сравнение найденных признаков асимптотической устойчивости с конкурирующей работой[8], в которой границы области гарантированной устойчивости описываются нелинейными уравнениями. Сделан общий вывод о частичном взаимном перекрытии признаков, найденных в данной диссертации, с признаком работы Танга и Джианга[8]. Мы констатируем, что преимущество признака устойчивости автора диссертации – в его простоте. Указаны классы разностных уравнений, в которых признаки автора заведомо лучше признака Танга и Джианга. Сравнение проиллюстрировано примерами и рисунками.

В заключении суммируются все полученные в диссертации результаты.

Публикации по теме диссертации

Статьи, опубликованные в ведущих рецензируемых научных журналах, определенных ВАК

1. Комиссарова, Д.А. Простые признаки устойчивости дискретных моделей динамики популяций / Д.А. Комиссарова // Системы управления и информационные технологии. - 2007. - № 2.2(28). - С. 240–242.

2. Комиссарова, Д.А. Об устойчивости дискретных моделей динамики популяций / Д.А. Комиссарова, М.М. Кипнис // Обозрение прикл. и промышл. матем. - 2007. - Т. 14, Вып. 4. - С. 726–727.

Другие публикации

3. Kipnis, M.M. Stability of a delay difference system / M.M. Kipnis, D.A. Komissarova // Advances in Difference Equ. - 2006. - V. 2006. - P. 1–9. - `http://www.hindawi.com/GetArticle.aspx?doi=10.1155/ADE/2006/31409`

4. Комиссарова, Д.А. Устойчивость некоторых разностных систем / Д.А. Комиссарова, М.М. Кипнис // Изв. Челябинского науч. центра. - 2006. - Вып. 1(31). - С. 1–4. - `http://csc.ac.ru/ej/issue/ru/34`

5. Комиссарова, Д.А. Устойчивость разностных систем с запаздыванием / Д.А. Комиссарова // Математика. Механика. Информатика: Тез. докл. Всерос. науч. конф., Челябинск, 19-22 сент. 2006. - Челябинск : ЧелГУ, 2006. - С. 71.

6. Комиссарова, Д.А. Устойчивость линейных многомерных моделей с запаздыванием / Д.А. Комиссарова // Математика. Компьютер. Образование: Тез. докл. XIV междунар. конф., Пущино, 22-27 янв. 2007. - Ижевск : НИЦ "Регулярная и хаотическая динамика" , 2007. - С. 65.

7. Комиссарова, Д.А. Простое условие асимптотической устойчивости для разностного уравнения $x(n) = x(n-1) - ax(n-m) - bx(n-k)$ / Д.А. Комиссарова, М.М. Кипнис // Изв. Челябинского науч. центра. - 2007. - Вып. 1(35). - С. 1–5. - `http://csc.ac.ru/ej/issue/ru/40`

8. Комиссарова, Д.А. Достаточные условия асимптотической устойчивости общей разностной системы / Д.А. Комиссарова // Вестник ЮУрГУ. Сер. "Математика, физика, химия". - 2007. - Вып. 8, № 3(75). - С. 24–27.

9. Kipnis, M.M. A note on explicit stability conditions for autonomous higher order difference equations / M.M. Kipnis, D.A. Komissarova // J. Difference Equ. Appl. - 2007. - V. 13, № 5. - P. 457–461.

10. Кипнис, М.М. Признак устойчивости линейных разностных уравнений / М.М. Кипнис, Д.А. Комиссарова // Математика. Информатика. Технологич. подход к обучению в вузе и школе: Материалы XII региональной научно-практической конф., Курган, 24-25 апреля 2007. - Курган : КГУ, 2007. - С. 8–9.

Подписано в печать 07.03.2008
Формат 60x84 1/16. Усл. печ. л. 1,0. Уч.-изд. л. 1,0.
Бумага офсетная. Тираж 100 экз.
Издательство Южно-Уральского государственного университета
454080, г. Челябинск, пр. Ленина, 76