

ФЕДЕРАЛЬНОЕ АГЕНТСТВО ПО ОБРАЗОВАНИЮ  
Государственное образовательное учреждение  
высшего профессионального образования  
«Уральский государственный университет им. А.М. Горького»

ИОНЦ «Бизнес - информатика»

Математико-механический факультет

Кафедра вычислительной математики

---

## **МЕТОДЫ ВЫЧИСЛЕНИЙ В ЭКОНОМИКЕ**

**Сборник задач**

**Екатеринбург  
2007**

В методическом пособии рассмотрено решение типовых задач по основным разделам курса «Методы вычислений в экономике»: теория погрешности, численные методы решения уравнений, интерполяция, численное интегрирование, численное решение задачи Коши; представлен обширный список задач по этим темам; приведены варианты лабораторных работ. Излагаемый материал рекомендуется использовать при проведении практических и лабораторных занятий, при подготовке к государственному экзамену.

## ОГЛАВЛЕНИЕ

|                                                             |    |
|-------------------------------------------------------------|----|
| ПОГРЕШНОСТЬ РЕЗУЛЬТАТА ЧИСЛЕННОГО РЕШЕНИЯ ЗАДАЧИ.           | 4  |
| ПРИБЛИЖЕННЫЕ МЕТОДЫ РЕШЕНИЯ НЕЛИНЕЙНЫХ УРАВНЕНИЙ.           | 6  |
| ПРИБЛИЖЕНИЕ ФУНКЦИЙ С ПОМОЩЬЮ ИНТЕРПОЛЯЦИОННЫХ МНОГОЧЛЕНОВ. | 9  |
| ЧИСЛЕННОЕ ИНТЕГРИРОВАНИЕ.                                   | 12 |
| ЧИСЛЕННОЕ РЕШЕНИЕ ЗАДАЧИ КОШИ.                              | 16 |

## ПОГРЕШНОСТЬ РЕЗУЛЬТАТА ЧИСЛЕННОГО РЕШЕНИЯ ЗАДАЧИ.

Пусть  $x^*$  – приближенное значение для  $x$ .

Абсолютной погрешностью  $x^*$  называется величина  $Ax^*$ , для которой справедливо неравенство  $|x - x^*| \leq Ax^*$ .

Величина  $\Delta x^*$ , удовлетворяющая неравенству

$$|(x - x^*) / x^*| \leq \Delta x^*, \text{ называется относительной погрешностью } x^*.$$

Абсолютная и относительная погрешности связаны соотношением:  $Ax^* = |x^*| \Delta x^*$ .

Зная  $x^*$  и  $Ax^*$  можно найти диапазон изменения  $x$ :

$$x^* - Ax^* \leq x \leq x^* + Ax^*$$

Пусть  $x^* = \sum x_i^*$ , тогда  $Ax^* = \sum Ax_i^*$

Относительная погрешность разности двух положительных чисел больше относительных погрешностей этих чисел, особенно если эти числа близки между собой. Это приводит к потере точности при вычитании близких чисел, что следует учитывать при выборе вычислительных схем.

При умножении и делении приближенных чисел их относительные погрешности складываются.

Пусть

$$r^* = \frac{x_1^* x_2^* \dots x_n^*}{y_1^* y_2^* \dots y_n^*}, \text{ тогда } \Delta r^* = \sum_{i=1}^n \Delta x_i^* + \sum_{i=1}^n \Delta y_i^*.$$

Пусть  $y^* = f(x^*)$ , тогда  $Ay^* = |f'(x^*)| Ax^*$ .

Для функции нескольких переменных  $y^* = f(x_1^*, x_2^*, \dots, x_n^*)$  справедливо соотношение:

$$Ay^* \leq \sum_{i=1}^n \left| \frac{\partial f}{\partial x_i} \right| \cdot Ax_i^*.$$

**Задача 1.** Стороны треугольника  $a^* = 17,3\text{см}$ ,  $b^* = 23,6\text{см}$ ,  $c^* = 14,2\text{см}$  измерены с абсолютными погрешностями  $Aa^* = Ab^* = Ac^* = 0,1\text{см}$ . Определить абсолютную погрешность периметра этого треугольника.

**Решение:**  $p^* = a^* + b^* + c^* = 17,3 + 23,6 + 14,2 = 55,1\text{см}$

$$Ap^* = A(a^* + b^* + c^*) = Aa^* + Ab^* + Ac^* = 3 \cdot 0,1 = 0,3\text{см}.$$

Получили: абсолютная погрешность периметра треугольника  $Ap^* = 0,3\text{см}$ . Последняя цифра в  $p^* = 55,1$  является сомнительной, т.к.  $Ap^* = 0,3 > 0,5 \cdot 10^{-1}$ .

**Задача 2.** Вычислить  $1 - \cos 1^\circ$  с помощью четырехзначных таблиц тригонометрических функций и оценить погрешность результата.

**Решение:** Если взять  $\cos 1^\circ$  непосредственно из таблиц, то мы получим

$$x^* = \cos 1^\circ = 0,9998, Ax^* = 0,00005;$$

$$y^* = 1 - \cos 1^\circ = 0,0002, Ay^* = 0,00005$$

$$\Delta y^* = \frac{Ay^*}{|y^*|} = \frac{0,5}{2} = 25\%$$

Преобразуем формулу для вычисления  $y^*$ :

$$y^* = 1 - \cos 1^0 = 2\sin^2 0^0 30'$$

По тем же таблицам находим:

$$x^* = \sin 0^0 30' = 0,0087, Ax^* = 0,00005,$$

$$\Delta x^* = \frac{0,00005}{0,0087} = 0,58\%$$

$$y^* = 2(x^*)^2 = 0,000151, \Delta y^* = \Delta(x^*)^2 = 2\Delta x^* = 1,16\%$$

и, следовательно,

$$Ay^* = |y^*| \cdot \Delta y^* = 0,000151 \cdot 0,0116 = 0,0000018$$

Таким образом, указанное преобразование позволило вычислить искомое число с двумя верными знаками и уменьшить его относительную погрешность более чем в 20 раз.

### ***Задачи для самостоятельного решения.***

1. Ребра прямоугольного параллелепипеда  $a^*$ ,  $b^*$ ,  $c^*$  измерены с абсолютными погрешностями  $Aa^* = Ab^* = Ac^* = 0,1$  см. Найти относительную погрешность его объема  $V = abc$ .

2. Найти погрешность решения уравнения  $x^2 - 2x + \lg 2 = 0$ , если  $\lg 2 = 0,30103\dots$  вычислять с 4 верными цифрами.

3. С какой точностью следует вычислить радиус основания  $r$  и высоту  $h$  цилиндра, чтобы его объем можно было определить с точностью до 1%?

4. Даны числа  $a^* = 1,137$  и  $b^* = 1,073$  с абсолютными погрешностями  $Aa^* = Ab^* = 0,011$ . Оценить погрешность их разности.

5. При измерении радиуса круга с точностью до 0,5 см получилось число 12 см. Найти абсолютную и относительную погрешности при вычислении площади круга.

6. Каждое ребро куба, измеренное с точностью до 0,02 см, оказалось равным 8 см. Найти абсолютную и относительную погрешности при вычислении объема куба.

7. Вычислить неустранимую погрешность в значении функции  $y = \sin \varphi$ , если известно, что погрешность аргумента не превышает половины градуса ( $A\varphi^0 \leq 0,5^0$ ;  $\varphi^0 = (\varphi_{\text{рад}}/\pi) \cdot 180^0$ ).

## ПРИБЛИЖЕННЫЕ МЕТОДЫ РЕШЕНИЯ НЕЛИНЕЙНЫХ УРАВНЕНИЙ.

**Постановка задачи:** Дано уравнение  $f(x) = 0$ . Определить отрезок  $[a, b]$ , на котором существует единственный корень данного уравнения. Найти корень этого уравнения с точностью  $\varepsilon = 0,5 \cdot 10^{-4}$ , используя разные методы отыскания корня.

1. **Метод половинного деления.** Для непрерывной монотонной функции  $f(x)$  условие  $f(a) \cdot f(b) < 0$  означает существование на отрезке  $[a, b]$  корня уравнения. Определив знак  $f(x)$  в средней точке  $c = (a + b) / 2$ , можно выбрать из отрезков  $[a, c]$  и  $[c, b]$  тот, на котором  $f(x)$  меняет знак, а, значит, имеет корень. Далее, на новом отрезке вдвое меньшей длины следует взять среднюю точку, определить в ней знак  $f(x)$  и т.д. Итерационный процесс заканчивается, когда найдется отрезок длины меньше  $\varepsilon$ :  $|b - a| < \varepsilon$ .

2. **Метод Ньютона.**

$$x_{n+1} = x_n - \frac{f(x_n)}{f'(x_n)}$$

3. **Модифицированный метод Ньютона**

$$x_{n+1} = x_n - \frac{f(x_n)}{f'(x_0)}$$

4. **Метод хорд**

$$x_{n+1} = x_n - \frac{f(x_n)}{f(x_n) - f(x_0)}(x_n - x_0)$$

5. **Метод подвижных хорд**

$$x_{n+1} = x_n - \frac{f(x_n)}{f(x_n) - f(x_{n-1})}(x_n - x_{n-1})$$

Методы 2 – 5 сходятся, если:

1.  $f(a) \cdot f(b) < 0$ ;
2.  $f'(x) \neq 0$  на  $[a, b]$ ;
3.  $f''(x) \neq 0$  на  $[a, b]$ ;
4.  $f(x_0) \cdot f''(x_0) > 0$

(из условия 4) выбирается начальная точка  $x_0$ .)

Итерационный процесс заканчивается, когда  $\frac{f(x_n)}{\min|f'(x_n)|} < \varepsilon$ .

6. **Метод простой итерации.** Для уравнения  $x = \varphi(x)$ , начиная с некоторой заданной точки  $x_0$ , формируется последовательность  $x_{n+1} = \varphi(x_n)$ .

**Достаточное условие сходимости метода простой итерации.** Пусть  $\zeta$  - корень уравнения и  $|\varphi'(\zeta)| < 1$ . Тогда существует отрезок  $[\zeta - r, \zeta + r]$  такой, что для любого  $x_0 \in [\zeta - r, \zeta + r]$  метод простой итерации сходится к корню  $\zeta$ . Итерационный процесс заканчивается, когда  $|x_{n+1} - x_n| < \varepsilon$ .

**Задача 1.** Методом Ньютона найти второе приближение  $x_2$  к корню уравнения  $x^2 - e^{-x} = 0$ . Известно, что корень лежит на отрезке  $[0,5; 1]$ .

**Решение:** Зададим начальное приближение  $x_0$  из условия:  $f(x_0) \cdot f''(x_0) > 0$

$$f'(x) = 2 - e^{-x} > 0 \text{ на } [0,5; 1];$$

$$f(a) = f(0,5) < 0; f(b) = f(1) > 0 \Rightarrow x_0 = 1.$$

Расчетная формула метода Ньютона:  $x_{n+1} = x_n - \frac{f(x_n)}{f'(x_n)}$ . Для нашего уравнения  $f(x) = x^2 - e^{-x}$ ;

$$f''(x) = 2x + e^{-x};$$

$$\text{Найдем } x_1: x_1 = x_0 - \frac{f(x_0)}{f'(x_0)} = 1 - \frac{1 - e^{-1}}{2 + e^{-1}} = 0,73304.$$

Оценим  $|x_1 - x_0| = |1 - 0,73304| \approx 0,27 < 0,5 \cdot 10^0$ . Все значащие цифры в числе  $x_1$  являются сомнительными.

Найдем  $x_2$ :

$$x_2 = x_1 - \frac{f(x_1)}{f'(x_1)} = 0,73304 - \frac{0,73304^2 - e^{-0,73304}}{2 \cdot 0,73304 + e^{-0,73304}} = 0,70381$$

Оценим  $|x_2 - x_1| = |0,73304 - 0,70381| \approx 0,029 < 0,5 \cdot 10^{-1}$ . Одна цифра после запятой является верной.

**Задача 2.** Представить уравнение  $x^3 - x + 1 = 0$  в виде, допускающем применение метода простой итерации.

**Решение:** Сначала нужно отделить корни, т.е. найти такой отрезок  $[a; b]$ , на котором существует единственный корень. Преобразуем уравнение к равносильному виду:  $x^3 = x - 1$  и найдем точки пересечения графиков  $y = x^3$  и  $y = x - 1$ . Очевидно, корень уравнения  $\zeta \in [-2; -1]$ .

Чтобы можно было применять метод простой итерации, преобразуем исходное уравнение к виду  $x = \varphi(x)$ . Для сходимости метода простой итерации необходимо обеспечить выполнение условия  $|\varphi'(x)| \leq q < 1$  на  $[a; b]$ .

Запишем исходное уравнение сначала в виде:  $x = x^3 + 1$ . Легко показать, что функция  $\varphi(x) = x^3 + 1$  не удовлетворяет условию сходимости, поскольку  $\varphi'(x) = 3x^2$ ,  $\varphi'(-2) = 12 > 1$ ,  $\varphi'(-1) = 3 > 1$ . Поэтому воспользуемся другим преобразованием.

$$x = \sqrt[3]{x-1}. \quad \varphi(x) = \sqrt[3]{x-1}. \quad \varphi'(x) = \frac{1}{3(x-1)^{2/3}}. \text{ Легко проверить, что } |\varphi'(x)| < 1 \text{ на } [-2; -1], \text{ т.е.}$$

выполняются достаточные условия сходимости метода простой итерации.

Расчетная формула метода простой итерации:  $x_{n+1} = \varphi(x_n)$ . Зададим начальное приближение  $x_0 = -1$ .

$$x_1 = \varphi(x_0) = \sqrt[3]{-1-1} \approx -1,2599.$$

$$x_2 = \varphi(x_1) = \sqrt[3]{-1,2599-1} \approx -1,3123.$$

**Задачи для самостоятельного решения.**

1. Методом Ньютона найти второе приближение к корню для уравнения  $x^3 - x^2 - 9x + 9 = 0$  на отрезке  $[0,5; 2]$ .
2. Методом Ньютона найти второе приближение к корню для уравнения  $x^3 - x + 1 = 0$  на отрезке  $[-2; -1]$ .
3. Выяснить, сходится ли метод простой итерации для уравнения  $x + \ln(x) = 0$ , если итерационный процесс имеет вид  $x_{n+1} = -\ln(x_n)$ .
4. Построить метод Ньютона для вычисления  $1/a$ ,  $a > 0$ , так, чтобы расчетная формула не содержала операций деления. Найти область сходимости (для выбора  $x_0$ ).
5. Построить метод Ньютона для вычисления  $a^5$ ,  $a > 0$ . Найти область сходимости (для выбора  $x_0$ ).
6. Для уравнения  $x = \sin 2x$  исследовать сходимость метода простой итерации в окрестности наименьшего положительного корня.
7. Для уравнения  $x = \cos 2x$  исследовать сходимость метода простой итерации в окрестности наименьшего положительного корня.
8. Применить метод простой итерации для решения уравнения  $\sin x = 2x - 0,5$ .
9. Методом хорд найти третье приближение  $x_3$  к корню уравнения  $x^3 - x + 1 = 0$ , если известно, что корень лежит на отрезке  $[-2; -1]$ .
10. Выяснить, сходится ли метод простой итерации в окрестности наименьшего положительного корня уравнения  $x = 0,1 + x^3$ .
11. Выяснить, сходится ли метод простой итерации в окрестности наименьшего положительного корня уравнения  $x = (1 + x)^{1/2}$ .
12. Методом хорд найти второе приближение к корню для уравнения  $x^3 - x^2 - 9x + 9 = 0$  на отрезке  $[0,5; 2]$ .

## ПРИБЛИЖЕНИЕ ФУНКЦИЙ С ПОМОЩЬЮ ИНТЕРПОЛЯЦИОННЫХ МНОГОЧЛЕНОВ.

**Постановка задачи.** Пусть известны значения некоторой функции  $f(x)$  в  $n + 1$  различных точках  $x_0, x_1, \dots, x_n$ :  $f_0, f_1, \dots, f_n$  таких, что  $f(x_0) = f_0, f(x_1) = f_1, \dots, f(x_n) = f_n$ .

Возникает задача приближенного восстановления функции  $f$  в произвольной точке  $x$ . Часто для решения этой задачи строится алгебраический многочлен  $L_n(x)$  степени  $n$ , который в точках  $x_i$  принимает значения  $f_i$ , т. е.  $L_n(x_i) = f_i, i = 0, 1, \dots, n$ .

Этот многочлен называется *интерполяционным*. Точки  $x_i, i = 0, 1, \dots, n$ , называются *узлами интерполяции*.

Интерполяционный многочлен, записанный в форме

$$L_n(x) = \sum_{i=0}^n f(x_i) \prod_{\substack{j=1 \\ j \neq i}}^n \frac{x - x_j}{x_i - x_j}$$

называют **интерполяционным многочленом Лагранжа**.

Пусть  $n = 1$ , тогда  $L_1(x) = \frac{x - x_1}{x_0 - x_1} f_0 + \frac{x - x_0}{x_1 - x_0} f_1$  - линейная интерполяция

При  $n = 2$

$$L_2(x) = \frac{(x - x_1)(x - x_2)}{(x_0 - x_1)(x_0 - x_2)} f_0 + \frac{(x - x_0)(x - x_2)}{(x_1 - x_0)(x_1 - x_2)} f_1 + \frac{(x - x_0)(x - x_1)}{(x_2 - x_0)(x_2 - x_1)} f_2$$

- квадратичная интерполяция.

$f(x) = L_n(x) + R_n(x)$ , где  $R_n(x)$  - остаточный член интерполяционного многочлена в форме Лагранжа

(погрешность интерполяции).  $R_n(x)$  вычисляется по формуле:  $R_n(x) = \frac{f^{(n+1)}(\xi)}{(n+1)!} \omega_n(x)$ , где  $\omega_n(x) = (x - x_0)(x - x_1) \dots (x - x_n)$

**Задача 1.** Выписать интерполяционный многочлен Лагранжа для функции  $f(x)$ , значения которой заданы таблицей:

|       |      |     |     |     |
|-------|------|-----|-----|-----|
| $i$   | 0    | 1   | 2   | 3   |
| $x_i$ | 0    | 0,1 | 0,3 | 0,5 |
| $f_i$ | -0,5 | 0   | 0,2 | 1   |

**Решение:** По данному набору узлов можно построить интерполяционный многочлен 3-ей степени.

$$\begin{aligned}
L_3(x) &= \frac{(x-x_1)(x-x_2)(x-x_3)}{(x_0-x_1)(x_0-x_2)(x_0-x_3)} f_0 + \\
&+ \frac{(x-x_0)(x-x_2)(x-x_3)}{(x_1-x_0)(x_1-x_2)(x_1-x_3)} f_1 + \frac{(x-x_0)(x-x_1)(x-x_3)}{(x_2-x_0)(x_2-x_1)(x_2-x_3)} f_2 + \\
&+ \frac{(x-x_0)(x-x_1)(x-x_2)}{(x_3-x_0)(x_3-x_1)(x_3-x_2)} f_3 = \\
&= -\frac{x^3 - 0,9x^2 + 0,23x - 0,015}{0,015} \cdot (-0,5) - \frac{x^3 - 0,6x^2 + 0,05x}{0,012} \cdot 0,2 + \\
&+ \frac{x^3 - 0,4x^2 + 0,03x}{0,04} \cdot 1 = \\
&= \frac{125}{3}x^3 - 30x^2 + \frac{73}{12}x - 0,5.
\end{aligned}$$

**Задача 2.** С какой точностью можно вычислить с помощью многочлена Лагранжа значение  $\ln 100,5$  по известным значениям  $\ln 100, \ln 101, \ln 102, \ln 103$ ?

**Решение:** По данному набору узлов можно построить интерполяционный многочлен 3-ей степени. Остаточный член интерполяционного многочлена Лагранжа при  $n = 3$  имеет вид:

$$R_3(x) = \frac{f^{(4)}(\xi)}{4!} (x-x_0)(x-x_1)(x-x_2)(x-x_3).$$

В нашем случае  $x_0 = 100, x_1 = 101, x_2 = 102, x_3 = 103, x = 100,5; 100 < \xi < 103$ .

Так как  $f(x) = \ln(x)$ , то  $f^{(4)}(x) = -\frac{6}{x^4}$ . Таким образом,

$$|R_3(100,5)| \leq \frac{6}{(100)^4 \cdot 4!} \cdot 0,5 \cdot 0,5 \cdot 1,5 \cdot 2,5 = 0,23 \cdot 10^{-8}.$$

**Задачи для самостоятельного решения.**

1. Построить интерполяционный многочлен Лагранжа по узлам  $x_0 = 1; x_1 = 3$  для функции  $y = x^3$ .

Вычислить приближенное значение  $y$  в точке  $x = 2$ . Оценить погрешность.

2. Построить интерполяционный многочлен Лагранжа для функции, заданной таблично:

|       |   |   |   |   |
|-------|---|---|---|---|
| $i$   | 0 | 1 | 2 | 3 |
| $x_i$ | 2 | 3 | 4 | 5 |
| $f_i$ | 7 | 5 | 8 | 7 |

3. Построить интерполяционный многочлен Лагранжа по данным:  $x_0 = -1, x_1 = 0, x_2 = 1; y_0 = 3, y_1 = 2, y_2 = 5$ .

4. Построить интерполяционный многочлен Лагранжа по данным:  $x_0 = 1, x_1 = 2, x_2 = 4; y_0 = 3, y_1 = 4, y_2 = 6$ .

5. Зная значения  $\cos x$  при  $x = 0, \pi/6, \pi/4, \pi/3, \pi/2$  найти  $\cos x$  при  $x = \pi/5$  и оценить погрешность.

6. Зная значения  $\sin x$  при  $x = 0, \pi/6, \pi/4, \pi/3, \pi/2$  найти  $\sin x$  при  $x = \pi/12$  и оценить погрешность.

7. Построить интерполяционный многочлен и оценить погрешность по данным:

| $x$  | $\cos(x)$ |
|------|-----------|
| 0,29 | 0,9582    |
| 0,30 | 0,9553    |
| 0,31 | 0,9523    |

8. Построить интерполяционный многочлен и оценить погрешность по данным:

| $x$  | $\sin(x)$ |
|------|-----------|
| 0,63 | 0,5891    |
| 0,64 | 0,5972    |
| 0,65 | 0,6052    |

## ЧИСЛЕННОЕ ИНТЕГРИРОВАНИЕ.

**Постановка задачи.** Пусть требуется вычислить определенный интеграл  $I = \int_a^b f(x)dx$ , где  $f(x)$

непрерывна на  $[a, b]$ .

Заменим подынтегральную функцию каким-либо интерполяционным многочленом  $L_n(x)$  и получим квадратурную формулу вида:

$$\int_a^b f(x)dx = \int_a^b L_n(x)dx + R[f] = \sum_{k=0}^n A_k f(x_k) + R[f],$$

где  $x_k$  – узлы интерполяции,  $A_k$  – коэффициенты квадратурной формулы, называемые весами, зависящие только от выбранных узлов, но не от вида функции  $f(x)$ .

$R[f]$  – погрешность или остаточный член формулы.

$$R[f] = \int_a^b (f(x) - L_n(x))dx.$$

Таким образом,  $\int_a^b f(x)dx \approx \sum_{k=0}^n A_k f(x_k)$ . Если  $A_k = \int_a^b \prod_{\substack{i=0 \\ k \neq i}}^n \frac{x - x_i}{x_k - x_i} dx$ , то формула называется

интерполяционной квадратурной формулой.

**Элементарные квадратурные формулы:**

**формула левых прямоугольников:**

$$\int_a^b f(x)dx \approx (b-a) \cdot f(a); \quad |R[f]| \leq \max_{[a,b]} |f'(x)| \frac{(b-a)^2}{4}$$

**формула правых прямоугольников:**

$$\int_a^b f(x)dx \approx (b-a) \cdot f(b); \quad |R[f]| \leq \max_{[a,b]} |f'(x)| \frac{(b-a)^2}{4}$$

**формула средних прямоугольников:**

$$\int_a^b f(x)dx \approx (b-a) \cdot f\left(\frac{a+b}{2}\right); \quad |R[f]| \leq \max_{[a,b]} |f''(x)| \frac{(b-a)^3}{24} \text{ формулу трапеций:}$$

$$\int_a^b f(x)dx \approx \frac{(b-a)}{2} \cdot (f(a) + f(b)); \quad |R[f]| \leq \max_{[a,b]} |f''(x)| \frac{(b-a)^3}{12}$$

**формула Симпсон:**

$$\int_a^b f(x)dx \approx \frac{b-a}{6} \left( f(a) + 4f\left(\frac{a+b}{2}\right) + f(b) \right);$$

$$|R[f]| \leq \max_{[a,b]} |f^{(4)}(x)| \frac{(b-a)^5}{2880}$$

На практике, поскольку длина отрезка  $[a, b]$  может быть велика, пользуются *составными* формулами. Для их получения на отрезке  $[a, b]$  вводят достаточно густую сетку:  $a = x_0 < x_1 < \dots < x_n = b$ . Интеграл считают как сумму интегралов по каждому отрезку  $[x_{i-1}, x_i]$ , на которых применяют какую-либо простую формулу. Приведем составные формулы с погрешностями для рассмотренных выше простых формул.

**Составная формула левых прямоугольников:**

$$\int_a^b f(x)dx \approx h \sum_{i=0}^{n-1} f(x_i); |R[f]| \leq \max_{[a,b]} |f'(x)| \frac{(b-a)h}{4}$$

**Составная формула правых прямоугольников:**

$$\int_a^b f(x)dx \approx h \sum_{i=1}^n f(x_i); |R[f]| \leq \max_{[a,b]} |f'(x)| \frac{(b-a)h}{4}$$

**Составная формула средних прямоугольников:**

$$\int_a^b f(x)dx \approx h \sum_{i=1}^n f\left(\frac{x_{i-1} + x_i}{2}\right); |R[f]| \leq \max_{[a,b]} |f''(x)| \frac{(b-a)h^2}{24}$$

**Составная формула трапеций:**

$$\int_a^b f(x)dx \approx h \left( \frac{f(a) + f(b)}{2} + \sum_{i=1}^{n-1} f(x_i) \right);$$

$$|R[f]| \leq \max_{[a,b]} |f''(x)| \frac{(b-a)h^2}{12}$$

(здесь  $h = \frac{b-a}{n}$ )

**Составная формула Симпсона:**

$$\int_a^b f(x)dx \approx \frac{h}{3} (f(x_0) + 4f(x_1) + 2f(x_2) + \dots + 2f(x_{2m-2}) + 4f(x_{2m-1}) + f(x_m));$$

где  $n = 2m$ ,  $x_{i+1} = x_i + h/2$ .

$$|R[f]| \leq \max_{[a,b]} |f^{(4)}(x)| \frac{(b-a)h^4}{2880}.$$

**Метод Рунге оценивания погрешности.**

Пусть  $I_h$  - значение интеграла, посчитанное по составной формуле с шагом  $h$ ,  $I_{h/2}$  - с шагом  $h/2$ . Пусть порядок точности этой формулы  $m - 1$ . Тогда справедливо следующее правило Рунге:

$$R_{h/2} = \frac{I_{h/2} - I_h}{2^m - 1}.$$

Для составных формул правых и левых прямоугольников справедливо:

$$R_{h/2} = I_{h/2} - I_h.$$

Для составных формул средних прямоугольников и трапеций справедливо:

$$R_{h/2} = \frac{I_{h/2} - I_h}{3}$$

Для составной формулы Симпсона справедливо:

$$R_{h/2} = \frac{I_{h/2} - I_h}{15}$$

**Задача 1.** Вычислить  $\int_0^2 x^2 dx$  по формуле средних прямоугольников с шагом  $h = 1$ . Оценить погрешность.

**Решение:** Точное значение интеграла  $I = \int_0^2 x^2 dx = \frac{x^3}{3} \Big|_0^2 = \frac{8}{3} \approx 2,666$ . Теперь вычислим значение интеграла по составной формуле средних прямоугольников с шагом  $h = 1$ .

$$\begin{aligned} \int_a^b f(x) dx &\approx h \sum_{i=1}^n f\left(\frac{x_{i-1} + x_i}{2}\right) = \\ &= h \cdot \left(f\left(\frac{1}{2}\right) + f\left(\frac{3}{2}\right)\right) = \frac{1}{4} + \frac{9}{4} = \frac{10}{4} = 2,5 \end{aligned}$$

Оценим погрешность вычислений интеграла по составной формуле средних прямоугольников:

$$|R[f]| \leq \max_{[a,b]} |f''(x)| \frac{(b-a)h^2}{24}, \quad \text{здесь} \quad \max_{[a,b]} |f''(x)| = 2,$$

$|R[f]| = 0,16 < 0,5 \cdot 10^0$ , Значит, в результате цифра после запятой является сомнительной.

**Задача 2.** Оценить погрешность вычислений интеграла  $\int_0^1 e^{-x^2} dx$  по формуле трапеций при  $n = 10$ .

**Решение:** Погрешность составной формулы трапеций  $|R[f]| \leq \max_{[a,b]} |f''(x)| \frac{(b-a)h^2}{12}$ . Находим

вторую производную функции  $f(x) = e^{-x^2}$ :  $f'' = 2(2x^2 - 1)e^{-x^2}$ . На отрезке  $[0; 1]$  абсолютная величина второй производной  $|f''(x)|$  имеет наибольшее значение при  $x = 0$ . Таким образом,  $|R[f]| = \frac{2 \cdot (0,1)^2}{12} < 0,002 \leq 0,5 \cdot 10^{-2}$ , значит результат будет вычислен с двумя верными знаками после запятой.

**Задача 3.** Какой шаг интегрирования  $h$  следует взять в составной формуле средних прямоугольников, чтобы вычислить интеграл  $\int_0^4 \frac{dx}{2+x}$  с точностью  $\varepsilon = 10^{-4}$ ?

**Решение:** Оценка погрешности составной формулы средних прямоугольников через  $h$ :

$$|R[f]| \leq \frac{M_2}{24} (b-a)h^2, \text{ где } f(x) = \frac{1}{2+x}, \quad f'(x) = -\frac{1}{(2+x)^2},$$

$$f''(x) = \frac{2}{(2+x)^3}, \quad M_2 = \max_{[0,4]} \left| \frac{2}{(2+x)^3} \right| = \frac{1}{4}.$$

Для определения шага  $h$  имеем неравенство:  $|R[f]| \leq \frac{h^2}{24} < \varepsilon = 10^{-4}$ . Отсюда  $h^2 < 24 \cdot 10^{-4}$ ,  $h < 0,048$ .

Требуемая точность достигается, если взять, например,  $h = 0,04$ .

**Задачи для самостоятельного решения.**

1. Вычислить значение интеграла  $\int_0^2 x^4 dx$  по формулам правых прямоугольников и трапеций с

шагом  $h = 1$ . Найти оценки погрешностей.

2. Вычислить значение интеграла  $\int_0^2 x^3 dx$  по формулам левых прямоугольников и трапеций с ша-

гом  $h = 1$ . Найти оценки погрешностей.

3. Какой шаг интегрирования  $h$  следует взять, чтобы вычислить  $\int_0^4 \frac{dx}{(1+x)^2}$  интеграл с точностью

$10^{-4}$  по составной формуле средних прямоугольников.

4. Какой шаг интегрирования  $h$  следует взять, чтобы вычислить  $\int_0^5 \frac{dx}{(1+x)}$  интеграл с точностью

$10^{-4}$  по составной формуле трапеций.

5. Какой шаг интегрирования  $h$  следует взять, чтобы вычислить  $\int_0^5 \frac{dx}{(1+x)}$  интеграл с точностью

$10^{-4}$  по составной формуле Симпсона.

## ЧИСЛЕННОЕ РЕШЕНИЕ ЗАДАЧИ КОШИ.

### Постановка задачи.

Решить задачу Коши

$$\begin{cases} y' = f(x, y) \\ y(x_0) = y_0 \end{cases}$$

на отрезке  $[x_0; x_0 + X]$ .

### Методы решения.

При решении задачи Коши поступают следующим образом. На отрезке  $[x_0, x_0 + X]$  задают равноотстоящие точки  $x_0, \dots, x_n$ , где  $x_{m+1} = x_m + h$ ,  $h = \frac{X}{n}$ . Для неизвестных значений  $y(x_m)$  точного решения  $y(x)$  задачи Коши следует найти приближения  $y_m$  ( $m = 1, \dots, n$ ). Отыскание  $y_m$  можно проводить различными методами.

#### 1. Метод Эйлера.

$y_{m+1} = y_m + h \cdot f(x_m, y_m)$ . Погрешность на одном шаге  $O(h^2)$ .

#### 2. Метод Эйлера с пересчетом.

$y_{m+1} = y_m + \frac{h}{2} [f(x_m, y_m) + f(x_m + h, y_m + hf(x_m, y_m))]$ . Погрешность на одном шаге  $O(h^3)$ .

#### 3. Метод Коши

$y_{m+1} = y_m + hf(x_m + \frac{h}{2}, y_m + \frac{h}{2} f(x_m, y_m))$ . Погрешность на одном шаге  $O(h^3)$ .

**Задача 1.** Для задачи Коши

$$\begin{cases} y' = x + y \\ y(0) = 1 \end{cases}$$

выполнить два шага методом Эйлера, методом Эйлера с пересчетом и методом Коши. Шаг  $h = 0,1$ . Привести все результаты с четырьмя знаками после запятой. Сравнить численные решения с точным  $y(x) = 2e^x - x - 1$ .

**Решение.** В данной задаче  $x_0 = 0$ ;  $y_0 = 1$ ;  $f(x, y) = x + y$ .

1) Применим метод Эйлера:

$$y_1 = y_0 + h f(x_0, y_0) = 1 + 0,1 \cdot (0 + 1) = 1,1;$$

$$x_1 = 0,1; y_1 = 1,1;$$

$$y_2 = y_1 + h f(x_1, y_1) = 1,1 + 0,1 \cdot (0,1 + 1,1) = 1,22$$

2) Применим метод Эйлера с пересчетом:

$$\begin{aligned}
y_1 &= y_0 + \frac{h}{2} [f(x_0, y_0) + f(x_0 + h, y_0 + hf(x_0, y_0))] = \\
&= 1 + 0,05[(0+1) + ((0+0,1) + (1+0,1(0+1)))] = 1,11 \\
x_1 &= 0,1; \quad y_1 = 1,11 \\
y_2 &= y_1 + \frac{h}{2} [f(x_1, y_1) + f(x_1 + h, y_1 + hf(x_1, y_1))] = \\
&= 1,11 + 0,05[(0,1+1,11) + ((0,1+0,1) + (1,11+0,1(0,1+1,11)))] = \\
&= 1,2455
\end{aligned}$$

3) Применим метод Коши

$$\begin{aligned}
y_1 &= y_0 + hf(x_0 + \frac{h}{2}, y_0 + \frac{h}{2} f(x_0, y_0)) = \\
&= 1 + 0,1((0+0,05) + (1+0,05(0+1))) = 1,11 \\
x_1 &= 0,1; \quad y_1 = 1,11 \\
y_2 &= y_1 + hf(x_1 + \frac{h}{2}, y_1 + \frac{h}{2} f(x_1, y_1)) = \\
&= 1,11 + 0,1((0,1+0,05) + (1,11+0,05(0,1+1,11))) = 1,24205
\end{aligned}$$

Сравним полученные значения с точным решением задачи Коши:

| $x_i$ | Метод<br>Эйлера | Метод<br>Эйлера с<br>пересчетом | Метод<br>Коши | Точное $y(x_i)$ |
|-------|-----------------|---------------------------------|---------------|-----------------|
| 0     | 1,0000          | 1,0000                          | 1,0000        | 1,0000          |
| 0,1   | 1,1000          | 1,1100                          | 1,1100        | 1,1103          |
| 0,2   | 1,2200          | 1,2455                          | 1,2421        | 1,2428          |

**Задачи для самостоятельного решения.**

1. Вычислить  $y_1$  и  $y_2$  для решения задачи Коши  $\begin{cases} y' = -y + 1 \\ y(0) = -1 \end{cases}$ , при  $h = 0,1$  методом Эйлера с пересчетом.

2. Вычислить  $y_1$  и  $y_2$  для решения задачи Коши  $\begin{cases} y' = -y + 1 \\ y(0) = -1 \end{cases}$ , при  $h = 0,1$  методом Эйлера.

3. Вычислить  $y_1$  и  $y_2$  для решения задачи Коши  $\begin{cases} y' = -y + 1 \\ y(0) = -1 \end{cases}$ , при  $h = 0,1$  методом Коши.

## **СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ**

1. Бахвалов Н.С., Жидков Н.П., Кобельков Г.М. Численные методы. М.: Наука. 1987.
2. Самарский А.А., Гулин А.В., Численные методы. М.: Наука, 1989.
3. Киреев А.В., Пантелеев В.И. Численные методы в примерах и задачах. М.: Высшая школа, 2004.
4. Бахвалов Н.С., Лапин А.В., Чижонков Е.В. Численные методы в задачах и упражнениях. М.: Высшая школа, 2000.
5. Копченова Н.В., Марон И.А. Вычислительная математика в примерах и задачах. М.: Наука. 1972.
6. Воробьева Г.Н., Данилова А.Н. Практикум по вычислительной математике. М.: Высшая школа, 1990.
7. Вержбицкий В.М. Численные методы. Линейная алгебра и нелинейные уравнения. М.: Высшая школа, 2000.