

ФЕДЕРАЛЬНОЕ АГЕНТСТВО ПО ОБРАЗОВАНИЮ
Государственное образовательное учреждение
высшего профессионального образования
«Уральский государственный университет им. А.М. Горького»

ИОНЦ «Бизнес - информатика»

Математико-механический факультет

Кафедра вычислительной математики

МЕТОДЫ ВЫЧИСЛЕНИЙ В ЭКОНОМИКЕ

Методические указания по освоению дисциплины

Екатеринбург
2007

Содержание.

Тема 1. Введение в методы вычислений в экономике.	2
Тема 2. Методы решения трансцендентных уравнений.	4
Тема 3. Вычислительные методы линейной алгебры.	6
Тема 4. Решение систем нелинейных уравнений.	7
Тема 5. Интерполяция.	8
Тема 6. Численное интегрирование.	10
Тема 7. Численное решение задачи Коши для обыкновенных дифференциальных уравнений.	12
Обеспеченность литературой по курсу	16

Тема 1. Введение в методы вычислений в экономике.

При рассмотрении данной темы особое внимание уделяется процессу решения задач с помощью вычислительной техники и причинам возникновения погрешностей при численном решении задач. Вводится классификация погрешностей: неустранимая погрешность; погрешность метода; вычислительная погрешность.

Даются определения абсолютной и относительной погрешности, определяется погрешность чисел в позиционной записи, погрешность сложения и вычитания, точность представления вещественных чисел в компьютере, погрешность умножения и деления приближенных чисел и погрешность вычисления значений функции.

Студенту необходимо обратить внимание на особенности выполнения операций сложения и вычитания вещественных чисел в компьютере, т.к. при сложении (вычитании) двух чисел в форме «с плавающей точкой» сначала происходит выравнивание порядка (до большего), а затем мантиссы складываются (вычитаются). При выравнивании порядка возможна ситуация, когда слагаемое с меньшим порядком становится машинным нулем.

При освоении данной темы студенту предлагается решить следующие задачи:

1. Стороны треугольника $a^* = 17,3\text{см}$, $b^* = 23,6\text{см}$, $c^* = 14,2\text{см}$ измерены с абсолютными погрешностями $\Delta a^* = \Delta b^* = \Delta c^* = 0,1\text{см}$. Определить абсолютную погрешность периметра этого треугольника.

2. С какой точностью следует вычислить радиус основания r и высоту h цилиндра, чтобы его объем можно было определить с точностью до 1%?

3. Вычислить $1 - \cos 1^\circ$ с помощью четырехзначных таблиц тригонометрических функций и оценить погрешность результата.

4. Вычислить $1 - \cos 1^\circ$ с помощью преобразования $1 - \cos 1^\circ = 2\sin^2 0^\circ 30'$ с помощью четырехзначных таблиц тригонометрических функций и оценить погрешность результата.

Для более глубокого понимания студентами особенностей возникновения погрешностей при вычислениях на компьютере, им предлагается провести следующие численные эксперименты:

1. Сравнить при $h=0.1; 0.01; 0.001 \dots$ значения функций

$$\frac{f(x+h) - f(x)}{h}, \quad f'(x)$$

для $x=0, x=1$.

2. Составить программу вычисления $\sin x$ с помощью ряда

$$\sin x = x - \frac{x^3}{3!} + \frac{x^5}{5!} - \dots$$

Суммирование прерывается на слагаемом, для которого

$$\left| \frac{x^{2n+1}}{(2n+1)!} \right| < \varepsilon$$

Найти приближения $\sin x$ при $\varepsilon=10^{-6}$, 10^{-10} для $x=k\pi$, $k=1, 2, \dots, 10$. Объяснить полученные результаты.

Для более глубокого освоения данной темы студентам предлагается воспользоваться следующей литературой:

1. Вержбицкий В. М. Численные методы. – М.: ОНИКС 21 век, 2005. Глава 1. Об учете погрешностей приближенных вычислений, стр. 7 – 31.
2. Киреев В. И., Пантелеев А. В. Численные методы в примерах и задачах. – М.: Высшая школа, 2004. Введение, стр. 7 – 23.
3. Бахвалов Н. С., Лапин А. В., Чижонков Е. В. Численные методы в задачах и упражнениях. – М.: Высшая школа, 2000. Глава 1. Погрешность решения задачи, стр. 7 – 12.

Тема 2. Методы решения трансцендентных уравнений.

Пусть задана непрерывная функция $f(x)$ и требуется найти все или некоторые корни уравнения $f(x) = 0$. Необходимо обратить внимание, что эта задача распадается на несколько задач. Во-первых, надо исследовать количество, характер и расположение корней. Во-вторых, найти приближенные значения корней с требуемой точностью.

Пусть найден отрезок $[a, b]$, на котором лежит единственный корень уравнения $f(x) = 0$. Приближенные значения корней уточняют различными итерационными методами. Рассматриваются следующие методы уточнения корня: метод дихотомии, метод Ньютона (касательных), модифицированный метод Ньютона, метод хорд и подвижных хорд.

Если заменить уравнение $f(x) = 0$ эквивалентным ему уравнением $x = \varphi(x)$, где $\varphi(x)$ — дифференцируемая функция, то приближенное значение корня этого уравнения уточняют с помощью метода простой итерации.

При изучении методов решения нелинейных уравнений студенты должны обращать внимание на оценку погрешности метода на шаге k . При выборе метода решения уравнения должен решаться вопрос о скорости сходимости данного метода. Например, если уравнение $f(x) = 0$ решается методом Ньютона, то предварительно должно быть правильно выбрано начальное приближение x_0 : $f(x_0) \cdot f''(x_0) \geq 0$, а если решается уравнение $x = \varphi(x)$, то функция $\varphi(x)$ должна удовлетворять условию сходимости метода простой итерации: $|\varphi'(x)| \leq q < 1$ на отрезке локализации корня.

При освоении данной темы студенту предлагается решить следующие задачи:

1. Методом Ньютона найти второе приближение x_2 к корню уравнения $x^2 - e^{-x} = 0$. Известно, что корень лежит на отрезке $[0,5; 1]$.
2. Представить уравнение $x^3 - x + 1 = 0$ в виде, допускающем применение метода простой итерации.
3. Для уравнения $x = \cos 2x$ исследовать сходимость метода простой итерации в окрестности наименьшего положительного корня.
4. Построить метод Ньютона для вычисления a^5 , $a > 0$. Найти область сходимости (для выбора x_0).

Для более глубокого понимания проблемы выбора конкретного метода решения нелинейного уравнения, сравнения нескольких методов, студентам предлагается выполнить лабораторную работу по данной теме.

Постановка задачи: Дано уравнение $f(x) = 0$. Найти наименьший положительный корень этого уравнения с точностью $\varepsilon = 0,5 \cdot 10^{-4}$, используя разные методы отыскания корня.

При выполнении лабораторной работы студентам необходимо обратить внимание на правильный выбор отрезка, на котором лежит единственный корень уравнения, обоснованно выбрать начальное приближение к корню, составить алгоритмы решения задачи различными методами, провести численный эксперимент и обосновать полученные результаты. Для этого рассматривается образец выполнения лабораторной работы и приводятся алгоритмы методов решения нелинейных уравнений.

Образец выполнения задания.

Найти корень уравнения $x^3 - 0,2x^2 + 0,5x + 1,5 = 0$, расположенный на отрезке $[-1; 0]$.

В нашем случае $f(x) = x^3 - 0,2x^2 + 0,5x + 1,5$. Для применения методов Ньютона и хорд необходимо выбрать начальное приближение x_0 . Так как $f(-1) < 0$, $f(0) > 0$, $f'(x) = 3x^2 - 0,4x + 0,5 > 0$, то за начальное приближение принимаем $x_0 = -1$.

Алгоритм метода деления отрезка пополам.

1. Описать функцию $f(x)$.
2. Описать константу $\varepsilon = 0,5 \cdot 10^{-4}$.
3. Ввести концы отрезка $[a, b]$. В нашем примере $a = -1$; $b = 0$.
4. Найти точку середины отрезка $[a, b]$: $c = (a + b) / 2$.
5. Если $f(a) \cdot f(c) < 0$, то $b := c$, в противном случае $a := c$.
6. Если $|b - a| < \varepsilon$, то c — корень уравнения, в противном случае вернуться к пункту 4.

Алгоритм метода Ньютона.

1. Описать функцию $f(x)$.
2. Описать функцию $f'(x)$ для $f(x)$.
3. Описать константу $\varepsilon = 0,5 \cdot 10^{-4}$.

4. Ввести начальное приближение x_0 . x_0 – выбранное нами начальное приближение, (в нашем примере $x_0 = -1$).

5. $x_n := x_0$.

6. $d := f(x_n) / f'(x_n)$.

7. $x_{n+1} := x_n - d$.

8. $x_n := x_{n+1}$.

9. Если $|d| < \varepsilon$, то x_n – корень уравнения, в противном случае вернуться к пункту 6.

Алгоритм метода хорд.

1. Описать функцию $f(x)$.

2. Описать константу $\varepsilon = 0,5 \cdot 10^{-4}$.

3. Ввести начальное приближение x_0, x_1 . x_0 – выбранное нами начальное приближение, x_1 – противоположный конец отрезка $[a, b]$. В нашем примере $x_0 = -1; x_1 = 0$.

4. $x_n := x_1$.

5. $d := f(x_n) / (f(x_n) - f(x_0)) \cdot (x_n - x_0)$.

7. $x_{n+1} := x_n - d$.

8. $x_n := x_{n+1}$.

9. Если $|d| < \varepsilon$, то x_n – корень уравнения, в противном случае вернуться к пункту 5.

Для обоснования полученных результатов студентам необходимо сравнить скорости сходимости применяемых методов решения нелинейных уравнений.

Для более глубокого освоения данной темы студентам предлагается воспользоваться следующей литературой:

1. Вержбицкий В. М. Численные методы. – М.: ОНИКС 21 век, 2005. Глава 5. Методы решения нелинейных задач скалярных уравнений, стр. 141 - 209.
2. Киреев В. И., Пантелеев А. В. Численные методы в примерах и задачах. – М.: Высшая школа, 2004. Глава 3. Методы решения нелинейных уравнений и систем, стр. 76 – 104..
3. Бахвалов Н. С., Лапин А. В., Чижонков Е. В. Численные методы в задачах и упражнениях. – М.: Высшая школа, 2000. Глава 5. Решение нелинейных уравнений, стр. 82 – 91.

Тема 3. Вычислительные методы линейной алгебры.

Рассмотрен общий подход к построению методов решения систем линейных алгебраических уравнений. Студенты должны обратить внимание на то, что применяемые в настоящее время методы решения линейных систем можно разбить на две группы: точные и приближенные. Точными методами называются такие методы, которые в предположении, что вычисления ведутся точно (без округлений), приводят к точным значениям неизвестных за конечное число шагов. Так как на практике все вычисления ведутся с округлениями, то и значения неизвестных, полученные точным методом, неизбежно будут содержать погрешности. К точным методам относится, например, метод Гаусса.

Приближенными методами называются такие методы, которые даже в предположении, что вычисления ведутся без округлений, позволяют получить решение системы $(x_1, x_2, \dots, x_n)^T$ за конечное число шагов лишь с заданной точностью. Точное решение системы в этих случаях может быть получено теоретически как результат бесконечного процесса. К приближенным методам относятся: метод простой итерации, метод Зейделя и др. Каждый из этих методов не всегда является сходящимся в применении к конкретному классу систем линейных уравнений.

Формулируются теоремы о необходимом и достаточном условии сходимости метода простой итерации, о достаточном условии сходимости метода простой итерации. Доказывается теорема о погрешности приближений, полученных методом простой итерации. Подробно рассматриваются метод Якоби и метод Зейделя, достаточные условия сходимости этих методов.

При освоении данной темы студенту предлагается решить следующие задачи:

1. Исследовать метод Гаусса-Зейделя для системы

$$4x + y + 2z = 4$$

$$x + 4y - z = -8$$

$$-x - 3y + 5z = 1$$

2. Исследовать метод Якоби для системы

$$5x_1 + x_2 + x_3 = 4$$

$$x_1 - 4x_2 + x_3 = 5$$

$$2x_1 + 2x_2 - 5x_3 = 0$$

3. Для системы $Ax=b$, где

$$A = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{bmatrix}$$

получить необходимые и достаточные условия сходимости метода Гаусса-Зейделя.

4. Для системы $Ax=b$, где

$$A = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{bmatrix}$$

получить необходимые и достаточные условия сходимости метода Якоби.

Для более глубокого освоения данной темы студентам предлагается воспользоваться следующей литературой:

1. Вержбицкий В. М. Численные методы. – М.: ОНИКС 21 век, 2005. Глава 2. Решение линейных алгебраических систем (прямые методы), стр. 32 – 61. Глава 3. Итерационные методы решения линейных алгебраических систем и обращения матриц, стр. 63 – 80.
2. Бахвалов Н. С., Лапин А. В., Чижонков Е. В. Численные методы в задачах и упражнениях. – М.: Высшая школа, 2000. Глава 4. Матричные вычисления, стр. 67 – 76.

Тема 4. Решение систем нелинейных уравнений.

Тема «Решение систем нелинейных уравнений» предлагается студентам для самостоятельного изучения. Необходимо рассмотреть два метода решения систем трансцендентных уравнений вида $F(x)=0$: метод простых итераций и метод Ньютона; исследовать связь между данной задачей и задачей поиска безусловного экстремума функции нескольких переменных; сравнить методы на примере решения конкретной системы.

Для освоения данной темы студентам предлагается воспользоваться следующей литературой:

1. Вержбицкий В. М. Численные методы. – М.: ОНИКС 21 век, 2005. Глава 6. Методы решения систем нелинейных уравнений, стр. 212 - 243.
2. Киреев В. И., Пантелеев А. В. Численные методы в примерах и задачах. – М.: Высшая школа, 2004. Глава 3. Методы решения нелинейных уравнений и систем, стр. 109 – 126.

Алгоритм решения системы нелинейных уравнений методом простых итераций.

1. Для применения метода требуется систему $F(x)=0$ привести к равносильному виду $x=\Phi(x)$, где $x=(x_1, \dots, x_n)^T$, $\Phi(x)=[\varphi_1(x), \dots, \varphi_n(x)]^T$, функции $\varphi_i(x)$ определены и непрерывны в окрестности изолированного решения системы.
2. Задать начальное приближение $x^{(0)}$. Положить $k=0$.
3. Вычислить $x^{(k+1)}$ по формуле $x^{(k+1)} = \Phi(x^{(k)})$.
4. $\Delta^{(k+1)} = \|x^{(k+1)} - x^{(k)}\| \leq \varepsilon$, процесс завершен и $x^* \approx x^{(k+1)}$, иначе $k = k + 1$ и перейти к п.2.

Алгоритм решения системы нелинейных уравнений методом Ньютона.

Формула метода Ньютона для решения систем нелинейных уравнений является естественным обобщением формулы метода Ньютона для решения уравнения: $x^{(k+1)} = x^{(k)} - [F'(x^{(k)})]^{-1} \cdot F(x^{(k)})$. Так как $[F'(x^{(k)})]$ это матрица, то удобно не обращаться эту матрицу на каждом шаге, а решать систему линейных алгебраических уравнений: $F'(x^{(k)}) \cdot \Delta x^{(k)} = -F(x^{(k)})$, где $\Delta x^{(k)} = x^{(k+1)} - x^{(k)}$.

1. Задать начальное приближение $x^{(0)}$. Положить $k=0$.
2. Решить систему линейных алгебраических уравнений $F'(x^{(k)}) \cdot \Delta x^{(k)} = -F(x^{(k)})$ относительно поправки $\Delta x^{(k)}$.
3. Вычислить следующее приближение $x^{(k+1)} = x^{(k)} + \Delta x^{(k)}$.
4. $\Delta^{(k+1)} = \|x^{(k+1)} - x^{(k)}\| \leq \varepsilon$, процесс завершен и $x^* \approx x^{(k+1)}$, иначе $k = k + 1$ и перейти к п.2.

При освоении данной темы студенту предлагается решить следующие задачи:

1. Выяснить, сходится ли метод простой итерации для системы

$$\begin{cases} x = \cos y \\ y = \cos x \end{cases}$$
2. Найти два приближения по методу Ньютона для системы с известным начальным приближением:

$$\begin{cases} 2x^3 - y^2 - 1 = 0, & x_0 = 1.2 \\ xy^3 - y - 4 = 0 & y_0 = 1.5 \end{cases}$$
3. Решить систему

$$\begin{cases} x + y - 3 = 0 \\ x^2 + y^2 - 9 = 0 \end{cases}$$

методом Ньютона с точностью $\varepsilon = 0.0001$.

Тема 5. Интерполяция.

В данной теме рассмотрен общий подход к построению интерполяционного многочлена. Пусть известны значения некоторой функции f в $n + 1$ различных точках $x_0, x_1, \dots, x_n$, которые обозначим следующим образом: $f_0, f_1, \dots, f_n$.

Эти значения могут быть получены, например, из эксперимента или найдены с помощью достаточно сложных вычислений. Возникает задача приближенного восстановления функции f в произвольной точке x . Часто для решения этой задачи строится алгебраический многочлен степени n , который в точках x_i принимает заданные значения. Этот многочлен называется *интерполяционным*. Точки x_i называются узлами интерполяции.

Основное внимание уделено рассмотрению интерполяционного многочлена в форме Лагранжа и погрешности интерполяции.

При решении задачи интерполяции требуется:

- выбрать наиболее удобную форму и степень интерполяционного многочлена;
- оценить погрешность интерполяции;
- определить значения функции в точках, не совпадающих с узлами.

Для освоения данной темы студентам предлагается воспользоваться следующей литературой:

1. Киреев В. И., Пантелеев А. В. Численные методы в примерах и задачах. – М.: Высшая школа, 2004. Глава 4. Методы приближения сеточных функций, стр. 126 – 143.
2. Бахвалов Н. С., Лапин А. В., Чижонков Е. В. Численные методы в задачах и упражнениях. – М.: Высшая школа, 2000. Глава 2. Приближение функций и производных, стр. 12 – 30.

Студенты должны обратить внимание на методику решения задачи интерполяции:

1. По заданной сеточной функции составить интерполяционный полином определенной степени. При выборе степени многочлена следует руководствоваться желаемой точностью. Интерполяции.
2. Вычислить значения интерполяционного многочлена в заданных точках, путем их подстановки в формулу многочлена.

При освоении данной темы студенту предлагается решить следующие задачи:

1. Выписать интерполяционный многочлен Лагранжа для функции $f(x)$, значения которой заданы таблицей:

i	0	1	2	3
x_i	0	0,1	0,3	0,5
f_i	-0,5	0	0,2	1

2. С какой точностью можно вычислить с помощью многочлена Лагранжа значение $\ln 100.5$ по известным значениям $\ln 100, \ln 101, \ln 102, \ln 103$?

3. Зная значения $\cos x$ при $x = 0, \pi/6, \pi/4, \pi/3, \pi/2$ найти $\cos x$ при $x = \pi/5$ и оценить погрешность.
4. Построить интерполяционный многочлен Лагранжа по узлам $x_0 = 1; x_1 = 3$ для функции $y = x^3$. Вычислить приближенное значение y в точке $x = 2$. Оценить погрешность.

Тема 6. Численное интегрирование.

В данной теме рассматривается постановка задачи, когда требуется вычислить значение интеграла от функции, заданной таблично. Тогда заменим $f(x)$ каким-либо интерполяционным многочленом $L_n(x)$ и получим формулу, которая называется квадратурной:

$$\int_a^b f(x)dx = \int_a^b L_n(x)dx + R[f] = \sum_{k=0}^n A_k f(x_k) + R[f]. \text{ где } x_k - \text{узлы интерполяции, } A_k - \text{коэффициенты}$$

квадратурной формулы, называемые весами, зависящие только от выбранных узлов, но не от вида функции $f(x)$. $R[f]$ – погрешность или остаточный член формулы.

$$R[f] = \int_a^b (f(x) - L_n(x))dx$$

Таким образом,

$$\int_a^b f(x)dx \approx \sum_{k=0}^n A_k f(x_k)$$

Если

$$A_k = \prod_{\substack{i=0 \\ i \neq k}}^n \frac{x_k - x_i}{x_k - x_i}$$

то формула называется интерполяционной квадратурной формулой.

Рассматриваются следующие элементарные интерполяционные квадратурные формулы и их погрешности: формулы прямоугольников (правых, левых, средних), формула трапеций, формула Симпсона. На практике, поскольку длина отрезка $[a, b]$ может быть велика, пользуются *составными* формулами. Для их получения на отрезке $[a, b]$ вводят достаточно густую сетку: $a = x_0 < x_1 < \dots < x_n = b$. Интеграл считают как сумму интегралов по каждому отрезку $[x_{i-1}, x_i]$, на которых применяют какую-либо простую формулу. Приводятся составные формулы с погрешностями для рассмотренных выше простых формул.

Студентам следует обратить внимание на способ вычисления интеграла, когда с использованием оценок и точности ϵ предварительно вычисляется шаг интегрирования h (способ с априорным определением шага h). Однако надо учитывать и то, что в вычислительной практике большое распространение получил и другой апостериорный способ вычисления h , основанный на многократном дроблении отрезка $[a, b]$. В этом случае интеграл вычисляется с помощью итерационного алгоритма.

Для освоения данной темы студентам предлагается воспользоваться следующей литературой:

1. Киреев В. И., Пантелеев А. В. Численные методы в примерах и задачах. – М.: Высшая школа, 2004. Глава 5.3. Методы численного интегрирования, стр. 246 – 272.

2. Бахвалов Н. С., Лапин А. В., Чижонков Е. В. Численные методы в задачах и упражнениях. – М.: Высшая школа, 2000. Глава 3. Численное интегрирование стр. 33 – 53.

При освоении данной темы студенту предлагается решить следующие задачи:

1. Вычислить $\int_0^2 x^2 dx$ по формуле средних прямоугольников с шагом $h = 1$. Оценить погрешность.
2. Оценить погрешность вычислений интеграла $\int_0^1 e^{-x^2} dx$ по формуле трапеций при $n = 10$.
3. Какой шаг интегрирования h следует взять в составной формуле средних прямоугольников, чтобы вычислить интеграл $\int_0^4 \frac{dx}{2+x}$ с точностью $\varepsilon = 10^{-4}$?
4. Какой шаг интегрирования h следует взять, чтобы вычислить $\int_0^5 \frac{dx}{(1+x)}$ интеграл с точностью 10^{-4} по составной формуле Симпсона.

Для более глубокого понимания проблемы выбора конкретного метода численного интегрирования, сравнения нескольких методов, студентам предлагается выполнить лабораторную работу по данной теме.

Постановка задачи: Найти значение интеграла $\int_a^b f(x)dx$ по составным формулам с шагом $h = 0,1$, $h = 0,05$. Указать погрешность по методу Рунге.

При выполнении лабораторной работы студентам необходимо составить алгоритмы решения задачи различными методами, вычислить значения интеграла одним методом с разным значением шага h , оценить погрешность результата по методу Рунге, объяснить полученные результаты.

Тема 7. Численное решение задачи Коши для обыкновенных дифференциальных уравнений.

В данной теме рассматривается постановка задачи, когда требуется найти решение уравнения $y' = f(x, y)$ на отрезке $[x_0, x_0 + L]$, удовлетворяющее начальным условиям $y(x_0) = y_0$. Численные методы позволяют приближенно вычислить искомое решение $y(x)$ в некоторых точках $x_i \in [x_0, x_0 + L]$. Решение ищется в виде последовательности значений $y_0, y_1, y_2, \dots, y_n$, где y_i – приближенное значение точного решения $y(x)$ в точке x_i .

Рассматриваются методы, основанные на разложении решения задачи Коши в ряд Тейлора, среди которых подробно исследован метод Эйлера, предложена его геометрическая интерпретация, определены одношаговая погрешность и погрешность на всем промежутке.

Далее рассматриваются методы Рунге-Кутты второго и четвертого порядков. Среди методов Рунге-Кутты второго порядка выделяются методы Эйлера с пересчетом и метод Коши.

Затем предлагается изучить разностные методы решения задачи Коши, среди которых особое внимание уделено интерполяционным и экстраполяционным формулам Адамса.

При освоении данной темы студенту предлагается решить следующие задачи:

1. Дана задача Коши :

$$y' = -\frac{3y}{x+1},$$

$$y(0) = 2.$$

Найти приближенные значения решения в точках 0,1; 0,2; 0,3 по методу Эйлера, Эйлера с пересчетом и по методу Коши; сравнить с точным решением.

2. Дана задача Коши :

$$y' = -\frac{3y}{x+1},$$

$$y(0)=2.$$

Найти приближенные значения решения в точках 0,2; 0,3 по экстраполяционному методу Адамса и интерполяционному методу Адамса. Значение в точке 0,1 вычислить по методу Эйлера с пересчетом.

Для более глубокого понимания проблемы выбора конкретного метода решения задачи Коши, требуется сравнить нескольких методов. Студентам предлагается выполнить лабораторную работу по данной теме.

Постановка задачи. Решить задачу Коши $y' = f(x, y)$, $y(x_0) = y_0$. на отрезке $[x_0, x_0 + 1]$ при $h = 0,1$. Сравнить полученные приближенные решения с точным решением задачи Коши.

При выполнении лабораторной работы студентам необходимо обратить внимание на правильное нахождение точного решения задачи Коши, составить алгоритмы решения задачи различными методами, провести численный эксперимент, сравнить полученные результаты с

точным решением и обосновать полученные результаты, построить графики точного и приближенных решений с помощью MS Excel.

Для освоения данной темы студентам предлагается воспользоваться следующей литературой:

1. Киреев В. И., Пантелеев А. В. Численные методы в примерах и задачах. – М.: Высшая школа, 2004. Глава 6. Численные методы решения обыкновенных дифференциальных уравнений, стр. 272 – 331.
2. Бахвалов Н. С., Лапин А. В., Чижонков Е. В. Численные методы в задачах и упражнениях. – М.: Высшая школа, 2000. Глава 7. Решение дифференциальных уравнений стр. 100 – 188.

Тема 8. Метод наименьших квадратов.

В данной теме рассматривается постановка задачи, когда требуется приблизить таблично заданную функцию по методу наименьших квадратов. В этом случае задача построения функции непрерывного аргумента по дискретной информации характеризуется двумя особенностями:

1. число точек, в которых проводятся измерения, обычно бывает достаточно большим;
2. значения функции в этих точках определяются приближенно в связи с неизбежными ошибками измерения. С учетом этого строить аппроксимирующую функцию в виде суммы большого числа слагаемых и добиваться ее точного равенства в узлах сетки некоторым значениям становится нецелесообразным.

В методе наименьших квадратов аппроксимирующая функция ищется в виде суммы, содержащей сравнительно небольшое число слагаемых.

Построим обобщенный многочлен

$$\Phi_m(x) = \sum_{i=1}^m a_i \varphi_i(x),$$

коэффициенты которого подберем так, чтобы значение

$$F = \sum_{k=1}^n (f_k - \sum_{i=1}^m a_i \varphi_i(x_k))^2$$

было минимальным. Функцию $\Phi_m(x)$ с набором коэффициентов, удовлетворяющих этому требованию, называют наилучшим приближением по методу наименьших квадратов. В этом случае коэффициенты многочлена $\Phi_m(x)$ ищутся из системы

$$\sum_{j=1}^n a_j (\varphi_j, \varphi_i) = (f, \varphi_i),$$

$$i = 1, \dots, m.$$

Полученные в результате решения этой системы коэффициенты дадут многочлен наилучшего среднеквадратичного приближения функции f .

Примером линейно независимой системы функций $\varphi_1, \dots, \varphi_m$ может служить система: $\varphi_1(x) = 1$, $\varphi_2(x) = x$, ..., $\varphi_m(x) = x^{m-1}$.

При освоении данной темы студенту предлагается решить следующие задачи:

1. Сеточная функция задана таблицей.

i	x_i	y_i
1	0	0
2	0,5	0,25
3	1	1

Построить линейную функцию $\Phi(x) = a_1 + a_2x$, которая даст наилучшее приближение по методу наименьших квадратов.

Для освоения данной темы студентам предлагается воспользоваться следующей литературой:

1. Киреев В. И., Пантелеев А. В. Численные методы в примерах и задачах. – М.: Высшая школа, 2004. Глава 4.4. Методы интегрального сглаживания, стр. 161 – 183.
2. Бахвалов Н. С., Лапин А. В., Чижонков Е. В. Численные методы в задачах и упражнениях. – М.: Высшая школа, 2000. Глава 2. Приближение функций и производных, стр. 12 – 30.

Обеспеченность литературой по курсу

«Методы вычислений в экономике»

(Научная библиотека УрГУ, ноябрь 2007, электронный каталог)

Математико-механический факультет

Бизнес-информатика (080700)

Наименование	Количество
Альсевич, Виталий Викентьевич. Математическая экономика: Конструктивная теория : Учеб. пособие для экон. специальностей вузов / В. В. Альсевич. — Минск : Дизайн ПРО, 1998. — 238 с. — Допущено М-вом образования Республики Беларусь. — Библиогр.: с. 227-228 (44 назв.). — ISBN 985-6182-70-0 : 12-00.	2
Афанасьев, Михаил Юрьевич. Исследование операций в экономике: модели, задачи, решения : Учеб. пособие: [Для вузов по направлению 521600 Экономика и специальности 061800 Математические методы в экономике] / М. Ю. Афанасьев, Б. П. Суворов. — М. : ИНФРА-М, 2003. — 444 с. — (Высшее образование). — Рек. Учеб.-метод. об-нием по классическому университетскому образованию. — Библиогр.: с. 436-440. — ISBN 5-16-001580-9 : 116-00.	2
Бахвалов, Н. С. Численные методы / Н. С. Бахвалов, Н. П. Жидков, Г. М. Кобельков. — 2-е изд. — М. ; СПб. : ФИЗМАТЛИТ : Невский диалект : Лаборатория Базовых Знаний, 2002. — 632 с. : ил. — (Математика. - Технический университет). — Рек. М-вом образования РФ для студентов физико-математических специальностей вузов. — Библиогр.: с. 622-626. — ISBN 5-93208-043-4 : 172-00. — 147-00.	4
Бахвалов, Николай Сергеевич. Численные методы : Учеб. пособие для вузов / Н. С. Бахвалов, Н. П. Жидков, Г. М. Кобельков. — М. : Наука : ФИЗМАТЛИТ, 1987. — 600 с. : 70 ил., 2 табл. — Библиогр.: с. 593-595 (69 назв.). — 1-60. — 30-00.	4
Бахвалов, Николай Сергеевич. Численные методы : Учеб. пособие для вузов / Н. С. Бахвалов, Н. П. Жидков, Г. М. Кобельков. — 3-е изд., доп. и перераб. — М. : БИНОМ : Лаборатория знаний, 2003. — 632 с. : ил. — (Математика. - Технический университет). — Рек. М-вом образования РФ. — Библиогр.: с. 624-628 (80 назв.). — ISBN 5-94774-060-5 : 243-00. — 295-00.	4
Бахвалов, Николай Сергеевич. Численные методы : учеб. пособие для вузов / Н. С. Бахвалов, Н. П. Жидков, Г. М. Кобельков. — 3-е изд., доп. и перераб. — М. : БИНОМ. Лаборатория знаний, 2004. — 636 с. : ил. — (Классический университетский учебник). — Рек. М-вом образования РФ. - 250-летию Моск. ун-та. — Библиогр.: с. 624-628 (80 назв.). — ISBN 5-94774-175-X : 297-00. — 342-00.	3
Бахвалов, Николай Сергеевич. Численные методы : учеб. пособие для вузов / Н. С. Бахвалов, Н. П. Жидков, Г. М. Кобельков. — 4-е изд. — М. : БИНОМ. Лаборатория знаний, 2006. — 636 с. : ил. — (Классический университетский учебник). — Рек. М-вом образования РФ. - 250-летию Моск. ун-та. — Библиогр.: с. 624-628 (80 назв.). — ISBN 5-94774-396-5.	1
Бахвалов, Николай Сергеевич. Численные методы в задачах и упражнениях / Н. С. Бахвалов, А. В. Лапин, Е. В. Чижонков ; Под общ. ред. В. А. Садовниченко. — М. : Высшая школа, 2000. — 190 с. — (Высшая школа). — Библиогр.: с. 188. — ISBN 5-06-003684-7 : 26-00. — 30-00. — 32-00. — 33-00.	7
Бахвалов, Николай Сергеевич. Численные методы. [Т. 1], Анализ, алгебра, обыкновенные дифференциальные уравнения : [Учеб. пособие для вузов по спец. "Прикл. математика". Т. 1] / Н. С. Бахвалов. — М. : Наука, 1973. — 631 с. : ил. — Библиогр.: С. 141-142. — ISBN 5-286-00638-8 : 1-47.	15
Березин, Иван Семенович. Методы вычислений. Т. 1 : [Учеб. пособие] / И. С. Березин, Н. П. Жидков. — М. : Физматгиз, 1959. — 464 с. : ил. — 11-00. — 3905-00.	21
Березин, Иван Семенович. Методы вычислений. Т. 1 : Учеб. пособие для вузов / И. С. Березин, Н. П. Жидков. — 3-е изд., перераб. и доп. — М. : Наука : Гл. ред. физ.-мат. лит., 1966. — 632 с. — Допущено М-вом образования РСФСР в качестве учебника для ун-тов. — Библиогр.: с. 632 (7 назв.). — 1-56. — 1-50. — 1-30. — 30-00.	40
Васильев, Федор Павлович. Численные методы решения экстремальных задач : [Учебное пособие для вузов по спец. "Прикл. математика"] / Ф. П. Васильев. — 2-е изд., перераб. и доп. — М. : Наука, 1988. — 549 с. : ил. — Библиогр.: с. 531-545 (343 назв.). — ISBN 5-02-013796-0 :	4

1-60. — 5680-00.	
Волков, Евгений Алексеевич. Численные методы : Учеб. пособие для вузов / Е. А. Волков. — 3-е изд., испр. — СПб. ; М. ; Краснодар : Лань, 2004. — 256 с. — (Учебники для вузов. - Специальная литература). — Библиогр.: с. 244 (23 назв.). — ISBN 5-8114-0538-3 : 100-00. — 117-00.	7
Волков, Евгений Алексеевич. Численные методы : Учеб. пособие для инж.-техн. спец. вузов / Е. А. Волков. — М. : Наука, 1982. — 254 с. : ил. — Предм. указ.: с. 249-254. — Библиогр.: с. 248. — 0-45. — 1000-00. — 5000-00; 13-00.	6
Голуб, Джин Х. Матричные вычисления = Matrix computations / Д. Голуб, Ч. Ван Лоун ; Пер. с англ. Ю. М. Нечепуренко, А. Ю. Романова, А. В. Собянина, Е. Е. Тыртышниковой; Под ред. В. В. Воеводина. — М. : Мир, 1999. — 548 с. : ил. — (Матричные вычисления). — ISBN 6-03-002406-9 : 63-00.	1
Демидович, Борис Павлович. Основы вычислительной математики : учеб. пособие / Б. П. Демидович, И. А. Марон. — 5-е изд., стер. — СПб. [и др.] : Лань, 2006. — 672 с. : ил. — (Лучшие классические учебники, Математика). — Библиогр. в конце гл. — ISBN 5-8114-0695-9.	2
Демидович, Борис Павлович. Приближенные методы анализа. Приближение функций, дифференциальные и интегральные уравнения : Ред. Б. П. Демидович / Б. П. Демидович, И. А. Марон, Э. З. Шувалова. — 3-е изд., перераб. — М. : Наука, 1967. — 368 с. — Библиогр. в конце глав. — 0-94. — 20-00.	6
Каханер Дэвид. Численные методы и программное обеспечение / Каханер Дэвид, Моулер Клив, Нэш Стивен ; Пер. с англ. под ред. Х. Д. Икрамова. — М. : Мир, 1998. — 575 с. : ил. — Библиогр.: с. 554-559. — ISBN 5-03-002432-8 : 36-00.	1
Красс, . Математические методы и модели для магистрантов экономики : Учеб. пособие. — М. [и др.] : Питер, 2006. — 303 с. — (Профессиональный учебник: Экономика). — Рек. Учебно-метод. центром "Профессиональный учебник"; На обл. авт. не указаны; Парал. загл. англ. — Библиогр.: с. 286-287 (18 назв.). — ISBN 5-469-00879-7.	1
Красс, Максим Семенович. Математика для экономистов : Учеб. пособие для вузов / М. С. Красс, Б. П. Чупрынов. — СПб. : Питер, 2004. — 464 с. : ил. — (Учебное пособие). — Рек. Учебно-метод. об-нием. — Библиогр.: с. 461 (13 назв.). — ISBN 5-94723-672-9 : 145-00. — 149-00.	3
Красс, Максим Семенович. Математика для экономических специальностей : Учебник для вузов / М. С. Красс. — М. : ИНФРА-М, 1999. — 464 с. — (Высшее образование). — Рек. М-вом общ. и проф. образования РФ. — Библиогр.: с. 441 (13 назв.). — ISBN 5-86225-575-3 : 100-00.	1
Красс, Максим Семенович. Математика для экономических специальностей : Учебник для вузов / М. С. Красс. — 4-е изд., испр. — М. : Дело, 2003. — 704 с. — Рек. М-вом образования РФ. — Библиогр.: с. 686-687 (16 назв.). — ISBN 5-7749-0264-1 : 355-00.	1
Красс, Максим Семенович. Математика для экономического бакалавриата : [учебник по направлению "Экономика" и экон. специальностям] / М. С. Красс, Б. П. Чупрынов. — М. : Дело : Акад. нар. хоз-ва при Правительстве РФ, 2005. — 574, [1] с. : ил., табл., граф. — Допущено Учеб.-метод. об-нием по образованию в обл. экономики и экон. теории. — Предм. указ.: с. 569-575. — Библиогр.: с. 568 (15 назв.).	1
Красс, Максим Семенович. Основы математики и ее приложения в экономическом образовании : Учебник / М. С. Красс, Б. П. Чупрынов ; Акад. нар. хоз-ва при правительстве РФ. — 2-е изд., испр. — М. : Дело, 2001. — 688 с. : ил. — Рек. М-вом образования РФ для вузов по экон. спец. и направлениям. — Библиогр.: с. 680 (16 назв.). — ISBN 5-7749-0186-6 : 275-00.	4
Кундышева, Елена Сергеевна. Математическое моделирование в экономике : учеб. пособие / Е. С. Кундышева ; под науч. ред. Б. А. Сулакова. — Изд. 2-е, перераб. и испр. — М. : Дашков и Кш, 2006. — 351 с. : граф. — Рек. Учеб.-метод. об-нием вузов РФ по образованию в области прикладной математики и управления качеством. — Библиогр. в конце гл. — ISBN 5-94798-789-9 : 152-00.	2
Минюк, Степан Андреевич. Математические методы и модели в экономике : Учеб. пособие для вузов / С. А. Минюк, Е. А. Ровба, К. К. Кузьмич. — Минск : ТетраСистемс, 2002. — 432 с. — Библиогр.: с. 423-426 (59 назв.). — ISBN 985-470-010-0 : 76-00.	1
Орехов, Николай Андреевич. Математические методы и модели в экономике = Mathematical methods and models in economics : Учеб. пособие / Н. А. Орехов, А. Г. Левин, Е. А. Горбунов ; Под ред. Н. А. Орехова. — М. : ЮНИТИ, 2004. — 303 с. — (Профессиональный учебник: Экономика). — Рек. Учебно-метод. центром "Профессиональный учебник"; На обл. авт. не указаны; Парал. загл. англ. — Библиогр.: с. 286-287 (18 назв.). — ISBN 5-238-00646-2 : 113-00. — 106-00.	8

Федосеев, Владилен Валентинович. Экономико-математические методы и модели в маркетинге : Учеб. пособие для вузов / В. В. Федосеев, Н. Д. Эриашвили ; Под ред. В. В. Федосеева. — 2-е изд., перераб. и доп. — М. : ЮНИТИ-ДАНА, 2001. — 159 с. : табл. — Рек. М-вом образования РФ. — Библиогр.: с. 156. -157 (18 назв.). — ISBN 5-238-00237-8 : 38-00. — 74-00. — 59-00.	30
Экономико-математические методы и прикладные модели : Учеб. пособие для вузов / В. В. Федосеев, А. Н. Гармаш, Д. М. Дайитбеков и др. ; Под ред. В. В. Федосеева. — М. : ЮНИТИ, 2002. — 392 с. — Рек. М-вом образования РФ. — Библиогр.: с. 387-388 (23 назв.). — ISBN 5-238-00068-5 : 73-00.	18