



**Уральский
федеральный
университет**

имени первого Президента
России Б.Н.Ельцина

**Институт
фундаментального
образования**

**В. И. БЕЛОУСОВА
А. Ф. РЫБАЛКО,
Н. М. РЫБАЛКО
В. Г. ЧАЩИНА**

ЭЛЕМЕНТАРНЫЕ ОСНОВЫ МАТЕМАТИКИ (АДАПТАЦИОННЫЙ КУРС)

Учебно-методическое пособие

Министерство науки и высшего образования
Российской Федерации

Уральский федеральный университет
имени первого Президента России Б. Н. Ельцина

В. И. Белоусова, А. Ф. Рыбалко,
Н. М. Рыбалко, В. Г. Чашина

ЭЛЕМЕНТАРНЫЕ ОСНОВЫ МАТЕМАТИКИ (АДАПТАЦИОННЫЙ КУРС)

Учебно-методическое пособие

Рекомендовано методическим советом
Уральского федерального университета
для студентов вуза, обучающихся
по инженерно-техническим специальностям
и направлениям бакалавриата базового уровня

Екатеринбург
Издательство Уральского университета
2025

УДК 51(075.8)

ББК 22.1я73

Э45

Рецензенты:

кафедра общей физики Уральского государственного лесотехнического университета (завкафедрой д-р физ.-мат. наук, проф. *М. П. Кащенко*);
научный сотрудник Института физики металлов имени М. Н. Михеева УрО РАН канд. физ.-мат. наук *С. П. Савченко*

Научный редактор — канд. физ.-мат. наук, доц. *О. В. Расин*

Элементарные основы математики (адаптационный курс) : учеб.-метод. пособие / В. И. Белоусова, А. Ф. Рыбалко, Н. М. Рыбалко, В. Г. Чашина; М-во науки и высш. образования РФ. — Екатеринбург : Изд-во Урал. ун-та, 2025. — 131, [1] с. ISBN 978-5-7996-4006-4. — Текст : непосредственный.

ISBN 978-5-7996-4006-4

Пособие предназначено студентам для устранения пробелов в знаниях, полученных в средней школе, и для успешного изучения математики в университете.

Данная работа содержит справочные данные из курса школьной математики. Достоинством пособия является концентрированное и наглядное (в виде таблиц и графиков) изложение понятий и примеры их решения для выполнения самостоятельной работы.

Библиогр.: 8 назв. Табл. 4. Рис. 69.

УДК 51(075.8)

ББК 22.1я73

ISBN 978-5-7996-4006-4

© Уральский федеральный
университет, 2025

ОГЛАВЛЕНИЕ

Список некоторых обозначений и сокращений	5
1. АРИФМЕТИКА И АЛГЕБРА.....	7
1.1. Действительные, рациональные и иррациональные числа	7
1.2. Числовые неравенства и их свойства.....	8
1.3. Дроби.....	9
1.4. Пропорции	10
1.5. Проценты	10
1.6. Степени и корни	11
1.7. Модуль (абсолютная величина)	13
1.8. Формулы сокращенного умножения	13
1.9. Иррациональные выражения	14
1.10. Сравнение чисел	15
1.11. Тождественные преобразования алгебраических выражений...	16
1.12. Выделение полного квадрата в квадратном трехчлене.....	17
1.13. Прогрессии.....	18
2. ФУНКЦИИ, ИХ СВОЙСТВА И ГРАФИКИ	19
2.1. Основные понятия.....	19
2.2. Линейная функция	20
2.3. Квадратичная функция	22
2.4. Степенные функции $y = x^a$	24
2.5. Дробно-линейная функция.....	27
2.6. Показательная функция $y = a^x$ ($a > 0, a \neq 1$)	29
2.7. Логарифмы и их свойства.....	29
2.8. Логарифмическая функция $y = \log_a x$ ($a > 0, a \neq 1$)	30
2.9. Геометрические преобразования графиков функций.....	31
3. РАЦИОНАЛЬНЫЕ УРАВНЕНИЯ	34
3.1. Линейные уравнения.....	34
3.2. Квадратные уравнения	35
3.3. Теория многочленов	36
3.4. Кубические уравнения	38
3.5. Дробно-рациональные уравнения	39

4. РАЦИОНАЛЬНЫЕ НЕРАВЕНСТВА	41
4.1. Решение квадратных неравенств	41
4.2. Дробно-рациональные неравенства	42
4.3. Системы рациональных уравнений	43
5. ИРРАЦИОНАЛЬНЫЕ УРАВНЕНИЯ	46
6. ИРРАЦИОНАЛЬНЫЕ НЕРАВЕНСТВА.....	49
7. УРАВНЕНИЯ, СОДЕРЖАЩИЕ ЗНАК АБСОЛЮТНОЙ ВЕЛИЧИНЫ.....	51
8. НЕРАВЕНСТВА, СОДЕРЖАЩИЕ ЗНАК АБСОЛЮТНОЙ ВЕЛИЧИНЫ.....	53
9. ПОКАЗАТЕЛЬНЫЕ УРАВНЕНИЯ	55
10. ЛОГАРИФИЧЕСКИЕ УРАВНЕНИЯ	58
11. ЛОГАРИФИЧЕСКИЕ НЕРАВЕНСТВА	61
12. ТРИГОНОМЕТРИЯ	64
12.1. Определения, знаки и значения тригонометрических функций	64
12.2. Формулы тригонометрических функций.....	66
12.3. Свойства и графики тригонометрических функций	70
12.4. Тригонометрические уравнения	74
12.5. Тригонометрические неравенства. Примеры решений	78
12.6. Обратные тригонометрические функции	79
13. ЭЛЕМЕНТЫ МАТЕМАТИЧЕСКОГО АНАЛИЗА	83
14. ВЕКТОРНАЯ АЛГЕБРА	86
15. ПЛАНИМЕТРИЯ.....	90
16. СТЕРЕОМЕТРИЯ.....	98
ЗАДАНИЯ ДЛЯ САМОСТОЯТЕЛЬНОЙ РАБОТЫ	104
БИБЛИОГРАФИЧЕСКИЙ СПИСОК.....	131

СПИСОК ОБОЗНАЧЕНИЙ И СОКРАЩЕНИЙ

$a \in A$ — элемент принадлежит множеству A .

$a \notin A$ — a не принадлежит A .

$A \subset B$ — A — подмножество множества B , A содержится в B , B содержит A .

$\emptyset$ — пустое множество.

$A \cup B$ — объединение множеств.

$A \cap B$ — пересечение множеств.

$\exists$ — квантор существования.

$\exists a \in A$ — существует элемент a принадлежащий множеству A .

$\forall$ — квантор всеобщности.

$\forall a \in A$ — для каждого элемента a принадлежащего множеству A .

∞ — бесконечность.

$A \Rightarrow B$ — из A следует B .

$A \Leftrightarrow B$ — A эквивалентно B , A равносильно B .

$$\sum_{j=1}^n a_j = a_1 + a_2 + \dots + a_n.$$

$$\prod_{j=1}^n a_j = a_1 \cdot a_2 \cdot \dots \cdot a_n.$$

$$e = \lim_{n \rightarrow \infty} \left(1 + \frac{1}{n}\right)^n = 2,718\,281\,828\dots — \text{основание натуральных логарифмов.}$$

ОДЗ — область допустимых значений.

ООН — области определения неравенства.

ООУ — области определения уравнения.

ООФ — области определения функции.

Числовые множества

N — множество натуральных чисел $N = \{ 1, 2, \dots, n, \dots \}$.

Z — множество целых чисел $Z = \{ 0, \pm 1, \pm 2, \dots, \pm n, \dots \}$.

Q — множество рациональных чисел (вида $\frac{m}{n}$, $m, n \in Z$, $n \neq 0$).

I — множество иррациональных чисел $\pm\sqrt{2}$, $\pm\sqrt[3]{5}$, e , π , $\dots$.

R — множество действительных (вещественных) чисел, $R = Q \cup I$.

Справедливо соотношение включения: $R \supset Q \supset Z \supset N$.

Числовые промежутки

Интервал: $a < x < b$, $x \in (a, b)$.

Отрезок (сегмент): $a \leq x \leq b$, $x \in [a, b]$.

Полуинтервал (полусегмент): $\begin{cases} a < x \leq b, & x \in (a, b]; \\ a \leq x < b, & x \in [a, b). \end{cases}$

Луч: $\begin{cases} a \leq x < \infty, & x \in [a, \infty) \quad (x \geq a); \\ -\infty < x \leq b, & x \in (-\infty, b] \quad (x \leq b). \end{cases}$

1. АРИФМЕТИКА И АЛГЕБРА

1.1. Действительные, рациональные и иррациональные числа

- **Определение.** Числа 1, 2, 3, ... называются *натуральными* и обозначаются $N = \{ n \} = \{ 1, 2, 3, \dots \}$.

- **Определение.** Числа $Z = \{ 0, 1, -1, 2, -2, \dots, \pm n, \dots \}$, $n \in N$, образуют множество *целых* чисел.

Натуральное число большее единицы называется *простым*, если оно не имеет других делителей, кроме единицы и самого себя. Например, 2, 3, 5, 7, 11 — простые числа. Натуральное число, имеющее хотя бы один делитель отличный от единицы и самого себя, называется *составным*. Например, числа 6, 14, 28 составные. Натуральное число называется *четным*, если оно делится (нацело) на число 2, и *нечетным*, если оно не делится на 2.

- **Определение.** Числа вида $\frac{m}{n}$, где $m \in Z, n \in N$, называются *обыкновенными дробями*. Дроби $\frac{m}{n}$ и $\frac{km}{kn}, k \in Z$, определяют одно и то же число.

Множество целых чисел является подмножеством множества обыкновенных дробей ($n = 1$).

- **Определение.** Если $|m| < n$, то обыкновенная дробь называется *правильной*, если $|m| \geq n$ — *неправильной*.

Обыкновенные дроби в десятичной системе счисления могут быть представлены в виде конечной или бесконечной периодической десятичной дроби.

• **Определение.** Совокупность целых и дробных чисел (положительных и отрицательных), а также число нуль составляют *множество рациональных чисел*: $Q = \left\{ 0, \pm n, \pm \frac{m}{n} \right\}$, где $m \in Z, n \in N$.

• **Определение.** Числа выражающиеся бесконечной непериодической десятичной дробью составляют *множество иррациональных чисел* I . (Например, $\sqrt{2}, \sqrt[3]{3}, \pi, e$.)

• **Определение.** Числа рациональные и иррациональные составляют *множество действительных чисел*.

Между множеством действительных чисел и множеством точек числовой прямой существует взаимно-однозначное соответствие.

1.2. Числовые неравенства и их свойства

При сравнении двух действительных чисел a и b возможно три случая:

$$a \text{ равно } b (a = b), \text{ если } a - b = 0; \quad (1)$$

$$a \text{ больше } b (a > b), \text{ если } a - b > 0; \quad (2)$$

$$a \text{ меньше } b (a < b), \text{ если } a - b < 0. \quad (3)$$

При объединении выражений (1) и (2) получаем неравенство

$$a \text{ не меньше } b (a \geq b), \quad (4)$$

при объединении выражений (1) и (3) — неравенство

$$a \text{ не больше } b (a \leq b). \quad (5)$$

Неравенства (2) и (3) называются *строгими*, (4) и (5) — *нестрогими*.

Рассмотрим свойства числовых неравенств. Доказательства этих свойств опираются на следующие утверждения: 1) сумма положительных чисел положительна; 2) произведение положительных чисел положительно; 3) число противоположное положительному отрицательно. (Напомним, что противоположным числу a называется такое число $(-a)$, что $a + (-a) = 0$.)

1. Если $a > b$, то $b < a$.
2. Если $a > b$ и $b > c$, то $a > c$ (свойство транзитивности).
3. Если $a > b$, то $a + c > b + c$, где c — любое действительное число.

В частности, $a > b + c \Rightarrow a + (-c) > b + c + (-c) \Rightarrow a - c > b$, т. е. любое сла-
гаемое можно переносить из одной части неравенства в другую с про-
тивоположным знаком.

4. Если $a > b$ и $c > 0$, то $ac > bc$.

5. Если $a > b$ и $c < 0$, то $ac < bc$.

6. Если $a > b$ и $c > d$, то $a + c > b + d$, т. е. неравенства одинакового
смысла можно почленно складывать.

7. Если $a > b$ и $c < d$, то $a - c > b - d$, т. е. неравенства противополож-
ного смысла можно почленно вычитать, оставляя знак уменьшаемого.

8. Если $a > b > 0$ и $c > d > 0$, то $ac > bd$.

9. Если $a > b > 0$, то $\frac{1}{a} < \frac{1}{b}$.

10. Если $a > b \geq 0$ и $n \in N$, то $a^n > b^n$.

11. Если $a > b \geq 0$ и $n \in N$, то $\sqrt[n]{a} > \sqrt[n]{b}$.

12. Если $a > b$, то $a^{2n+1} > b^{2n+1}$, $n \in N$.

13. Если $a > b$ и $n \in N$, то $\sqrt[2n+1]{a} > \sqrt[2n+1]{b}$.

*Средним арифметическим n действительных чисел $a_1, a_2, \dots, a_n$ назы-
вается число равное $\frac{a_1 + a_2 + \dots + a_n}{n}$.*

*Средним геометрическим n действительных чисел $a_1, a_2, \dots, a_n$ назы-
вается число равное $\sqrt[n]{a_1 \cdot a_2 \cdot \dots \cdot a_n}$.*

1.3. Дроби

$\frac{a}{b} = a : b$ — обыкновенная дробь ($a, b \in Z$, $b \neq 0$).

$+d_m \dots d_1 d_0, d_{-1} d_{-2} =$
 $= \pm (d_m \cdot 10^m \dots + d_1 \cdot 10^1 + d_0 \cdot 10^0 + d_{-1} \cdot 10^{-1} + d_{-2} \cdot 10^{-2} + \dots)$ — десятичная
дробь ($m \in N$).

$A \frac{a}{b} = A + \frac{a}{b}$ — смешанная дробь ($A, a, b \in N$).

Основные свойства дробей.

$$1. \frac{a}{b} = \frac{ac}{bc}, c \neq 0. \quad 2. \frac{a}{b} = \frac{c}{d}, \text{ если } ad = bc.$$

$$3. \frac{a}{b} \pm \frac{c}{b} = \frac{a \pm c}{b}. \quad 4. \frac{a}{b} \cdot \frac{c}{d} = \frac{ac}{bd}.$$

$$5. \frac{a}{b} : \frac{c}{d} = \frac{ad}{bc}. \quad 6. \frac{a}{b} m = m \frac{a}{b} = \frac{am}{b}.$$

$$7. \frac{a}{b} : m = \frac{a}{bm}, (m \neq 0). \quad 8. m : \frac{a}{b} = \frac{mb}{a}.$$

$$9. \left(\frac{a}{b}\right)^n = \frac{a^n}{b^n}. \quad 10. \sqrt[n]{\frac{a}{b}} = \frac{\sqrt[n]{a}}{\sqrt[n]{b}}, (ab > 0).$$

1.4. Пропорции

Отношение — частное от деления одного числа на другое. Равенство двух отношений $\frac{a}{b} = \frac{c}{d}$ ($bd \neq 0$) называется *пропорцией*; a, d — *крайние члены* пропорции; b, c — *средние члены*. При этом $ad = bc$, что порождает четыре равносильных (при $abcd \neq 0$) пропорции

$$\frac{a}{b} = \frac{c}{d}; \quad \frac{a}{c} = \frac{b}{d}; \quad \frac{d}{b} = \frac{c}{a}; \quad \frac{d}{c} = \frac{b}{a}.$$

1.5. Проценты

Процентом называется сотая часть величины: $0,01 = 1\%$ — процент.

♦ **Примеры.**

1. Найдите число, которое составляет 115 % от 2860.

$$\text{Искомое число } \frac{2860 \cdot 115}{100} = 3289.$$

2. Найдите число, если 12,5 % от него равны 3000.

$$\text{Искомое число } \frac{3000 \cdot 100}{12,5} = 24\,000.$$

3. Найдите выражение одного числа в процентах от другого, а именно: на сколько процентов увеличилось число 120, став равным 230.

$$\Delta = 230 - 120 = 110, \quad \frac{\Delta}{120} \cdot 100\% = \frac{110}{120} \cdot 100\% = 91,66\%.$$

1.6. Степени и корни

• **Определение.** Степенью a^n числа a ($a \in R$, $n \in N$) с натуральным показателем n называется произведение n множителей, каждый из которых равен a , $a^n = \underbrace{a \cdot a \cdot a \cdot \dots \cdot a}_n$; число a называется основанием степени,

число n — показателем степени.

Из этого определения следуют основные свойства степени:

$$1) a^m a^n = a^{m+n}; \quad 2) (a^m)^n = a^{mn}.$$

• **Определение.** Пусть $a \in R$, $p \in Z$. Степень a^p с целым показателем p определяется в соответствии со следующими соотношениями:

$$1) a^m = \underbrace{a \cdot a \cdot a \cdot \dots \cdot a}_m, \text{ если } p = m, m \in N;$$

$$2) a^{-m} = \frac{1}{a^m}, \text{ если } a \neq 0 \text{ и } p = -m, m \in N;$$

$$3) a^0 = 1, \text{ если } a \neq 0;$$

4) при $a = 0$ и $p = 0$ или $p < 0$ степень a^p с целым показателем p не определена.

Рассмотрим основные свойства степени с целым показателем. Пусть $a \in R$, $b \in R$, $a \neq 0$, $b \neq 0$, $n \in Z$, $m \in Z$, тогда

$$1) a^m a^n = a^{m+n}; \quad 2) \frac{a^m}{a^n} = a^{m-n};$$

$$3) (a^m)^n = a^{mn}; \quad 4) (ab)^n = a^n b^n;$$

$$5) \left(\frac{a}{b}\right)^n = \frac{a^n}{b^n}; \quad 6) \left(\frac{a}{b}\right)^{-n} = \left(\frac{b}{a}\right)^n;$$

$$7) a > 0 \Rightarrow a^n > 0; \quad 8) a < 0: \begin{cases} n = 2k \Rightarrow a^n > 0, \\ n = 2k + 1 \Rightarrow a^n < 0; \end{cases}$$

$$9) \text{ если } a > 1, \text{ то } n > m \Leftrightarrow a^n > a^m;$$

10) если $0 < a < 1$, то $n > m \Leftrightarrow a^n < a^m$;

11) если $a > 0$, $a \neq 1$, то $n = m \Leftrightarrow a^n = a^m$;

12) $0 < a < b$: $\begin{cases} n > 0 \Leftrightarrow a^n > b^n, \\ n = 0 \Leftrightarrow a^n = b^n, \\ n < 0 \Leftrightarrow a^n < b^n. \end{cases}$

• **Определение.** Число b называется *корнем n -й степени* из числа a (обозначается: $b = \sqrt[n]{a}$), если $b^n = a$. Также употребляется название «радикал» (от *лат.* radix — корень).

Случаи четных и нечетных n необходимо рассматривать отдельно.

1. $n = 2k$, $k \in \mathbb{N}$.

Если $b = \sqrt[2k]{a}$, то $b^{2k} = a = (b^2)^k \geq 0$, поэтому корни четной степени $\sqrt[2k]{a}$ существуют только для $a \geq 0$.

• **Определение.** *Арифметическим корнем n -й степени* из неотрицательного числа a называется неотрицательное число b (обозначаемое $b = \sqrt[n]{a}$), такое, что $b^n = a$.

Корни четной степени всегда понимаются как арифметические.

Основные свойства арифметических корней.

Пусть $a > 0$, $b > 0$, $n > 1$, $m > 1$, $k > 1$ ($n, m, k \in \mathbb{N}$), тогда

$$1) \sqrt[n]{a} \sqrt[k]{a} = \sqrt[nk]{a^{n+k}};$$

$$2) \sqrt[nk]{a^k} = \sqrt[n]{a};$$

$$3) \sqrt[n]{ab} = \sqrt[n]{a} \sqrt[n]{b};$$

$$4) \sqrt[n]{\frac{a}{b}} = \sqrt[n]{a} : \sqrt[n]{b};$$

$$5) \sqrt[n]{a} : \sqrt[k]{a} = \sqrt[nk]{a^{k-n}};$$

$$6) \left(\sqrt[n]{a} \right)^k = \sqrt[n]{a^k};$$

$$7) \sqrt[n]{\sqrt[k]{a}} = \sqrt[nk]{a}.$$

2. $n = 2k + 1$, $k \in \mathbb{N}$.

В этом случае имеют смысл и отрицательные подкоренные значения, например $\sqrt[3]{-8} = -2$. Однако многие из свойств арифметических корней для корней из отрицательных величин требуют соответствующего видоизменения, скажем, свойство 2 при $a < 0$ и нечетных n и k сохраняет свой вид, а при $a < 0$ и четных n и k должно быть записано как $\sqrt[nk]{a^k} = \sqrt[n]{|a|}$, где $|a|$ — абсолютная величина числа a . Свойство 6 при k четном изменяется на $\sqrt[n]{a^k} = \left(\sqrt[n]{|a|} \right)^k$, в частности, $\sqrt{a^2} = |a|$, что при $a < 0$ не равно a .

1.7. Модуль (абсолютная величина)

• **Определение.** Абсолютная величина, или *модуль* числа, определяется как $|a| = \begin{cases} a, & a \geq 0 \\ -a, & a < 0 \end{cases}, \forall a \in R.$

Модуль обладает следующими свойствами:

$$1) |a| \geq 0; \quad 2) |a| \geq a; \quad 3) |a| = |-a|; \quad 4) \sqrt{a^2} = |a|;$$

$$5) |ab| = |a||b|; \quad 6) \left| \frac{a}{b} \right| = \frac{|a|}{|b|}, b \neq 0; \quad 7) |a|^2 = a^2 = |a^2|;$$

$$8) |a+b| \leq |a| + |b|; \quad 9) |a-b| \leq |a| + |b|; \quad 10) |a+b| \geq ||a| - |b||;$$

$$11) |a-b| \geq ||a| - |b||; \quad 12) |a| \leq A \text{ и } |b| \leq B \Rightarrow |a+b| \leq A+B, |ab| \leq AB.$$

Итак, $||a| - |b|| \leq |a \pm b| \leq |a| + |b|.$

$$|a-b| = \begin{cases} a-b, & \text{если } a-b \geq 0, \text{ т. е. } a \geq b; \\ b-a, & \text{если } a-b \leq 0, \text{ т. е. } a \leq b. \end{cases}$$

$$\sqrt{(a-b)^2} = |a-b| = \sqrt{(b-a)^2} = |b-a|.$$

Геометрический смысл модуля действительного числа $|x| = \begin{cases} x, & x \geq 0; \\ -x, & x < 0 \end{cases}$

следующий: если числу x соответствует точка x на числовой оси, то $|x|$ — расстояние от этой точки до начала координат; $|x - x_0|$ — расстояние между точками x и x_0 на числовой оси.

Раскроем неравенства, содержащие неизвестное под знаком модуля.

$$1) |x| \leq a \Rightarrow x \in [-a, a]. \quad 2) |x| \geq a \Rightarrow x \in (-\infty, -a] \cup [a, +\infty).$$

$$3) |x| < a \Rightarrow x \in (-a, a). \quad 4) |x| > a \Rightarrow x \in (-\infty, -a) \cup (a, \infty).$$

1.8. Формулы сокращенного умножения

$$1. (a+b)^2 = (a+b)(a+b) = a^2 + 2ab + b^2.$$

$$2. (a-b)^2 = (a-b)(a-b) = a^2 - 2ab + b^2.$$

3. $a^2 - b^2 = (a+b)(a-b).$

4. $a^2 + b^2 = (a \pm b)^2 \mp 2ab$ — выделение полного квадрата.

5. $(a+b)^3 = (a+b)(a+b)^2 = a^3 + 3a^2b + 3ab^2 + b^3.$

6. $(a-b)^3 = (a-b)(a-b)^2 = a^3 - 3a^2b + 3ab^2 - b^3.$

7. $a^3 + b^3 = (a+b)(a^2 - ab + b^2).$

8. $a^3 - b^3 = (a-b)(a^2 + ab + b^2).$

9. $(a+b)^4 = a^4 + 4a^3b + 6a^2b^2 + 4ab^3 + b^4.$

1.9. Иррациональные выражения

1) $(\sqrt{a} + \sqrt{b})^2 = a + 2\sqrt{ab} + b.$

2) $(\sqrt{a} - \sqrt{b})^2 = a - 2\sqrt{ab} + b.$

3) $(\sqrt{a} - \sqrt{b})(\sqrt{a} + \sqrt{b}) = a - b.$

4) $(a - b\sqrt{c})(a + b\sqrt{c}) = a^2 - b^2c.$

5) $\sqrt{a \pm b\sqrt{c}} = \sqrt{\frac{a + \sqrt{a^2 - b^2c}}{2}} \pm \sqrt{\frac{a - \sqrt{a^2 - b^2c}}{2}}.$

6) $\frac{a}{\sqrt{b}} = \frac{a\sqrt{b}}{b}.$

7) $\frac{a}{\sqrt[n]{b}} = \frac{a\sqrt[n]{b^{n-1}}}{b}.$

8) $\frac{a}{1 \pm \sqrt{b}} = \frac{a(1 \mp \sqrt{b})}{1 - b}.$

9) $\frac{a}{\sqrt{b} \pm \sqrt{c}} = \frac{a(\sqrt{b} \mp \sqrt{c})}{b - c}.$

10) $\frac{a}{\sqrt{b \pm \sqrt{c}}} = \frac{a\sqrt{(b^2 - c)(b \mp \sqrt{c})}}{b^2 - c}.$

11) $(\sqrt[3]{a} \pm \sqrt[3]{b})(\sqrt[3]{a^2} \mp \sqrt[3]{ab} + \sqrt[3]{b^2}) = a \pm b.$

12) $\frac{a}{1 \pm \sqrt[3]{b}} = \frac{a(1 \mp \sqrt[3]{b} + \sqrt[3]{b^2})}{1 + b}.$

13) $\frac{a}{\sqrt[3]{b} \pm \sqrt[3]{c}} = \frac{a(\sqrt[3]{b^2} \mp \sqrt[3]{bc} + \sqrt[3]{c^2})}{b \pm c}.$

♦ **Пример.** Докажите тождество $\frac{9}{5 - \sqrt{7}} + \frac{22}{7 + \sqrt{5}} - \frac{1}{\sqrt{7} + \sqrt{5}} = 6.$

Проведем преобразование каждого слагаемого.

$$1) \frac{9}{5 - \sqrt{7}} = \frac{9(5 + \sqrt{7})}{(5 - \sqrt{7})(5 + \sqrt{7})} = \frac{9(5 + \sqrt{7})}{25 - 7} = \frac{9(5 + \sqrt{7})}{18} = \frac{5 + \sqrt{7}}{2}.$$

$$2) \frac{22}{7+\sqrt{5}} = \frac{22(7-\sqrt{5})}{(7+\sqrt{5})(7-\sqrt{5})} = \frac{22(7-\sqrt{5})}{49-5} = \frac{22(7-\sqrt{5})}{44} = \frac{7-\sqrt{5}}{2}.$$

$$3) \frac{1}{\sqrt{7}+\sqrt{5}} = \frac{\sqrt{7}-\sqrt{5}}{(\sqrt{7}+\sqrt{5})(\sqrt{7}-\sqrt{5})} = \frac{\sqrt{7}-\sqrt{5}}{7-5} = \frac{\sqrt{7}-\sqrt{5}}{2}.$$

$$\text{Окончательно } \frac{5+\sqrt{7}}{2} + \frac{7-\sqrt{5}}{2} - \frac{\sqrt{7}-\sqrt{5}}{2} = \frac{12}{2} = 6.$$

1.10. Сравнение чисел

Два положительных числа равны, если равны квадраты этих чисел; два числа равны, если равны кубы этих чисел.

♦ **Пример.** Сравните числа $a = \frac{-1-\sqrt{5}}{2}$ и $b = -\sqrt{3}$.

Запишем соотношение между a и b в виде $a \vee b$, где символ $\vee$ означает неизвестное соотношение между a и b : больше, меньше или равно. Противоположное соотношение будем обозначать символом $\wedge$.

Итак, $\frac{-1-\sqrt{5}}{2} \vee -\sqrt{3}$. Умножим это соотношение на (-1) , знак соотношения изменится на противоположный: $\frac{1+\sqrt{5}}{2} \wedge \sqrt{3}$ или $1+\sqrt{5} \wedge 2 \cdot \sqrt{3}$.

Возведем обе части неравенства в квадрат:

$$1+5+2 \cdot \sqrt{5} \wedge 12, \quad 2 \cdot \sqrt{5} \wedge 6, \quad \sqrt{5} \wedge 3.$$

Еще раз возведем в квадрат: $5 \wedge 9$. Однако $5 < 9$, следовательно, $\wedge$ означает $<$, а $\vee$ — противоположный знак $>$, т. е. $a > b$.

1.11. Тождественные преобразования алгебраических выражений

♦ Примеры.

1. Разложить на множители $6x^3y + 3x^2y^2 - 3xy^3$.

$$\begin{aligned} 6x^3y + 3x^2y^2 - 3xy^3 &= 3xy(2x^2 + xy - y^2) = 3xy(\underline{2x^2} + xy - y^2) = \\ &= 3xy(\underline{x^2} + \underline{x^2} + xy - y^2) = 3xy((x^2 + xy) + (x^2 - y^2)) = 3xy(x + y)(2x - y). \end{aligned}$$

2. Упростить $\frac{a^4 + a^3 + 4a^2 + 3a + 3}{a^3 - 1}$.

$$\frac{a^4 + a^3 + 4a^2 + 3a + 3}{a^3 - 1} = \frac{(a^2 + a + 1)(a^2 + 3)}{(a^2 + a + 1)(a - 1)} = \frac{a^2 + 3}{a - 1}, \text{ т. к.}$$

$$a^4 + a^3 + 4a^2 + 3a + 3 = a^2(a^2 + a + 1) + 3(a^2 + a + 1) = (a^2 + a + 1)(a^2 + 3).$$

3. Упростить выражение $\frac{a^{\frac{3}{2}} + b^{\frac{3}{2}}}{(a^2 - ab)^{\frac{2}{3}}} : \frac{a^{-\frac{2}{3}} \cdot \sqrt[3]{a-b}}{a\sqrt{a-b}\sqrt{b}}$ и вычислить при $a=1, 2; b=\frac{3}{5}$.

В процессе тождественных алгебраических преобразований воспользуемся правилами действия со степенями и формулами сокращенного умножения, например, $a^{\frac{3}{2}} = \sqrt[3]{a^3} = (\sqrt{a})^3$, $(\sqrt{a} - \sqrt{b})(\sqrt{a} + \sqrt{b}) = a - b$, $a^{\frac{3}{2}} + b^{\frac{3}{2}} = (\sqrt{a})^3 + (\sqrt{b})^3 = (\sqrt{a} + \sqrt{b})(a - \sqrt{ab} + b)$, тогда выражение принимает вид

$$\begin{aligned} &\frac{(\sqrt{a} + \sqrt{b})(a - \sqrt{ab} + b)}{\sqrt[3]{a^2} \sqrt[3]{(a-b)^2}} : \frac{\sqrt[3]{a-b}}{\sqrt[3]{a^2} (\sqrt{a} - \sqrt{b})(a + \sqrt{ab} + b)} = \\ &= \frac{(\sqrt{a} + \sqrt{b})(a - \sqrt{ab} + b)}{\sqrt[3]{a^2} \sqrt[3]{(a-b)^2}} \cdot \frac{\sqrt[3]{a^2} (\sqrt{a} - \sqrt{b})(a + \sqrt{ab} + b)}{\sqrt[3]{a-b}} = \\ &= (a - \sqrt{ab} + b)(a + \sqrt{ab} + b) = (a + b)^2 - (\sqrt{ab})^2 = a^2 + ab + b^2. \end{aligned}$$

При $a = 1,2$; $b = 0,6$

$$a^2 + ab + b^2 = 1,2^2 + 1,2 \cdot 0,6 + 0,6^2 = 1,44 + 0,72 + 0,36 = 2,52.$$

1.12. Выделение полного квадрата в квадратном трехчлене

Выражение $ax^2 + bx + c$ ($a \neq 0$) называется квадратным трехчленом относительно переменной x . Корнем квадратного трехчлена называют такое значение переменной x , при котором его значение равно нулю. Таким образом, корни квадратного трехчлена — корни квадратного уравнения $ax^2 + bx + c = 0$.

Выделение полного квадрата в квадратном трехчлене позволяет разложить его на линейные множители (при неотрицательном дискриминанте), что, в свою очередь, дает возможность получить корни квадратного уравнения. Например:

$$1) \quad x^2 + 2x - 8 = x^2 + 2x + 1 - 1 - 8 = (x + 1)^2 - 9 = (x - 2)(x + 4);$$

$$\begin{aligned} 2) \quad x^2 + 13x + 40 &= x^2 + 2x \cdot \frac{13}{2} + \left(\frac{13}{2}\right)^2 - \left(\frac{13}{2}\right)^2 + 40 = \left(x + \frac{13}{2}\right)^2 + \frac{160 - 169}{4} = \\ &= \left(x + \frac{13}{2}\right)^2 - \left(\frac{3}{2}\right)^2 = \left(x + \frac{13}{2} + \frac{3}{2}\right)\left(x + \frac{13}{2} - \frac{3}{2}\right) = (x + 8)(x + 5); \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} 3) \quad -3x^2 + 11x + 20 &= -3\left(x^2 - \frac{11}{3}x - \frac{20}{3}\right) = \\ &= -3\left(\left(x^2 - 2 \cdot \frac{11}{6}x + \frac{121}{36}\right) - \frac{121}{36} - \frac{20}{3}\right) = \\ &= -3\left[\left(x - \frac{11}{6}\right)^2 - \frac{361}{36}\right] = -3\left[\left(x - \frac{11}{6}\right)^2 - \left(\frac{19}{6}\right)^2\right] = \\ &= -3\left(x - \frac{11}{6} - \frac{19}{6}\right)\left(x - \frac{11}{6} + \frac{19}{6}\right) = \\ &= -3\left(x - \frac{30}{6}\right)\left(x + \frac{8}{6}\right) = -3(x - 5)\left(x + \frac{4}{3}\right). \Rightarrow x_1 = 5, x_2 = -\frac{4}{3}. \end{aligned}$$

1.13. Прогрессии

Арифметическая прогрессия $\{a_n\}$ — числовая последовательность $a_1, a_2, \dots, a_n, \dots$, $n \in N$, такая, что $\forall n > 1$, $a_n = a_{n-1} + d$ (d — разность).

$$1. a_{n+1} = a_n + d.$$

$$2. a_n = \frac{a_{n-1} + a_{n+1}}{2} \quad (n > 1).$$

$$3. a_n = a_1 + (n-1)d.$$

$$4. a_n = a_k + d(n-k), \quad 1 \leq k \leq n-1.$$

$$5. a_n = \frac{a_{n-k} + a_{n+k}}{2}, \quad 1 \leq k \leq n-1.$$

$$6. a_n + a_m = a_k + a_p, \text{ если } n+m = k+p.$$

$$7. a_1 = a_n - d(n-1).$$

$$8. d = \frac{a_n - a_1}{n-1} \quad (n > 1).$$

$$9. n = \frac{a_n - a_1}{d} + 1.$$

$$10. S_n = a_1 + a_2 + \dots + a_n.$$

$$11. S_n = \frac{a_1 + a_n}{2} n.$$

$$12. S_n = \frac{2a_1 + d(n-1)}{2} n.$$

$$13. S_n - S_{k-1} = a_k + a_{k+1} + \dots + a_n = \frac{a_k + a_n}{2} (n-k+1), \quad 1 < k \leq n$$

$$(n, k, m, p \in N).$$

Геометрическая прогрессия $\{b_n\}$ — числовая последовательность $b_1, b_2, \dots, b_n, \dots$, $n \in N$, такая, что $b_1 \neq 0$ и $\forall n > 1$, $b_n = b_{n-1} \cdot q$ (q — знаменатель).

$$1. b_{n+1} = b_n q.$$

$$2. b_n^2 = b_{n-1} \cdot b_{n+1} \quad (n > 1).$$

$$3. b_n = b_1 q^{n-1}.$$

$$4. b_n = b_k q^{n-k}, \quad 1 \leq k \leq n-1.$$

$$5. b_n = b_{n-k} \cdot q^k, \quad 1 \leq k \leq n-1.$$

$$6. b_{n+k} = b_n q^k.$$

$$7. b_n^2 = b_{n-m} \cdot b_{n+m}, \quad 1 \leq m \leq n-1.$$

$$8. b_n b_m = b_k b_p, \text{ если } n+m = k+p.$$

$$9. S_n = b_1 + b_2 + \dots + b_n.$$

$$10. S_n = \begin{cases} b_1 \frac{1-q^n}{1-q}, & q \neq 1; \\ b_1 n, & q = 1. \end{cases}$$

$$11. S_n = \frac{b_n q - b_1}{q-1}, \quad q \neq 1.$$

$$12. S = \lim_{n \rightarrow \infty} S_n = \frac{b_1}{1-q}, \text{ если}$$

$$0 < |q| < 1 \quad (n, k, m, p \in N).$$

2. ФУНКЦИИ, ИХ СВОЙСТВА И ГРАФИКИ

2.1. Основные понятия

• **Определение.** Переменная величина y называется *функцией* переменной величины x , если каждому численному значению x из множества $X = D(f)$ соответствует единственное определенное значение y из множества $Y = R(f)$: $y = f(x)$, $x \in X$, $y \in Y$. Переменная величина x называется *независимой переменной* или *аргументом*. Множество X называется *областью определения* функции (*ООФ*) или *областью допустимых значений аргумента* (*ОДЗ*). Множество изменения функции Y называется *областью значений* функции (*ОЗФ*).

• **Определение.** *График* функции $y = f(x)$ — множество точек плоскости xOy , координаты которых связаны соотношением $y = f(x)$. *Нули функции* $y = f(x)$ — точки $x \in X$, при которых функция обращается в нуль, т. е. корни уравнения $f(x) = 0$.

• **Определение.** Функция $f(x)$ с областью определения X называется *четной*, если для любого $x \in X$ выполняется равенство $f(x) = f(-x)$.

Из определения четной функции следует, что ее график симметричен относительно оси ординат (рис. 1).

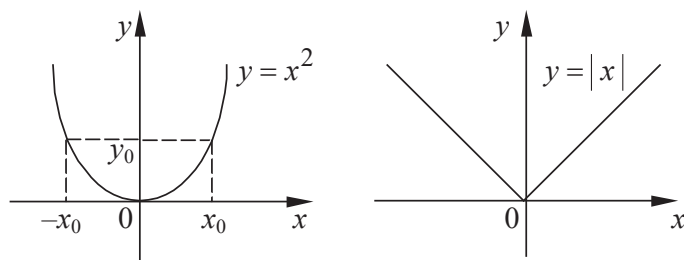


Рис. 1. Графики четных функций

• **Определение.** Функция $f(x)$ с областью определения X называется *нечетной*, если для любого $x \in X$ выполняется равенство $f(x) = -f(-x)$. График нечетной функции симметричен относительно начала координат (рис. 2).

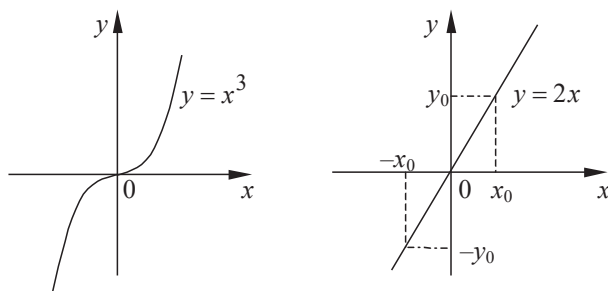


Рис. 2. Графики нечетных функций

Функция, в которой переменные x и y поменялись своими ролями, называется *обратной* по отношению к первоначальной функции. В свою очередь, первоначальная функция является обратной к полученной.

Свойство графиков взаимно обратных функций: один получается из другого зеркальным отражением относительно биссектрисы первого и третьего координатных углов, т. е. линии $y = x$.

Множество значений обратной функции $y = f^{-1}(x)$ совпадает с областью определения функции $y = f(x)$, а область определения обратной функции $y = f^{-1}(x)$ совпадает со множеством значений функции $y = f(x)$.

2.2. Линейная функция

• **Определение.** Функция вида $y = kx + b$, где k и b — некоторые числа, называется *линейной функцией*.

Свойства линейной функции.

1. Область определения: $D(f) = (-\infty, +\infty)$.

2. Множество значений: при $k \neq 0$, $R(f) = (-\infty, +\infty)$, при $k = 0$, $y = b$.

3. Четность-нечетность: при $k = 0$, функция четная, при $b = 0$, функция нечетная.

4. Периодичность: при $k = 0$, функция периодическая с любым положительным периодом; при $k \neq 0$ функция непериодическая.

5. Точки пересечения с осями: $\left(-\frac{b}{k}, 0\right)$ и $(0, b)$.

6. Промежутки знакопостоянства: при $k = 0$, функция сохраняет знак коэффициента b ; функция положительна при $k > 0$, если $x > -\frac{b}{k}$, и при $k < 0$, если $x < -\frac{b}{k}$.

7. Промежутки монотонности и экстремумы: функция возрастает при всех x , если $k > 0$, и убывает всех x , если $k < 0$.

8. Графиком функции $y = kx + b$ является прямая линия. Коэффициент k в уравнении прямой $y = kx + b$ называется угловым коэффициентом прямой. Используя, например, геометрический смысл производной $y' = \operatorname{tg} \alpha$, легко получаем в нашем случае $y' = k = \operatorname{tg} \alpha$, т.е. $k = \operatorname{tg} \alpha$, где α — угол между прямой и положительным направлением оси Ox (рис. 3).

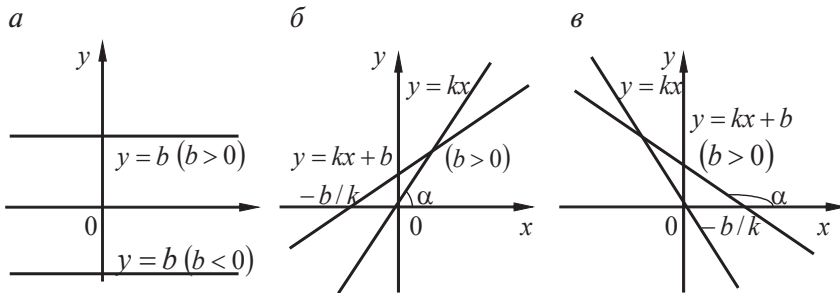


Рис. 3. Варианты графиков линейной функции:

a — при $k = 0$; $б$ — при $k > 0$; $в$ — при $k < 0$

Угол между двумя прямыми (рис. 4) определяется в соответствии с равенствами:

$$\operatorname{tg} \varphi = \operatorname{tg}(\alpha_2 - \alpha_1) = \frac{|\operatorname{tg} \alpha_2 - \operatorname{tg} \alpha_1|}{1 + \operatorname{tg} \alpha_1 \operatorname{tg} \alpha_2};$$

$$\operatorname{tg} \alpha_1 = k_1, \quad \operatorname{tg} \alpha_2 = k_2;$$

$$\operatorname{tg} \varphi = \frac{|k_2 - k_1|}{1 + k_1 k_2}.$$

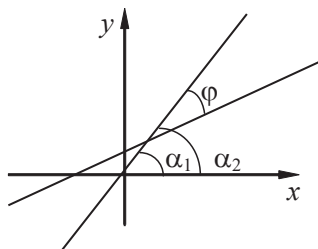


Рис. 4. Угол между двумя прямыми

Условием перпендикулярности прямых является $k_1 k_2 = -1$.

2.3. Квадратичная функция

• **Определение.** Функция задаваемая формулой $y = ax^2 + bx + c$ ($a \neq 0$) называется *квадратичной*.

Свойства квадратичной функции следующие.

1. Область определения: $D(f) = (-\infty, +\infty)$.

2. Область значений — $R(f)$.

Выполним преобразование:

$$ax^2 + bx + c = a \left(x^2 + \frac{b}{a}x + \frac{c}{a} \right) = a \left(x^2 + 2 \frac{b}{2a}x + \frac{c}{a} \right) = a \left[\left(x + \frac{b}{2a} \right)^2 - \frac{b^2 - 4ac}{4a^2} \right] =$$

$$= a \left(x + \frac{b}{2a} \right)^2 - \frac{b^2 - 4ac}{4a} = a \left(x + \frac{b}{2a} \right)^2 - \frac{D}{4a}, \text{ где } D = b^2 - 4ac \text{ — дискриминант.}$$

$$\left(x + \frac{b}{2a} \right)^2 \geq 0, \text{ поэтому при } a > 0 \quad R(f) = \left(-\frac{D}{4a}, +\infty \right), \text{ а при } a < 0,$$

$$R(f) = \left(-\infty, -\frac{D}{4a} \right).$$

3. При $b = 0$ функция четная.

4. Функция непериодическая.

5. Точки пересечения с осями координат:

$$(x_1, 0), (x_2, 0), \text{ где } x_1 = \frac{-b - \sqrt{D}}{2a}, x_2 = \frac{-b + \sqrt{D}}{2a}, \text{ если } D > 0;$$

$\left(-\frac{b}{2a}, 0\right)$, если $D=0$; если $D<0$, точек пересечения нет.

Точка пересечения с осью Oy — $(0, c)$.

6. Для нахождения промежутков монотонности и экстремумов найдем производную и критические точки:

$$y' = (ax^2 + bx + c)' = 2ax + b; \quad 2ax + b = 0 \text{ при } x = -\frac{b}{2a}.$$

Определим знаки y' в промежутках $\left(-\infty, -\frac{b}{2a}\right)$ и $\left(-\frac{b}{2a}, +\infty\right)$.

Результаты исследования представим в табл. 1.

Таблица 1

Результаты исследования

x	$\left(-\infty; -\frac{b}{2a}\right)$	$-\frac{b}{2a}$	$\left(-\frac{b}{2a}; +\infty\right)$
$a > 0$			
Знак или значение y'	—	0	+
Поведение y	Убывает	Минимум	Возрастает
$a < 0$			
Знак или значение y'	+	0	—
Поведение y	Возрастает	Максимум	Убывает

Значения функции в точке экстремума $y\left(-\frac{b}{2a}\right) = -\frac{D}{4a}$.

7. Графиком функции $y = ax^2 + bx + c$ является парабола с вершиной в точке $\left(-\frac{b}{2a}, -\frac{D}{4a}\right)$. Она получается из графика функции $y = ax^2$ путем сдвига вдоль оси Ox на $-\frac{b}{2a}$ единиц (вправо, если $-\frac{b}{2a} > 0$, и влево, если $-\frac{b}{2a} < 0$) и последующего сдвига вдоль оси Oy на $-\frac{D}{4a}$ единиц (вверх, если $-\frac{D}{4a} > 0$, и вниз, если $-\frac{D}{4a} < 0$). Парабола имеет ось симметрии, ею является прямая $x = -\frac{b}{2a}$.

В описании области значений продемонстрировано, что квадратичную функцию $y = ax^2 + bx + c$ всегда можно привести к виду

$y = a(x - x_0)^2 + y_0$ путем выделения полного квадрата. Точка с координатами (x_0, y_0) есть вершина параболы.

♦ **Пример.** Постройте график функции $y = x^2 - 3x - 3$.

Выделим полный квадрат:

$$y = x^2 - 3x - 3 = \underbrace{x^2 - 3x}_{\left(x - \frac{3}{2}\right)^2 - \frac{9}{4}} - 3 = \left(x - \frac{3}{2}\right)^2 - \frac{9}{4} - \frac{3 \cdot 4}{4} =$$

$$= \left(x - \frac{3}{2}\right)^2 - \frac{21}{4} = (x - 1,5)^2 - 5,25.$$

Следовательно, $A(1,5; -5,25)$ — вершина параболы. Найдем точку пересечения параболы с осью ординат.

Если $x = 0$, то $y = -3$: точка $(0, -3)$ — точка пересечения с осью Oy .

Ветви параболы направлены вверх, т. к. $a = 1 > 0$, ее график симметричен относительно прямой $x = 1,5$ (рис. 5).

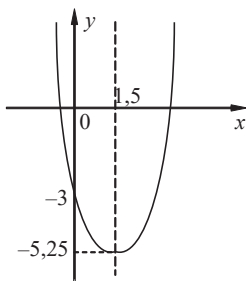


Рис. 5. График функции $y = x^2 - 3x - 3$

2.4. Степенные функции $y = x^n$

• **Определение.** Функция вида $y = x^n$, $n \in \mathbb{N}$, называется *степенной функцией с натуральным показателем*. Ее свойствами являются следующие.

1. Область определения функции: $D(f) = (-\infty, +\infty)$ (рис. 6).

2. Функция является четной при четном n и нечетной при нечетном n .

3. Если n нечетно, то функция $y = x^n$ возрастает при $x \in (-\infty, +\infty)$; если n четно, то функция $y = x^n$ возрастает при $x \in [0, +\infty)$ и убывает при $x \in (-\infty, 0]$.

4. Функция непрерывна на $(-\infty, +\infty)$.

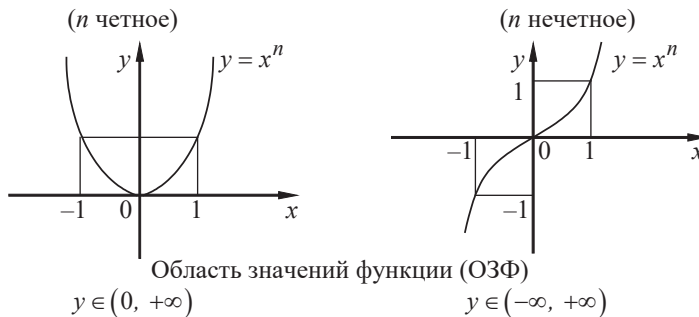


Рис. 6. Графики функции вида $y = x^n$

• **Определение.** Функция вида $y = x^{-n} = \frac{1}{x^n}$, ($n \in N$) называется *степенной функцией с целым отрицательным показателем*. Ниже приведены ее основные свойства.

1. Область определения функции: $D(f) = (-\infty, 0) \cup (0, +\infty)$.
2. Функция является четной при четном n и нечетной при нечетном n .
3. На промежутке $(0, +\infty)$ функция убывает как при четном, так и при нечетном n ; на промежутке $(-\infty, 0)$ функция убывает, если n нечетное, и возрастает, если n четное.
4. Функция непрерывна на $(-\infty, 0)$ и на $(0, +\infty)$; $x = 0$ — точка разрыва функции (рис. 7).

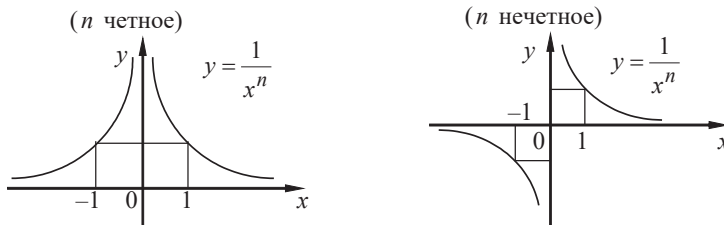


Рис. 7. Графики функции вида $y = x^{-n}$

Обратной пропорциональностью называется функция, заданная формулой $y = \frac{k}{x}$, где $k \neq 0$.

Свойства функции следующие.

1. Область определения: $D(f) = (-\infty, 0) \cup (0, \infty)$.
2. Область значений: $R(f) = (-\infty, 0) \cup (0, \infty)$. График не проходит через начало координат.
3. Функция $y = \frac{k}{x}$ нечетная, поскольку $f(-x) = \frac{k}{-x} = -\frac{k}{x} = -f(x)$. График этой функции симметричен относительно начала координат.
4. Если $k > 0$, то функция $y = \frac{k}{x}$ убывает на промежутке $(0, +\infty)$ и возрастает на промежутке $(-\infty, 0)$. Если $k < 0$, то функция $y = \frac{k}{x}$ убывает на промежутке $(-\infty, 0)$ и возрастает на промежутке $(0, +\infty)$.
5. Точек пересечения с осями координат не существует.
6. При $k > 0$, $y > 0$ на $(0, +\infty)$, $y < 0$ на $(-\infty, 0)$.
При $k < 0$, $y > 0$ на $(-\infty, 0)$, $y < 0$ на $(0, +\infty)$.
7. Функция непериодическая.
8. Если $k < 0$, то ветви графика расположены во II и в IV координатных четвертях. Графиком обратной пропорциональности $y = \frac{k}{x}$, $k \neq 0$, является гипербола (рис. 8).

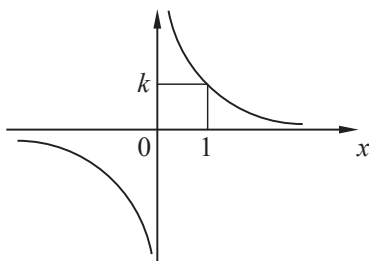


Рис. 8. График обратной пропорциональности

Корни степени n : $y = x^{1/n} = \sqrt[n]{x}$ ($n \in \mathbb{N}$).

Функция $y = \sqrt[n]{x}$ является обратной к функции $y = x^n$. После отражения графика функции $y = x^n$ симметрично относительно прямой $y = x$ получим график функции $y = \sqrt[n]{x}$ (рис. 9).

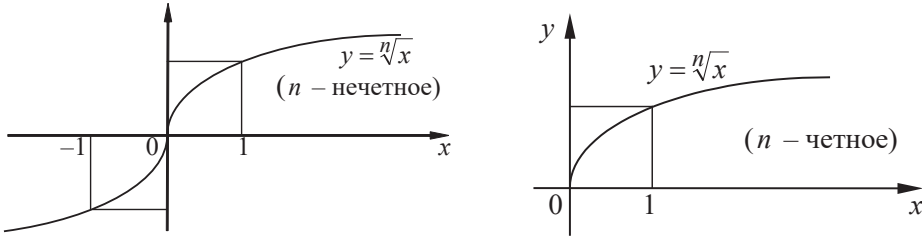


Рис. 9. Графики корней n -й степени

Степенная функция с дробным показателем $y = x^{p/q}$ ($p, q \in \mathbb{Z}$, $q \neq 0$) показана на рис. 10.

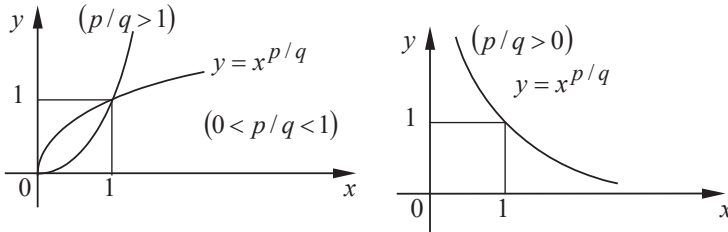


Рис. 10. Графики степенной функции с дробным показателем

2.5. Дробно-линейная функция

• **Определение.** Функция вида $y = \frac{ax+b}{cx+d}$, где a, b, c, d — постоянные, $c \neq 0$, $ad \neq bc$, называется *дробно-линейной*.

Свойства дробно-линейной функции.

1. Область определения функции: $D(f) = (-\infty, -d/c) \cup (-d/c, +\infty)$.
2. Для построения графика преобразуем функцию, выделяя целую часть следующим образом.

Преобразуем тождественно числитель, чтобы выделить в нем слагаемое содержащее знаменатель,

$$ax + b = \frac{a}{c}(cx + d) - \frac{ad}{c} + b,$$

поделив это выражение почленно на $(cx + d)$, получим выражение

$$y = \frac{a}{c} - \frac{\frac{ad}{c} - b}{cx + d} = \frac{a}{c} + \frac{\frac{bc - ad}{c^2}}{x + \frac{d}{c}}.$$

Таким образом, обозначая $\frac{a}{c} = n$, $\frac{d}{c} = m$, $k = \frac{bc - ad}{c^2}$, получаем, что $y = \frac{ax + b}{cx + d} = n + \frac{k}{x + m}$, где n — целая часть исходного выражения.

График дробно-линейной функции получается путем сдвига графика гиперболы $y = \frac{k}{x}$ на m единиц вдоль оси Ox и на n единиц вдоль оси Oy . Прямые $y = n$ и $x = -m$ являются асимптотами гиперболы (рис. 11).

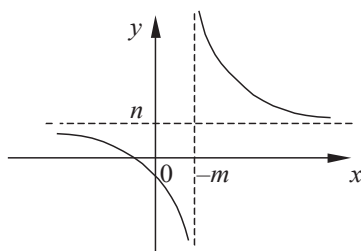
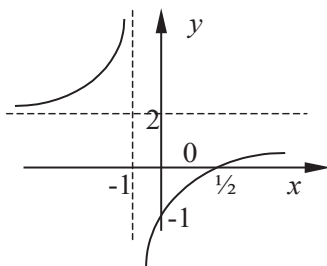


Рис. 11. График дробно-линейной функции

♦ **Пример.** Постройте график функции $y = \frac{2x - 1}{x + 1}$.

Запишем эту функцию так: $y = 2 - \frac{3}{x + 1}$. Графиком функции будет гипербола, центр которой находится в точке $(-1, 2)$, асимптоты — $x = -1$, $y = 2$ (рис. 12).

Рис. 12. График функции $y = \frac{2x - 1}{x + 1}$

2.6. Показательная функция $y = a^x$ ($a > 0, a \neq 1$)

• **Определение.** Функция вида $y = a^x$, где a — некоторое положительное число не равное единице ($a > 0, a \neq 1$), называется *показательной*.

Свойства показательной функции.

1. Область определения функции $D(f) = (-\infty, +\infty)$.
2. Множество значений функции $R(f) = (0, +\infty)$.
3. При $x = 0$ значение функции $y = 1$.
4. При $a > 1$ функция возрастает на всей числовой оси; если $x > 0$, то $y = a^x > 1$; если $x < 0$, то $0 < a^x < 1$.
5. При $0 < a < 1$ функция убывает на всей числовой оси; если $x > 0$, то $0 < a^x < 1$; если $x < 0$, то $a^x > 1$ (рис. 13).

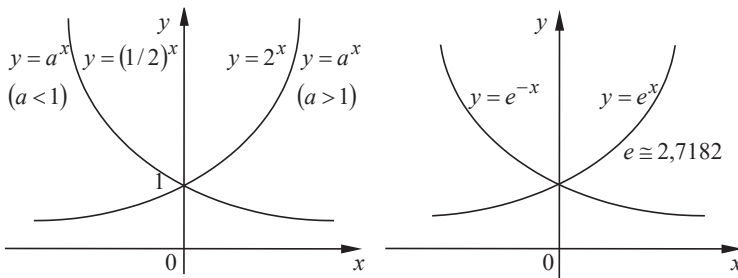


Рис. 13. Графики показательных функций

2.7. Логарифмы и их свойства

• **Определение.** Логарифмом числа b по основанию a (обозначается $\log_a b$), где $b > 0, a > 0, a \neq 1$, называется показатель степени, в которую надо возвести основание a , чтобы получить число b , $a^{\log_a b} = b$. Иначе можно определить так: x — логарифм ($x = \log_a b$) числа $b > 0$ по основанию $a > 0$ ($a \neq 1$), если $a^x = b$.

Приведем свойства логарифмов.

1. $\log_a 1 = 0$.
2. $\log_a a = 1$.
3. $\log_a bc = \log_a |b| + \log_a |c|$ ($bc > 0$).

$$4. \log_a \frac{b}{c} = \log_a |b| - \log_a |c| \quad (bc > 0).$$

$$5. \log_a b^n = n \log_a b.$$

$$6. \log_a \sqrt[n]{b} = \frac{1}{n} \log_a b.$$

$$7. \log_{a^m} b^n = \frac{n}{m} \log_a b.$$

$$8. \log_{a^n} b = \frac{1}{n} \log_a b.$$

$$9. \log_a b = \log_{a^n} b^n.$$

$$10. \log_a b = \frac{\log_c b}{\log_c a}.$$

$$11. \log_a b = \log_c b \cdot \log_a c.$$

$$12. \log_a b = \frac{1}{\log_b a}.$$

$$13. \log_{10} b = \lg b.$$

$$14. \log_e b = \ln b.$$

2.8. Логарифмическая функция $y = \log_a x$ ($a > 0, a \neq 1$)

• **Определение.** Функция $y = \log_a x$ обратная показательной функции называется *логарифмической*.

Свойства логарифмической функции.

1. Область определения функции: $x \in (0, +\infty)$.

2. Множество значений функции $y \in (-\infty, +\infty)$.

3. При $x = 1, y = \log_a x = 0$.

4. При $a > 1$ функция возрастает; если $0 < x < 1$, то $\log_a x < 0$, если $x > 1$, то $\log_a x > 0$.

5. При $0 < a < 1$ функция убывает; если $0 < x < 1$, то $\log_a x > 0$, если $x > 1$, то $\log_a x < 0$ (рис. 14).

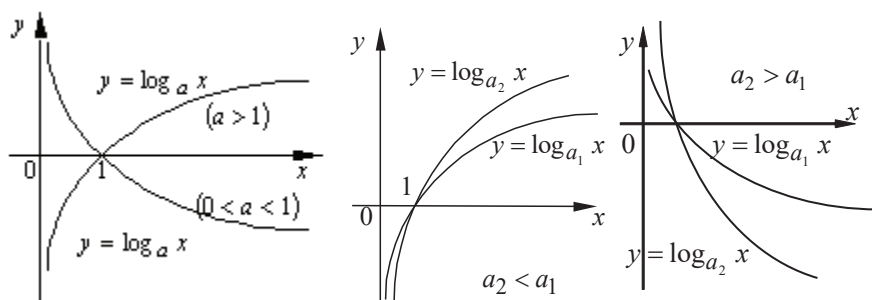


Рис. 14. Графики логарифмических функций

2.9. Геометрические преобразования графиков функций

Если известен график функции $y = f(x)$, то с помощью некоторых преобразований можно построить графики более сложных функций.

1. График функции $f(x \pm a)$ получается путем параллельного переноса графика $f(x)$ вдоль оси Ox на $\pm a$. Значение функции $f(x - a)$ при $x = x_0 + a$ совпадает со значением $f(x)$ при $x = x_0$ (рис. 15).

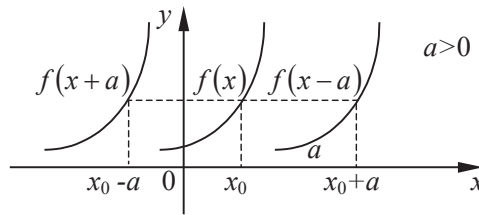


Рис. 15. График функции $f(x \pm a)$

2. График функции $f(x) \pm a$ достигается путем параллельного переноса графика функции $f(x)$ вдоль оси Oy на $\pm a$ (рис. 16).

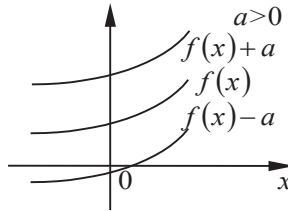
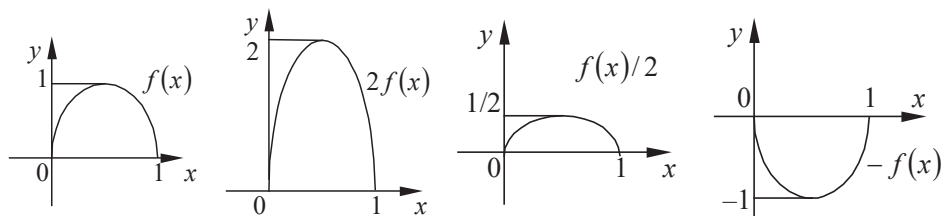
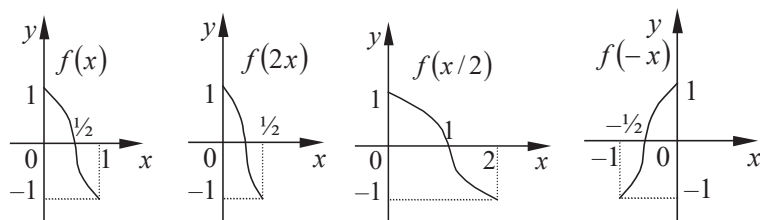


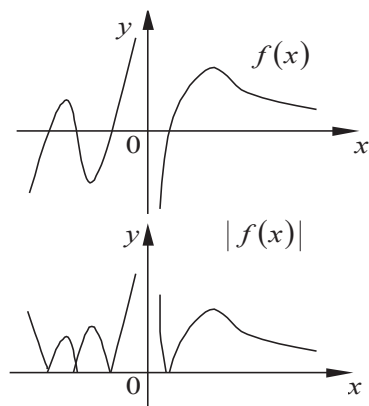
Рис. 16. График функции $f(x) \pm a$

3. График функции $k \cdot f(x)$ получается путем растяжения графика $f(x)$ вдоль оси Oy в k ($k > 0$) раз при $k > 1$ и путем сжатия вдоль этой оси в $1/k$ раз при $0 < k < 1$; если $k < 0$, то к этому преобразованию добавляется зеркальное отражение относительно оси Ox (рис. 17).

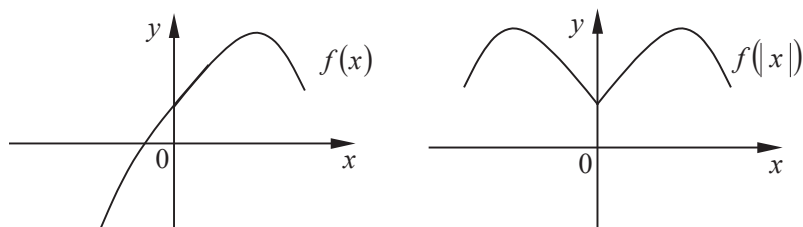
4. График функции $f(kx)$ получается путем сжатия графика $f(x)$ вдоль оси Ox в k ($k > 0$) раз при $k > 1$ и путем растяжения вдоль этой же оси в k раз при $0 < k < 1$; если $k < 0$, то это преобразование дополняется зеркальным отражением относительно оси Oy (рис. 18).

Рис. 17. Графики функции $k \cdot f(x)$ Рис. 18. Графики функции $f(kx)$

5. График функции $|f(x)|$ получается из графика функции $f(x)$ с помощью следующего преобразования: часть графика, лежащая выше оси Ox , остается на месте; часть графика, лежащая ниже оси Ox , зеркально отражается относительно оси Ox (рис. 19).

Рис. 19. Графики функции $|f(x)|$

6. График функции $f(|x|)$ получается из графика $f(x)$ с помощью следующего преобразования: при $x \geq 0$ график не изменяется; при $x < 0$ график заменяется на зеркальное отражение относительно оси Oy части графика, соответствующей $x \geq 0$, (рис. 20).

Рис. 20. Графики функции $f(|x|)$

3. РАЦИОНАЛЬНЫЕ УРАВНЕНИЯ

3.1. Линейные уравнения

• **Определение.** Уравнение вида $ax + b = 0$, где a и b — числа, причем $a \neq 0$, называется *линейным*.

$$ax + b = 0 \Leftrightarrow \begin{cases} x = -\frac{b}{a}, & \text{если } a \neq 0; \\ x \in \emptyset, & \text{если } a = 0, b \neq 0; \\ x \in R, & \text{если } a = 0, b = 0. \end{cases}$$

Графическая иллюстрация решения линейных уравнений. Единственное решение положительно, если числа a и b с разными знаками; отрицательно, если a и b с одним знаком; равно нулю, если $b = 0$. Если $a = 0$, уравнение не имеет решений. Если $a = 0, b = 0$, уравнение имеет бесконечное множество решений (рис. 21).

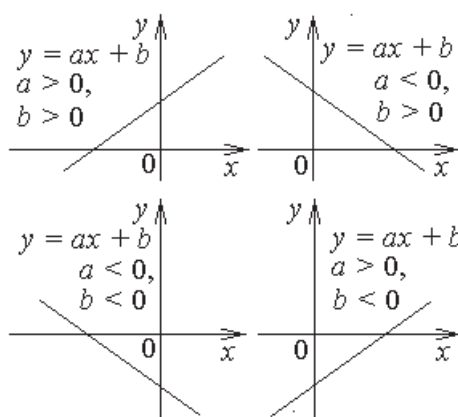


Рис. 21. Графики линейной функции

3.2. Квадратные уравнения

Квадратным уравнением называют уравнение вида $ax^2 + bx + c = 0$, где x — переменная; a, b, c — действительные числа, называемые *коэффициентами уравнения*, причем старший коэффициент $a \neq 0$. Коэффициент c называют *свободным членом* квадратного уравнения.

Выражение $b^2 - 4ac$ называют *дискриминантом* квадратного уравнения и обозначают через D , $D = b^2 - 4ac$.

Вид решений квадратного уравнения:

$$1) \ D > 0: x_{1,2} = \frac{-b \pm \sqrt{D}}{2a};$$

$$2) \ D = 0: x_1 = x_2 = -\frac{b}{2a};$$

$$3) \ D < 0: x \in \emptyset.$$

$$\text{Если } b = 2k, \text{ то } x_{1,2} = \frac{-k \pm \sqrt{k^2 - ac}}{a}.$$

Если $a = 1$, то уравнение обычно записывают в виде $x^2 + px + q = 0$ и

$$x_{1,2} = -\frac{p}{2} \pm \sqrt{\left(\frac{p}{2}\right)^2 - q}.$$

■ **Теорема о разложении квадратного трехчлена на линейные множители.** Если у квадратного уравнения $ax^2 + bx + c = 0$ есть действительные корни x_1 и x_2 , то квадратный трехчлен представим в виде

$$ax^2 + bx + c = a(x - x_1)(x - x_2).$$

■ **Теорема о корнях квадратного уравнения (теорема Виета).** Сумма корней квадратного уравнения $ax^2 + bx + c = 0$ ($a \neq 0$) равна $-\frac{b}{a}$, а произведение корней равно $\frac{c}{a}$.

$$\begin{cases} x_1 + x_2 = -\frac{b}{a}, \\ x_1 x_2 = \frac{c}{a}. \end{cases}$$

Уравнение $ax^4 + bx^2 + c = 0$ называется *биквадратным*.

$$ax^4 + bx^2 + c = 0 \Leftrightarrow \begin{cases} x_{1,2} = \pm \sqrt{\frac{-b + \sqrt{b^2 - 4ac}}{2a}}, \\ x_{3,4} = \pm \sqrt{\frac{-b - \sqrt{b^2 - 4ac}}{2a}}. \end{cases}$$

$$x_1 + x_2 + x_3 + x_4 = -\frac{b}{a}; \quad x_1 x_2 x_3 x_4 = \frac{c}{a}.$$

3.3. Теория многочленов

• **Определение.** Многочленом $P_n(x)$ от одной переменной называется выражение $P_n(x) = a_n x^n + a_{n-1} x^{n-1} + \dots + a_0$, где $n \in \mathbb{N}$, $a_n, a_{n-1}, \dots, a_0$ — действительные числа, причем $a_n \neq 0$.

Число n называется *степенью многочлена*, числа $a_n, a_{n-1}, \dots, a_0$ — *коэффициентами* многочлена, $a_n x^n$ — *старший член*, a_0 — *свободный член*. При $a_n = 1$ многочлен является *приведенным*.

Многочлены равны, если равны коэффициенты при одинаковых степенях x . Многочлены можно складывать, вычитать, умножать друг на друга, возводить в натуральную степень — в результате получается также многочлен.

Если многочлен $P_n(x)$ можно представить в виде произведения $P_n(x) = Q_m(x) \cdot S(x)$, где $m < n$, то говорят, что многочлен $P_n(x)$ *делится* на многочлен $Q_m(x)$; $P_n(x)$ называется *делимым*, $Q_m(x)$ — *делителем*, $S(x)$ — *частным*.

♦ **Пример.**

$3x^4 + 2x^3 + 70x^2 + 3x - 4$ — делимое $\left| \begin{array}{l} x^2 + 5x + 1 \end{array} \right.$ — делитель

$3x^4 + 15x^3 + 3x^2 \left| \begin{array}{l} 3x^2 - 13x + 132 \end{array} \right.$ — частное

$-13x^3 + 67x^2 + 3x$ — первая разность

$-13x^3 - 65x^2 - 13x$

$132x^2 + 16x - 4$ — вторая разность

$132x^2 + 660x + 132$

$-644x - 136$ — остаток

В результате деления неправильная дробь (степень многочлена в числителе не меньше степени многочлена в знаменателе) представляется в виде целой части $(3x^2 - 13x + 132)$ и правильной дроби, у которой степень многочлена в числителе меньше степени многочлена в знаменателе:

$$\frac{3x^4 + 2x^3 + 70x^2 + 3x - 4}{x^2 + 5x + 1} = 3x^2 - 13x + 132 - \frac{644x + 136}{x^2 + 5x + 1}.$$

• **Определение.** Если при некотором значении $x = x_0$ многочлен $P(x)$ обращается в нуль, т. е. $P(x_0) = 0$, то число x_0 называется *корнем* многочлена.

■ **Теорема (Теорема Безу).** Пусть $P_n(x)$ — многочлен степени n , b — произвольное число. Тогда есть такой многочлен $Q_{n-1}(x)$ степени $n-1$, что $P_n(x) = (x-b)Q_{n-1}(x) + P_n(b)$, где $P_n(b)$ — значение многочлена $P_n(x)$ при $x = b$.

Следствие 1. Если $x = b$ — корень многочлена $P_n(x)$, т. е. $P_n(b) = 0$, то $P_n(x) = (x-b)Q_{n-1}(x)$.

Следствие 2. Если многочлен $P_n(x)$ степени n имеет n корней $x_1, x_2, \dots, x_n$, то $P_n(x) = a_n(x-x_1)(x-x_2) \cdot \dots \cdot (x-x_n)$, где a_n — старший коэффициент многочлена $P_n(x)$.

• **Определение.** Преобразование многочлена в произведение нескольких сомножителей — многочленов или одночленов называется *разложением многочлена* на множители.

Вывод из следствия 2. Нахождение корней многочлена равносильно нахождению его линейных множителей.

■ **Теорема.** Пусть дан многочлен $P_n(x) = a_n x^n + a_{n-1} x^{n-1} + \dots + a_1 x + a_0$ с целочисленными коэффициентами, $a_n \neq 0$. Если *целое* число $x = x_0$ является корнем многочлена $P_n(x)$, то оно служит делителем свободного члена a_0 .

♦ **Пример.** Разложите на множители многочлен

$$P_3(x) = x^3 - 3x^2 - 10x + 24.$$

Найдем *целочисленный* корень этого многочлена. Для этого выпишем делители свободного члена: $\pm 1, \pm 2, \pm 3, \pm 4, \pm 6, \pm 8, \pm 12, \pm 24$. Подставим их поочередно в $P_3(x)$.

$P(1)=12$, $x=1$ не является корнем многочлена; $P(-1)=30$, $x=-1$ также не является корнем; $P(2)=0$, $x=2$ — корень данного многочлена.

Разделим многочлен на разность $(x-2)$:

$$\begin{array}{r|l}
 x^3 - 3x^2 - 10x + 24 & x - 2 \\
 - x^3 + 2x^2 & \hline
 \hline
 -x^2 - 10x & \\
 -x^2 + 2x & \\
 \hline
 -12x + 24 & \\
 -12x + 24 & \\
 \hline
 0 &
 \end{array}$$

Корнями многочлена $x^2 - x - 12$ являются числа -3 и 4 . В итоге получим

$$x^3 - 3x^2 - 10x + 24 = (x-2)(x+3)(x-4).$$

3.4. Кубические уравнения

♦ Примеры.

1. Решите уравнение $x^3 - x^2 - 4x + 4 = 0$.

$$x^3 - x^2 - 4x + 4 = 0 \Leftrightarrow x(x^2 - 4) - (x^2 - 4) = 0 \Leftrightarrow (x^2 - 4)(x - 1) = 0 \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \begin{cases} x_1 = 2, \\ x_2 = -2, \\ x_3 = 1. \end{cases}$$

2. Решите уравнение $x^3 - 3x^2 - 6x + 8 = 0$.

Найдем один корень данного уравнения подбором среди делителей его свободного члена: $1, -2, 2, -4, 4, -8, 8$.

Найдем значение многочлена $P_3(1)=1-3-6+8=0$, значит, $P_3(x)$ имеет корень $x_1=1$.

Поделим многочлен $P_3(x)$ на $(x-1)$:

$$\begin{array}{r}
 -x^3 - 3x^2 - 6x + 8 \mid x - 1 \\
 \underline{x^3 - x^2} \mid x^2 - 2x - 8 \\
 -2x^2 - 6x \\
 \underline{-2x^2 + 2x} \\
 -8x + 8 \\
 \underline{-8x + 8} \\
 0
 \end{array}$$

Получим $x^3 - 3x^2 - 6x + 8 = (x - 1)(x^2 - 2x - 8)$. Исходное уравнение можно записать в виде $(x - 1)(x^2 - 2x - 8) = 0$. Найдём корни квадратного трёхчлена:

$$x_{2,3} = \frac{2 \pm \sqrt{4 + 32}}{2} = \frac{2 \pm 6}{2} \Rightarrow x_2 = 4; \quad x_3 = -2.$$

Итак, исходное уравнение имеет три различных корня: $x_1 = 1$; $x_2 = 4$; $x_3 = -2$, в чём можно убедиться, вычисляя $P_3(x)$ во всех точках возможного значения корней.

Разложение $P_3(x)$ на линейные множители имеет вид $x^3 - 3x^2 - 6x + 8 = (x - 1)(x + 2)(x - 4)$, где числа 1, -2, 4 — корни $P_3(x)$.

3.5. Дробно-рациональные уравнения

• **Определение.** Дробно-рациональным называется уравнение вида $\frac{P_n(x)}{Q_m(x)} = 0$, где $P_n(x)$ и $Q_m(x)$ — многочлены, $Q_m(x) \neq 0$.

Решение уравнения сводится к решению уравнения $P_n(x) = 0$ и проверке того, что его корни удовлетворяют условию $Q_m(x) \neq 0$, т. е.

$$\frac{P_n(x)}{Q_m(x)} = 0 \Leftrightarrow \begin{cases} P_n(x) = 0, \\ Q_m(x) \neq 0. \end{cases}$$

♦ **Пример.** Решите уравнение $\frac{1}{x+1} + \frac{2}{x-2} = 1$.

Имеем

$$\begin{aligned}\frac{1}{x+1} + \frac{2}{x-2} - 1 = 0 &\Leftrightarrow \frac{(x-2) + 2(x+1) - (x+1)(x-2)}{(x+1)(x-2)} = 0 \Leftrightarrow \\ &\Leftrightarrow \frac{x^2 - 4x - 2}{(x+1)(x-2)} = 0 \Leftrightarrow \begin{cases} x^2 - 4x - 2 = 0, \\ (x+1)(x-2) \neq 0. \end{cases}\end{aligned}$$

Корнями уравнения $x^2 - 4x - 2 = 0$ являются числа $2 + \sqrt{6}$ и $2 - \sqrt{6}$, которые не являются корнями уравнения $(x+1)(x-2) = 0$.

Таким образом, уравнение имеет два корня: $x_1 = 2 + \sqrt{6}$ и $x_2 = 2 - \sqrt{6}$.

4. РАЦИОНАЛЬНЫЕ НЕРАВЕНСТВА

• **Определение.** Неравенства вида $P(x) > 0$ ($P(x) < 0$), где $P(x)$ — многочлен, называются *рациональными*.

• **Определение.** Неравенства вида $a_0x + a_1 > 0$, $a_0x + a_1 < 0$, $a_0 \neq 0$, называются *линейными неравенствами*.

Множество решений неравенства $a_0x + a_1 > 0$ определяется знаком числа a_0 :

а) если $a_0 > 0$, то решениями являются все $x \in \left(-\frac{a_1}{a_0}, +\infty\right)$;

б) если $a_0 < 0$, то решениями являются все $x \in \left(-\infty, -\frac{a_1}{a_0}\right)$.

Аналогично этому определяется множество решений неравенства $a_0x + a_1 < 0$:

а) $a_0 > 0 \Rightarrow x \in \left(-\infty, -\frac{a_1}{a_0}\right)$;

б) $a_0 < 0 \Rightarrow x \in \left(-\frac{a_1}{a_0}, +\infty\right)$, —

в частности, двучлен $x - a > 0$ для $x > a$ и $x - a < 0$ для $x < a$ (рис. 22).

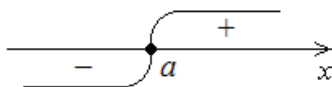
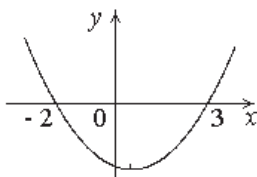


Рис. 22. Интервалы знакопостоянства двучлена

4.1. Решение квадратных неравенств

♦ **Пример.** Решить неравенство $x^2 - x - 6 < 0$.

Поскольку квадратный трехчлен $P(x) = x^2 - x - 6$ имеет корни $x_1 = 3$ и $x_2 = -2$, то $P(x) = (x - 3)(x + 2)$. Потому данное неравенство равносильно неравенству $(x - 3)(x + 2) < 0$ (рис. 23).

Рис. 23. График функции $y = x^2 - x - 6$

Применяя метод интервалов, получим множество решений неравенства в виде $x \in (-2, 3)$ (рис. 24).

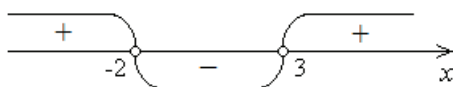


Рис. 24. Интервалы знакопостоянства трехчлена

4.2. Дробно-рациональные неравенства

- **Определение.** Неравенства вида $\frac{P(x)}{Q(x)} > 0$, $\frac{P(x)}{Q(x)} < 0$, $\frac{P(x)}{Q(x)} \geq 0$,

$\frac{P(x)}{Q(x)} \leq 0$, где $P(x)$ и $Q(x)$ — многочлены, $Q(x) \neq 0$, называются *дробно-рациональными*.

При решении таких неравенств пользуются следующими утверждениями:

$$\frac{P(x)}{Q(x)} > 0 \Leftrightarrow P(x)Q(x) > 0;$$

$$\frac{P(x)}{Q(x)} < 0 \Leftrightarrow P(x)Q(x) < 0;$$

$$\frac{P(x)}{Q(x)} \geq 0 \Leftrightarrow \begin{cases} P(x)Q(x) \geq 0, \\ Q(x) \neq 0; \end{cases}$$

$$\frac{P(x)}{Q(x)} \leq 0 \Leftrightarrow \begin{cases} P(x)Q(x) \leq 0, \\ Q(x) \neq 0. \end{cases}$$

К простейшим дробно-рациональным неравенствам относятся дробно-линейные неравенства вида $\frac{ax+b}{cx+d} > 0$.

♦ **Пример.** Решите неравенство $\frac{x}{x-5} > \frac{1}{2}$.

Поскольку $\frac{x}{x-5} - \frac{1}{2} - \frac{x+5}{2(x-5)} \Leftrightarrow \frac{x+5}{x-5} > 0 \Leftrightarrow (x+5)(x-5) > 0$, ре-

шением этого неравенства, а следовательно, и исходного являются $x \in (-\infty, -5) \cup (5, +\infty)$.

4.3. Системы рациональных уравнений

Пусть задана система уравнений

$$\begin{cases} f_1(x, y) = 0, \\ f_2(x, y) = 0. \end{cases} \quad (6)$$

Решением системы (6) называют пару чисел (x_0, y_0) , подстановка которых в каждое уравнение системы обращает их в верные числовые равенства.

Решить систему уравнений — найти все ее решения или доказать, что их не существует.

Система

$$\begin{cases} g_1(x, y) = 0, \\ g_2(x, y) = 0 \end{cases} \quad (7)$$

равносильна исходной системе (6), если множества всех решений систем (6) и (7) совпадают или они обе решений не имеют.

Укажем некоторые преобразования систем, в результате которых получаются системы равносильные исходной.

1. Если в исходной системе переставить местами уравнения, то получится система равносильная ей.

2. Любое уравнение системы можно заменить равносильным ему уравнением.

3. Пусть a_1 и a_2 — некоторые действительные числа и $a_1 \neq 0$; тогда система (6) равносильна системе $\begin{cases} a_1 f_1 + a_2 f_2 = 0, \\ f_2 = 0. \end{cases}$

В частности, системы уравнений $\begin{cases} f_1 = 0, \\ f_2 = 0; \end{cases} \begin{cases} f_1 + f_2 = 0, \\ f_2 = 0; \end{cases} \begin{cases} f_1 = 0, \\ f_1 + f_2 = 0; \end{cases}$
 $\begin{cases} f_1 - f_2 = 0, \\ f_2 = 0; \end{cases} \begin{cases} f_1 = 0, \\ f_1 - f_2 = 0; \end{cases} \begin{cases} f_1 + f_2 = 0, \\ f_2 - f_2 = 0 \end{cases}$ равносильны.

4. Значение неизвестного, найденное из некоторого уравнения системы, можно подставить в любое другое уравнение той же системы.

5. К системе можно добавить уравнение, являющееся следствием данной системы.

6. Если система содержит уравнение $f g = 0$, где функции f и g определены на одном и том же множестве, то она равносильна совокупности двух систем, в одной из которых уравнение $f g = 0$ заменено уравнением $f = 0$, а в другой — уравнением $g = 0$.

♦ Примеры.

1. Решите системы уравнений:

$$1) \begin{cases} 2x + 3y = 2, \\ 5x - 6y = 5. \end{cases}$$

Используем метод *исключения неизвестных*. Для исключения x , первое уравнение умножаем на 5, а второе — на 2 и вычитаем его из первого, получаем $(15 + 12)y = 10 - 10$; $27y = 0$; $y = 0$.

Для исключения y умножаем на 2 первое уравнение и складываем со вторым, получаем $9x = 9$; $x = 1$.

Пара $(1, 0)$ — единственное решение системы.

Графики уравнений системы — прямые пересекающиеся в точке $(1, 0)$.

$$2) \begin{cases} x - 3y = 3, \\ 2x - 6y = 6. \end{cases}$$

Используем *метод подстановки*. Из первого уравнения выражаем x через y

$$x = 3y + 3 \quad (*)$$

и подставляем во второе уравнение вместо x правую часть этого равенства. Получаем $6y + 6 - 6y = 6$; $0y = 0$.

Последнее равенство верно при любом y . Взяв любое число y и определив x из уравнения (*), получим решение системы в виде $(3t+3, t)$, $t \in R$. Таких решений бесконечно много.

Второе уравнение системы получено умножением на 2 первого уравнения, эти уравнения равносильны, и система равносильна одному из этих уравнений.

График каждого из уравнений — прямая $y = \frac{1}{3}x - 1$. Координаты каждой ее точки — решение данной системы.

$$3) \begin{cases} x - 3y = 3, \\ 2x - 6y = -6. \end{cases}$$

Из первого уравнения выражаем $x = 3y + 3$ и подставляем во второе: $6y + 6 - 6y = -6$; $0y = -12$.

Последнее равенство неверно при любом y , значит, система решений не имеет.

Графики решений — две параллельные прямые $y = \frac{1}{3}x - 1$ и $y = \frac{1}{3}x + 1$.

Они не имеют общих точек, поэтому система не имеет решений: $(x, y) \in \emptyset$.

$$2. \text{ Решите систему уравнений } \begin{cases} x + y + z = 1, \\ 2x + 2y + z = 1, \\ x + 3y + 2z = 3. \end{cases}$$

Стоит отметить, что ни одно из уравнений системы не является следствием других. Умножим первое уравнение на -2 и сложим со вторым, получим $-z = -1 \Rightarrow z = 1$.

Умножим первое уравнение на -1 и сложим с третьим, получим $2y + z = 2 \Rightarrow y = 0,5$. При этом из первого уравнения $x = -0,5$.

Ответ: $(-0,5; 0,5; 1)$.

5. ИРРАЦИОНАЛЬНЫЕ УРАВНЕНИЯ

• **Определение.** *Иррациональными* называются уравнения, содержащие неизвестное под знаком корня (радикала).

Равносильные преобразования иррациональных уравнений. Равносильные преобразования простейших иррациональных уравнений (с одним радикалом):

$$\sqrt[n]{f(x)} = a \Leftrightarrow \begin{cases} 1) a < 0 & x \in \emptyset, \\ 2) \begin{cases} f(x) = a^{2n}, \\ a \geq 0; \end{cases} \end{cases}$$

$$\sqrt[n]{f(x)} = g(x) \Leftrightarrow \begin{cases} f(x) = (g(x))^{2n}, \\ g(x) \geq 0; \end{cases}$$

$$\sqrt[2n+1]{f(x)} = g(x) \Leftrightarrow f(x) = (g(x))^{2n+1}; \quad n \in N.$$

Простейшие уравнения, содержащие два радикала.

1. $\sqrt{f(x)} + \sqrt{g(x)} = \varphi(x).$

♦ **Пример.** Решите уравнение $\sqrt{x^2 + 3x - 4} = \sqrt{2x + 2}.$

$$\begin{cases} x^2 + 3x - 4 \geq 0, \\ 2x + 2 \geq 0, \\ x^2 + 3x - 4 = 2x + 2 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} (x-1)(x+4) \geq 0, \\ x+1 \geq 0, \\ (x+3)(x-2) = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x_1 = 2, \\ x_2 = -3, \\ x \geq 1. \end{cases} \Rightarrow x = 2.$$

2. Уравнения вида $\sqrt[3]{f(x)} + \sqrt[3]{g(x)} = \varphi(x)$ подвергаются преобразованиям для избавления от иррациональностей. Возведем обе части уравнения в куб, используя формулу для куба суммы $(a+b)^3 = a^3 + b^3 + 3ab(a+b)$:

$$f(x) + g(x) + 3\sqrt[3]{f(x)g(x)}(\sqrt[3]{f(x)} + \sqrt[3]{g(x)}) = \varphi^3(x).$$

Замечая, что $\sqrt[3]{f(x)} + \sqrt[3]{g(x)} = \varphi(x)$, получаем следствие исходного уравнения $f(x) + g(x) + 3\sqrt[3]{f(x)g(x)} \cdot \varphi(x) = \varphi^3(x)$.

После уединения радикала и возведения полученного уравнения в куб находим его корни и путем непосредственной подстановки отбираем удовлетворяющие исходному уравнению.

♦ **Пример.** Решите уравнение $\sqrt[3]{3x+24} + \sqrt[3]{6x+21} + 3 = 0$.

$$\sqrt[3]{3x+24} + \sqrt[3]{6x+21} + 3 = 0 \Leftrightarrow \sqrt[3]{3x+24} + \sqrt[3]{6x+21} = -3.$$

Возведем обе части уравнения в куб:

$$3x+24+6x+21+3\sqrt{(3x+24)(6x+21)}(\sqrt[3]{3x+24} + \sqrt[3]{6x+21}) = -27;$$

$$\sqrt[3]{(3x+24)(6x+21)} = x+8.$$

Замена суммы или разности кубических корней на предписанное исходным уравнением значение приводит к уравнению-следствию, поэтому в заключение нужно сделать проверку. Возведем уравнение-следствие в куб:

$$3(x+8)(6x+21) - (x+8)^3 = 0; (x+8)(x^2 - 2x + 1) = 0;$$

$$(x+8)(x-1)^2 = 0 \Rightarrow x_1 = -8; x_2 = 1.$$

Подставляя эти значения в исходное уравнение, убеждаемся, что значение $x=1$ — посторонний корень.

Ответ: $x = -8$.

3. $\frac{f(x)}{\sqrt{a(x)}} = g(x).$

♦ **Пример.** Решите уравнение $\sqrt{x} - \frac{4}{\sqrt{2+x}} + \sqrt{2+x} = 0$.

Умножим на $\sqrt{2+x}$, тогда

$$\begin{aligned} \begin{cases} x \geq 0, \\ 2+x > 0, \\ \sqrt{x}\sqrt{2+x} - 4(2+x) = 0 \end{cases} &\Rightarrow \begin{cases} x \geq 0, \\ \sqrt{x}\sqrt{2+x} = 2-x \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x \geq 0, \\ x(2+x) = (2-x)^2, \\ 2-x \geq 0 \end{cases} \Rightarrow \\ &\Rightarrow \begin{cases} x \geq 0, \\ x = 2/3, \\ x \leq 2 \end{cases} \Rightarrow x = \frac{2}{3}. \end{aligned}$$

6. ИРРАЦИОНАЛЬНЫЕ НЕРАВЕНСТВА

• **Определение.** *Иррациональными* называются *неравенства*, содержащие неизвестное под знаком радикала.

Равносильные преобразования иррациональных неравенств:

$$\sqrt{f(x)} < g(x) \Leftrightarrow \begin{cases} f(x) \geq 0, \\ g(x) > 0, \\ f(x) < (g(x))^2; \end{cases}$$

$$\sqrt{f(x)} \leq g(x) \Leftrightarrow \begin{cases} f(x) \geq 0, \\ g(x) \geq 0, \\ f(x) \leq (g(x))^2; \end{cases}$$

$$\sqrt{f(x)} > g(x) \Leftrightarrow \begin{cases} g(x) \geq 0, \\ f(x) > (g(x))^2, \\ f(x) \geq 0, \\ g(x) < 0; \end{cases}$$

$$\sqrt{f(x)} \geq g(x) \Leftrightarrow \begin{cases} g(x) \geq 0, \\ f(x) \geq (g(x))^2, \\ g(x) < 0, \\ f(x) \geq 0; \end{cases}$$

$$\sqrt[n]{f(x)} < \sqrt[n]{g(x)}, \quad n \in N \Leftrightarrow \begin{cases} f(x) \geq 0, \\ g(x) > f(x); \end{cases}$$

$$\sqrt[2n+1]{f(x)} < \sqrt[2n+1]{g(x)}, \quad n \in N \Leftrightarrow f(x) < g(x);$$

$$\sqrt[2n]{f(x)} < g(x), \quad n \in N \Leftrightarrow \begin{cases} f(x) \geq 0, \\ g(x) > 0, \\ f(x) < (g(x))^{2n}; \end{cases}$$

$$\sqrt[2n+1]{f(x)} < g(x), \quad n \in N \Leftrightarrow f(x) < (g(x))^{2n+1};$$

$$\sqrt[2n]{f(x)} > g(x), \quad n \in N \begin{cases} \left[\begin{aligned} &g(x) \geq 0, \\ &f(x) > g^{2n}(x) \end{aligned} \right. \\ \left. \begin{aligned} &g(x) < 0, \\ &f(x) \geq 0; \end{aligned} \right]$$

$$\sqrt[2n+1]{f(x)} > g(x), \quad n \in N \Leftrightarrow f(x) > (g(x))^{2n+1}.$$

♦ **Пример.** Решите неравенство $\sqrt{x+5} < 1-x$.

Это неравенство равносильно системе
$$\begin{cases} x+5 \geq 0, \\ 1-x > 0, \\ x+5 < (1-x)^2. \end{cases}$$

Из первых двух неравенств этой системы найдем $-5 \leq x < 1$. Решая квадратное неравенство $x+5 < (1-x)^2 \Leftrightarrow x^2 - 3x - 4 > 0$, получим $x < -1$, $x > 4$. Таким образом, решениями исходного неравенства являются все $x \in [-5, -1)$.

7. УРАВНЕНИЯ, СОДЕРЖАЩИЕ ЗНАК АБСОЛЮТНОЙ ВЕЛИЧИНЫ

Для решения уравнения с модулем следует разбить ОДЗ на множества, на каждом из которых выражения стоящие под знаком модуля сохраняют знак. Это позволит записать на каждом из множеств уравнение без знака модуля и решить его. Объединение из множеств решений даст решение исходного уравнения.

Иногда удастся путем замены переменной свести уравнение с модулем к рациональному уравнению.

1. Уравнение вида $f(|x|) = g(x)$ равносильно совокупности двух систем:

$$f(|x|) = g(x) \Leftrightarrow \begin{cases} \begin{cases} f(x) = g(x), \\ x \geq 0, \end{cases} \\ \begin{cases} f(-x) = g(x), \\ x < 0. \end{cases} \end{cases}$$

♦ **Пример.** Решите уравнение $x^2 + 2|x| - 8 = 0$.

Введем вспомогательную переменную $t = |x|$; очевидно, что $t \geq 0$. Уравнение примет вид $t^2 + 2t - 8 = 0$ ($t \geq 0$). Корни этого уравнения: $t_1 = 2$, $t_2 = -4$; корень $t_2 = -4$ является посторонним. Следовательно, $t = 2 \Leftrightarrow |x| = 2 \Leftrightarrow x = \pm 2$.

Проверка необязательна, т. к. преобразования равносильны.

Ответ: $x = \pm 2$.

2. Уравнение вида $|f(x)| = g(x) \Leftrightarrow \begin{cases} g(x) \geq 0, \\ \begin{cases} f(x) = g(x), \\ f(x) = -g(x). \end{cases} \end{cases}$

♦ **Пример.** Решите уравнение $|x^2 - x - 15| = 1 - x$.

$$|x^2 - x - 15| = 1 - x \Leftrightarrow \begin{cases} 1 - x \geq 0, \\ \begin{cases} x^2 - x - 15 = 1 - x, \\ x^2 - x - 15 = x - 1, \end{cases} \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x \leq 1, \\ \begin{cases} x = 4, \\ x = -4, \\ x = 1 + \sqrt{15}, \\ x = 1 - \sqrt{15}. \end{cases} \end{cases}$$

Условию $x \leq 1$ удовлетворяют $x = -4$ и $x = 1 - \sqrt{15}$.

Ответ: $\{-4; 1 - \sqrt{15}\}$.

3. Уравнение вида $|f(x)| = |g(x)| \Leftrightarrow \begin{cases} f(x) = g(x), \\ f(x) = -g(x). \end{cases}$

♦ **Примеры.**

1. Решите уравнение $\frac{1-2x}{3-|x-1|} = 1$.

Данное уравнение равносильно совокупности двух систем:

$$\begin{cases} x-1 \geq 0, \\ \frac{1-2x}{3-(x-1)} = 1 \end{cases} \text{ и } \begin{cases} x-1 < 0, \\ \frac{1-2x}{3+(x-1)} = 1. \end{cases}$$

Решая уравнение $\frac{1-2x}{4-x} = 1$, находим его корень $x = -3$. Он не удовлетворяет условию $x - 1 \geq 0$, поэтому первая система решений не имеет.

Решением уравнения $\frac{1-2x}{2+x} = 1$ является значение $x = -\frac{1}{3}$. Оно удовлетворяет условию $x - 1 < 0$, является решением второй системы и единственным решением исходного уравнения.

Ответ: $x = -1/3$.

2. Решите уравнение $|x-1| = |x|$.

$$\begin{cases} x-1 = x, \\ x-1 = -x, \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x \in \emptyset, \\ 2x = 1, \end{cases} \Rightarrow x = \frac{1}{2}.$$

8. НЕРАВЕНСТВА, СОДЕРЖАЩИЕ ЗНАК АБСОЛЮТНОЙ ВЕЛИЧИНЫ

Равносильные преобразования неравенств с модулем:

$$|x| > 0 \Leftrightarrow x \neq 0;$$

$$|f(x)| < g(x) \Leftrightarrow -g(x) < f(x) < g(x) \Leftrightarrow \begin{cases} f(x) < g(x), \\ f(x) > -g(x); \end{cases}$$

$$|f(x)| > g(x) \Leftrightarrow \begin{cases} f(x) > g(x), \\ f(x) < -g(x); \end{cases}$$

$$|f(x)| > |g(x)| \Leftrightarrow f^2(x) > g^2(x) \Leftrightarrow (f(x) - g(x))(f(x) + g(x)) > 0.$$

♦ **Пример.** Решите неравенство $|5 - x| < |x - 2| + |7 - 2x|$.

Выражения под знаком модуля обращаются в нуль при $x_1 = 5$, $x_2 = 2$ и $x_3 = 7/2$. Для определения знаков подмодульных выражений решим неравенства $5 - x \geq 0 \Rightarrow x \leq 5$; $x - 2 \geq 0 \Rightarrow x \geq 2$; $7 - 2x \geq 0 \Rightarrow x \leq \frac{7}{2}$. Составим схему (рис. 25).

	I	II	III	IV	
$5 - x$	+	+	+	-	$\rightarrow$
$x - 2$	-	+	+	+	$\rightarrow$
$7 - 2x$	+	+	-	-	$\rightarrow$
					$\rightarrow$
	2	3,5	5		x

Рис. 25. Схема определения знаков подмодульных выражений

Решим неравенство, раскрывая модуль на каждом из полученных интервалов.

$$\text{I. } \begin{cases} x \leq 2, \\ 5 - x < 2 - x + 7 - 2x \end{cases} \Rightarrow x < 2;$$

$$\text{II. } \begin{cases} 2 < x \leq 3,5, \\ 5 - x < x - 2 + 7 - 2x \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} 2 < x \leq 3,5, \\ 5 - x < 5 - x \end{cases} \Rightarrow x \in \emptyset;$$

$$\text{III. } \begin{cases} 3,5 < x \leq 5, \\ 5 - x < x - 2 - 7 + 2x \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} 3,5 < x \leq 5, \\ x > 3,5 \end{cases} \Rightarrow 3,5 < x \leq 5;$$

$$\text{IV. } \begin{cases} x > 5, \\ x - 5 < x - 2 + 2x - 7 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x > 5, \\ x > 2 \end{cases} \Rightarrow x > 5.$$

Ответ: $x \in (-\infty; 2) \cup (3,5; +\infty)$.

9. ПОКАЗАТЕЛЬНЫЕ УРАВНЕНИЯ

• **Определение.** Показательными называются уравнения вида $a^{f(x)} = a^{g(x)}$, где $a > 0$, $a \neq 1$.

Уравнение $a^x = b$, где $a > 0$, $a \neq 1$, $b > 0$, следует решать так:

$$a^x = b \Leftrightarrow a^x = a^{\log_a b} \Rightarrow x = \log_a b.$$

Приведем равносильные преобразования показательных уравнений.

$$\begin{aligned} a^{f(x)} = b &\Leftrightarrow \begin{cases} a > 0, a \neq 1, b > 0, \\ f(x) = \log_a b; \\ a = 1, b \neq 1, x \in \emptyset; \\ \begin{cases} a = 1, b = 1, \\ x \in \text{ОДЗ } f(x); \end{cases} \\ b \leq 0, x \in \emptyset; \end{cases} \\ a^{f(x)} = b^{g(x)} &\Leftrightarrow \begin{cases} a > 0, a \neq 1, \\ b > 0, b \neq 1, \\ f(x) = g(x) \log_a b; \end{cases} \\ a^{f(x)} = a^{g(x)} &\Leftrightarrow \begin{cases} a > 0, a \neq 1, \\ f(x) = g(x). \end{cases} \end{aligned}$$

♦ **Примеры.**

1. Решите уравнение $4^x = 8^{2x-3}$.

Поскольку $4^x = (2^2)^x = 2^{2x}$, $8^{2x-3} = (2^3)^{2x-3} = 2^{6x-9}$, постольку

$$2^{2x} = 2^{6x-9} \Leftrightarrow 2x = 6x - 9 \Rightarrow x = \frac{9}{4}.$$

2. Решите уравнение $\frac{(0,2)^{x-0,5}}{\sqrt{5}} = 5 \cdot 0,04^{x-1}$.

$$\left(\frac{1}{5}\right)^{x-0,5} \cdot \left(\frac{1}{5}\right)^{0,5} = \left(\frac{1}{5}\right)^{-1} \cdot \left(\left(\frac{1}{5}\right)^2\right)^{x-1} \Leftrightarrow \left(\frac{1}{5}\right)^x = \left(\frac{1}{5}\right)^{2x-3} \Leftrightarrow x = 2x - 3 \Rightarrow x = 3.$$

3. Решите уравнение $4^x + 2^{x+1} - 24 = 0$.

Приведем его к виду $(2^x)^2 + 2 \cdot 2^x - 24 = 0$. Пусть $t = 2^x$, $t > 0$, тогда $t^2 + 2t - 24 = 0$. Отсюда находим $t_1 = 4$, $t_2 = -6$. Таким образом, данное уравнение равносильно совокупности уравнений $2^x = 4$, $2^x = -6$. Второе уравнение этой совокупности корней не имеет, т. к. $-6 < 0$, а $2^x > 0$ при любом x . Из первого уравнения находим, что $x = 2$ — единственный корень исходного уравнения.

Равносильными преобразованиями степенно-показательных уравнений являются следующие:

$$f(x)^{g(x)} = f(x)^{h(x)} \Leftrightarrow \begin{cases} 1) \begin{cases} g(x) = h(x), \\ f(x) > 0, \\ f(x) \neq 1; \end{cases} \\ 2) \begin{cases} f(x) = 1, \\ x \in \text{ОДЗ } g(x) \text{ и } h(x). \end{cases} \end{cases}$$

Равносильные преобразования показательных неравенств состоят в следующем.

В области допустимых значений функций $f(x)$, $h(x)$ и $g(x)$ справедливо:

$$f(x)^{g(x)} > f(x)^{h(x)} \Leftrightarrow \begin{cases} \begin{cases} f(x) > 1, \\ g(x) > h(x), \end{cases} \\ \begin{cases} 0 < f(x) < 1, \\ g(x) < h(x); \end{cases} \end{cases}$$

$$f(x)^{g(x)} \geq f(x)^{h(x)} \Leftrightarrow \begin{cases} \begin{cases} f(x) \geq 1, \\ g(x) \geq h(x), \end{cases} \\ \begin{cases} 0 < f(x) \leq 1, \\ g(x) \leq h(x); \end{cases} \end{cases}$$

$$f(x)^{g(x)} < f(x)^{h(x)} \Leftrightarrow \begin{cases} f(x) > 1, \\ g(x) < h(x), \end{cases}$$

$$\begin{cases} 0 < f(x) < 1, \\ g(x) > h(x); \end{cases}$$

$$f(x)^{g(x)} \leq f(x)^{h(x)} \Leftrightarrow \begin{cases} f(x) \geq 1, \\ g(x) \leq h(x), \end{cases}$$

$$\begin{cases} 0 < f(x) \leq 1, \\ g(x) \geq h(x). \end{cases}$$

♦ **Примеры.**

1. Решите неравенство $(0,04)^{5x-x^2-8} < 625$.

Приводя обе части неравенства к одному основанию, получаем $(0,04)^{5x-x^2-8} < (0,04)^{-2}$. Поскольку $0 < 0,04 < 1$, $5x - x^2 - 8 > -2 \Rightarrow x^2 - 5x + 6 < 0 \Rightarrow x \in (2, 3)$.

2. Решите неравенство $4^{-x+0,5} - 7 \cdot 2^{-x} - 4 < 0$.

Пусть $t = 2^{-x}$, $t > 0$, тогда

$$\begin{cases} 2t^2 - 7t - 4 < 0, \\ t > 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} 2\left(t + \frac{1}{2}\right)(t - 4) < 0, \\ t > 0 \end{cases} \Rightarrow t \in (0, 4).$$

$$2^{-x} < 4 \Rightarrow -x < 2 \Rightarrow x \in (-2, +\infty).$$

10. ЛОГАРИФМИЧЕСКИЕ УРАВНЕНИЯ

• **Определение.** Уравнения содержащие переменную под знаком логарифма называются *логарифмическими*.

Равносильные преобразования логарифмических уравнений:

$$\log_a f(x) = b \Leftrightarrow \begin{cases} a > 0, a \neq 1, \\ f(x) > 0, \\ f(x) = a^b; \end{cases}$$

$$\log_x a = b \Leftrightarrow \begin{cases} a \neq 1, b \neq 0 : x = \sqrt[b]{a}; \\ a = 1, b = 0 : x > 0, x \neq 1; \\ a = 1, b \neq 0 : x \in \emptyset; \\ a \neq 1, b = 0 : x \in \emptyset; \end{cases}$$

$$\log_a f(x) = \log_a g(x) \Leftrightarrow \begin{cases} f(x) > 0, \\ f(x) = g(x) \end{cases} \text{ или } \begin{cases} g(x) > 0, \\ f(x) = g(x); \end{cases}$$

$a > 0, a \neq 1$

$$\log_{f(x)} A = \log_{g(x)} A \Leftrightarrow \begin{cases} f(x) > 0, \\ f(x) \neq 1, \\ f(x) = g(x) \end{cases} \text{ или } \begin{cases} g(x) > 0, \\ g(x) \neq 1, \\ f(x) = g(x); \end{cases}$$

$A > 0$

$$\log_{g(x)} f(x) = b \Leftrightarrow \begin{cases} g(x) > 0, \\ g(x) \neq 1, \\ f(x) > 0, \\ f(x) = g(x)^b; \end{cases}$$

$$\log_{f(x)} g(x) = \log_{f(x)} h(x) \Leftrightarrow \begin{cases} g(x) > 0, \\ f(x) > 0, \\ f(x) \neq 1, \\ g(x) = h(x) \end{cases} \text{ или } \begin{cases} h(x) > 0, \\ f(x) > 0, \\ f(x) \neq 1, \\ g(x) = h(x); \end{cases}$$

$$\log_{g(x)} f(x) = \log_{p(x)} f(x) \Leftrightarrow \begin{cases} f(x) > 0, \\ g(x) > 0, \\ g(x) \neq 1, \\ g(x) = p(x) \end{cases} \quad \text{или} \quad \begin{cases} f(x) > 0, \\ p(x) > 0, \\ p(x) \neq 1, \\ g(x) = p(x). \end{cases}$$

♦ **Примеры.**

1. Решите уравнение $\log_{2\sqrt{2}} \frac{1}{64} = x$.

По определению логарифма $(2\sqrt{2})^x = \frac{1}{64} \Leftrightarrow 2^{\frac{3}{2}x} = 2^{-6} \Leftrightarrow x = -4$.

$$\log_a x = b \Leftrightarrow \begin{cases} a > 0, a \neq 1, x > 0, \\ x = a^b. \end{cases}$$

2. Решите уравнение $\log_{2\sqrt[3]{5}} x = -6$.

ОДЗ: $x > 0$. По определению логарифма $x = (2\sqrt[3]{5})^{-6} \Rightarrow x = 1600^{-1}$.

3. Решите уравнение $\log_x \frac{1}{8} = \frac{3}{2}$.

ОДЗ: $x > 0, x \neq 1$. По определению логарифма $x^{3/2} = \frac{1}{8}$, отсюда

$$(x^{3/2})^{2/3} = (2^{-3})^{2/3} \Rightarrow x = 2^{-2} = \frac{1}{4}.$$

4. Решите уравнение $\log_x^3 10 - \log_x^2 10 - 6\log_x 10 = 0$.

ОДЗ: $x > 0, x \neq 1$.

Обозначим $t = \log_x 10$, тогда $t^3 - t^2 - 6t = 0 \Leftrightarrow t(t^2 - t - 6) = 0 \Leftrightarrow$

$$\Leftrightarrow t(t-3)(t+2) = 0, \text{ откуда } t_1 = 0, t_2 = 3, t_3 = -2.$$

Таким образом, уравнение равносильно совокупности равенств: $\log_x 10 = 0$ — нет корней; $\log_x 10 = -2$; $\log_x 10 = 3$, значения $x_1 = 10^{1/3}$ и $x_2 = 10^{-1/2}$, удовлетворяющие ОДЗ, являются решениями уравнения.

5. Решите уравнение $\log_{x+1}(x^2 - 3x + 1) = 1$.

Данное уравнение равносильно системе

$$\begin{cases} x+1 > 0, \\ x+1 \neq 1, \\ x^2 - 3x + 1 = x+1 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x > -1, \\ x \neq 0, \\ x^2 - 4x = 0, \end{cases} \Leftrightarrow x = 4.$$

ОДЗ явно не указана, поэтому проверяем найденное значение x путем непосредственной подстановки его в исходное уравнение ($\log_5 5 = 1$) и убеждаемся в правильности решения.

6. Решите уравнение $\log_{x^2-1}(x^3+6) = \log_{x^2-1}(4x^2-x)$.

Данное уравнение равносильно системе
$$\begin{cases} x^3+6 > 0, \\ x^2-1 > 0, \\ x^2-1 \neq 1, \\ x^3+6 = 4x^2-x. \end{cases}$$

Уравнение этой системы $x^3 - 4x^2 + x + 6 = 0$ имеет три корня: $x_1 = -1$; $x_2 = 2$, $x_3 = 3$. Число $x_1 = -1$ не удовлетворяет условию $x^2 - 1 > 0$. Числа $x_2 = 2$ и $x_3 = 3$ являются решениями этой системы, а следовательно, и решениями исходного уравнения.

11. ЛОГАРИФМИЧЕСКИЕ НЕРАВЕНСТВА

• **Определение.** Неравенства содержащие переменную под знаком логарифма называются *логарифмическими*.

Равносильные преобразования логарифмических неравенств:

$$\log_{f(x)} g(x) > \log_{f(x)} h(x) \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} g(x) > h(x), \\ h(x) > 0, \\ f(x) > 1, \\ h(x) > g(x), \\ g(x) > 0, \\ 0 < f(x) < 1; \end{array} \right.$$

$$\log_{f(x)} g(x) > 0 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} 0 < f(x) < 1, \\ 0 < g(x) < 1, \\ f(x) > 1, \\ g(x) > 1; \end{array} \right.$$

$$\log_{f(x)} g(x) \geq \log_{f(x)} h(x) \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} g(x) \geq h(x), \\ h(x) > 0, \\ f(x) > 1, \\ h(x) \geq g(x), \\ g(x) > 0, \\ 0 < f(x) < 1; \end{array} \right.$$

$$\log_{f(x)} g(x) \geq 0 \Leftrightarrow \begin{cases} 0 < f(x) < 1, \\ 0 < g(x) \leq 1, \\ f(x) > 1, \\ g(x) \geq 1; \end{cases}$$

$$\log_{f(x)} g(x) < \log_{f(x)} h(x) \Leftrightarrow \begin{cases} g(x) < h(x), \\ g(x) > 0, \\ f(x) > 1, \\ h(x) < g(x), \\ h(x) > 0, \\ 0 < f(x) < 1; \end{cases}$$

$$\log_{f(x)} g(x) < 0 \Leftrightarrow \begin{cases} 0 < f(x) < 1, \\ g(x) > 1, \\ f(x) > 1, \\ 0 < g(x) < 1; \end{cases}$$

$$\log_{f(x)} g(x) \leq \log_{f(x)} h(x) \Leftrightarrow \begin{cases} g(x) \leq h(x), \\ g(x) > 0, \\ f(x) > 1, \\ h(x) \leq g(x), \\ h(x) > 0, \\ 0 < f(x) < 1; \end{cases}$$

$$\log_{f(x)} g(x) \leq 0 \Leftrightarrow \begin{cases} 0 < f(x) < 1, \\ g(x) \geq 1, \\ f(x) > 1, \\ 0 < g(x) \leq 1. \end{cases}$$

♦ **Примеры.**

1. Решите неравенство $\log_{x^2}(2+x) < 1$.

Данное неравенство равносильно неравенству $\log_{x^2}(2+x) < \log_{x^2} x^2$, равносильному совокупности двух систем:

$$\begin{cases} x^2 > 1, \\ 2+x < x^2, \\ 2+x > 0 \end{cases} \Rightarrow x \in (-2, -1) \cup (2, +\infty) \Rightarrow$$

$$\begin{cases} 0 < x^2 < 1, \\ x^2 < 2+x \end{cases} \Rightarrow x \in (-1, 0) \cup (0, 1)$$

$$x \in (-2, -1) \cup (-1, 0) \cup (0, 1) \cup (2, +\infty).$$

2. Решите неравенство $\log_{x-2}(2x-3) > \log_{x-2}(24-6x)$.

$$\begin{cases} x-2 > 1, \\ 24-6x > 0, \\ 2x-3 > 24-6x \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} \frac{27}{8} < x < 4 \\ 2 < x < 3 \end{cases} \Rightarrow x \in (2, 3) \cup \left(\frac{27}{8}, 4\right).$$

12. ТРИГОНОМЕТРИЯ

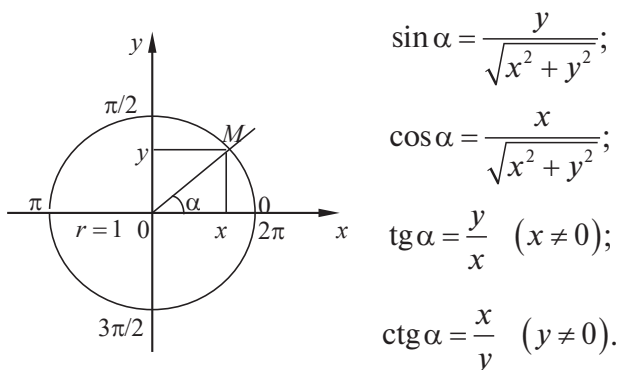
Радян — величина центрального угла, опирающегося на дугу, длина которой равна радиусу данной окружности.

$$1^\circ \approx 0,01745 \text{ радиан.} \quad 1 \text{ радиан} = \frac{180^\circ}{\pi}.$$

$$1 \text{ радиан} = 57^\circ 17' 45''.$$

12.1. Определения, знаки и значения тригонометрических функций

Тригонометрические функции произвольного аргумента:



• **Определение.** Ордината точки M , полученной при повороте точки $(1, 0)$ вокруг начала координат на угол α радиан, называется *синусом* числа α (обозначается $\sin \alpha$), а абсцисса этой точки — *косинусом* (обозначается $\cos \alpha$).

Тангенсом числа α называется отношение синуса этого числа к его косинусу: $\operatorname{tg} \alpha = \frac{\sin \alpha}{\cos \alpha}$, $\alpha \neq \frac{\pi}{2} + \pi n$, где $n \in \mathbb{Z}$.

Котангенсом числа α называется отношение косинуса этого числа к его синусу: $\operatorname{ctg} \alpha = \frac{\cos \alpha}{\sin \alpha}$, $\alpha \neq \pi n$, где $n \in \mathbb{Z}$.

Иногда рассматриваются тригонометрические функции *секанс* и *косеканс*, которые определяются так:

$$\sec \alpha = \frac{1}{\cos \alpha}, \quad \cos \alpha \neq 0; \quad \operatorname{cosec} \alpha = \frac{1}{\sin \alpha}, \quad \sin \alpha \neq 0.$$

Формулы, в которых над знаком равенства стоит восклицательный знак (!), имеют разные области определения в правой и левой частях.

В табл. 2, 3 приведены знаки (по четвертям) и значения тригонометрических функций для некоторых значений углов.

Таблица 2

Знаки тригонометрических функций

α	$\sin \alpha$	$\cos \alpha$	$\operatorname{tg} \alpha$	$\operatorname{ctg} \alpha$
$0 < \alpha < \frac{\pi}{2}$	+	+	+	+
$\frac{\pi}{2} < \alpha < \pi$	+	—	—	—
$\pi < \alpha < \frac{3\pi}{2}$	—	—	+	+
$\frac{3\pi}{2} < \alpha < 2\pi$	—	+	—	—

Таблица 3

Значения тригонометрических функций для некоторых углов

Радианы	0	$\frac{\pi}{6}$	$\frac{\pi}{4}$	$\frac{\pi}{3}$	$\frac{\pi}{2}$	π	$\frac{3\pi}{2}$	π
Градусы	0°	30°	45°	60°	90°	180°	270°	360°
$\sin \alpha$	0	$\frac{1}{2}$	$\frac{\sqrt{2}}{2}$	$\frac{\sqrt{3}}{2}$	1	0	—1	0
$\cos \alpha$	1	$\frac{\sqrt{3}}{2}$	$\frac{\sqrt{2}}{2}$	$\frac{1}{2}$	0	—1	0	1
$\operatorname{tg} \alpha$	0	$\frac{\sqrt{3}}{3}$	1	$\sqrt{3}$	—	0	—	0
$\operatorname{ctg} \alpha$	—	$\sqrt{3}$	1	$\frac{\sqrt{3}}{3}$	0	—	0	—

12.2. Формулы тригонометрических функций

В подглаве приведены следующие формулы.

Основные формулы.

$$1. \sin^2 \alpha + \cos^2 \alpha = 1.$$

$$2. \operatorname{tg} \alpha = \frac{\sin \alpha}{\cos \alpha} \quad \left(\alpha \neq \frac{\pi}{2} + \pi n \right).$$

$$3. \operatorname{ctg} \alpha = \frac{\cos \alpha}{\sin \alpha} \quad (\alpha \neq \pi n).$$

$$4. \operatorname{tg} \alpha \operatorname{ctg} \alpha = 1.$$

$$5. \sec \alpha = \frac{1}{\cos \alpha} \quad \left(\alpha \neq \frac{\pi}{2} + \pi n \right).$$

$$6. \operatorname{cosec} \alpha = \frac{1}{\sin \alpha} \quad (\alpha \neq \pi n).$$

$$7. 1 + \operatorname{tg}^2 \alpha = \frac{1}{\cos^2 \alpha} \quad \left(\alpha \neq \frac{\pi}{2} + \pi n \right).$$

$$8. 1 + \operatorname{ctg}^2 \alpha = \frac{1}{\sin^2 \alpha} \quad (\alpha \neq \pi n) \\ (n \in \mathbb{Z}).$$

Формулы приведения.

x	$\pi + \alpha$	$\pi - \alpha$	$2\pi - \alpha$
$\sin x$	$-\sin \alpha$	$\sin \alpha$	$-\sin \alpha$
$\cos x$	$-\cos \alpha$	$-\cos \alpha$	$\cos \alpha$
$\operatorname{tg} x$	$\operatorname{tg} \alpha$	$-\operatorname{tg} \alpha$	$-\operatorname{tg} \alpha$
$\operatorname{ctg} x$	$\operatorname{ctg} \alpha$	$-\operatorname{ctg} \alpha$	$-\operatorname{ctg} \alpha$

x	$\frac{\pi}{2} + \alpha$	$\frac{\pi}{2} - \alpha$	$\frac{3\pi}{2} + \alpha$	$\frac{3\pi}{2} - \alpha$
$\sin x$	$\cos \alpha$	$\cos \alpha$	$-\cos \alpha$	$-\cos \alpha$
$\cos x$	$-\sin \alpha$	$\sin \alpha$	$\sin \alpha$	$-\sin \alpha$
$\operatorname{tg} x$	$-\operatorname{ctg} \alpha$	$\operatorname{ctg} \alpha$	$-\operatorname{ctg} \alpha$	$\operatorname{ctg} \alpha$
$\operatorname{ctg} x$	$-\operatorname{tg} \alpha$	$\operatorname{tg} \alpha$	$-\operatorname{tg} \alpha$	$\operatorname{tg} \alpha$

Формулы для суммы и разности аргументов.

$$\sin(\alpha \pm \beta) = \sin \alpha \cos \beta \pm \cos \alpha \sin \beta;$$

$$\cos(\alpha \pm \beta) = \cos \alpha \cos \beta \mp \sin \alpha \sin \beta;$$

$$\operatorname{tg}(\alpha \pm \beta) = \frac{\operatorname{tg} \alpha \pm \operatorname{tg} \beta}{1 \mp \operatorname{tg} \alpha \operatorname{tg} \beta};$$

$$\operatorname{ctg}(\alpha \pm \beta) = \frac{\operatorname{ctg} \alpha \operatorname{ctg} \beta \mp 1}{\operatorname{ctg} \beta \pm \operatorname{ctg} \alpha}.$$

Формулы произведений тригонометрических функций.

$$\sin \alpha \sin \beta = \frac{1}{2} [\cos(\alpha - \beta) - \cos(\alpha + \beta)],$$

$$\cos \alpha \cos \beta = \frac{1}{2} [\cos(\alpha - \beta) + \cos(\alpha + \beta)].$$

$$\sin \alpha \cos \beta = \frac{1}{2} [\sin(\alpha - \beta) + \sin(\alpha + \beta)],$$

$$\cos \alpha \sin \beta = \frac{1}{2} [\sin(\alpha + \beta) - \sin(\alpha - \beta)].$$

$$\operatorname{tg} \alpha \operatorname{tg} \beta = \frac{\operatorname{tg} \alpha + \operatorname{tg} \beta}{\operatorname{ctg} \alpha + \operatorname{ctg} \beta}, \quad \operatorname{ctg} \alpha \operatorname{ctg} \beta = \frac{\operatorname{ctg} \alpha + \operatorname{ctg} \beta}{\operatorname{tg} \alpha + \operatorname{tg} \beta}.$$

$$\sin(\alpha + \beta) \sin(\alpha - \beta) = \cos^2 \beta - \cos^2 \alpha = \sin^2 \alpha - \sin^2 \beta,$$

$$\cos(\alpha + \beta) \cos(\alpha - \beta) = 1 - \sin^2 \alpha - \sin^2 \beta = \cos^2 \alpha + \cos^2 \beta - 1.$$

Тригонометрические функции двойного аргумента.

$$\begin{aligned} 1. \quad \cos 2\alpha &= \cos(\alpha + \alpha) = \cos^2 \alpha - \sin^2 \alpha = 2\cos^2 \alpha - 1 = 1 - 2\sin^2 \alpha = \\ &= \frac{\cos^2 \alpha - \sin^2 \alpha}{\cos^2 \alpha + \sin^2 \alpha} = \frac{1 - \operatorname{tg}^2 \alpha}{1 + \operatorname{tg}^2 \alpha}. \end{aligned}$$

$$2. \quad \sin 2\alpha = \sin(\alpha + \alpha) = 2\sin \alpha \cos \alpha = \frac{2\sin \alpha \cos \alpha}{\cos^2 \alpha + \sin^2 \alpha} = \frac{2\operatorname{tg} \alpha}{1 + \operatorname{tg}^2 \alpha}.$$

$$3. \quad \operatorname{tg} 2\alpha = \frac{2\operatorname{tg} \alpha}{1 - \operatorname{tg}^2 \alpha} = \frac{2}{\operatorname{ctg} \alpha - \operatorname{tg} \alpha}.$$

$$4. \quad \operatorname{ctg} 2\alpha = \frac{\operatorname{ctg}^2 \alpha - 1}{2\operatorname{ctg} \alpha} = \frac{\operatorname{ctg} \alpha - \operatorname{tg} \alpha}{2}.$$

Универсальная тригонометрическая подстановка.

$$\operatorname{tg} \frac{\alpha}{2} = t, \quad \sin \alpha = \frac{2t}{1+t^2}, \quad \cos \alpha = \frac{1-t^2}{1+t^2}, \quad \operatorname{tg} \alpha = \frac{2t}{1-t^2},$$

$$\frac{\alpha}{2} \neq \frac{\pi}{2} + \pi n, \quad n \in \mathbb{Z}.$$

Формулы кратных аргументов.

$$\sin 3\alpha = -4\sin^3 \alpha + 3\sin \alpha.$$

$$\cos 3\alpha = 4\cos^3 \alpha - 3\cos \alpha.$$

$$\operatorname{tg} 3\alpha = \frac{3\operatorname{tg} \alpha - \operatorname{tg}^3 \alpha}{1 - 3\operatorname{tg}^2 \alpha}.$$

$$\operatorname{ctg} 3\alpha = \frac{\operatorname{ctg}^3 \alpha - 3\operatorname{ctg} \alpha}{3\operatorname{ctg}^2 \alpha - 1}.$$

$$\sin 4\alpha = 4\cos^3 \alpha \sin \alpha - 4\cos \alpha \sin^3 \alpha.$$

$$\cos 4\alpha = \cos^4 \alpha - 6\cos^2 \alpha \sin^2 \alpha + \sin^4 \alpha.$$

Формулы половинного аргумента.

$$\sin \frac{\alpha}{2} = \pm \sqrt{\frac{1 - \cos \alpha}{2}}, \quad \cos \frac{\alpha}{2} = \pm \sqrt{\frac{1 + \cos \alpha}{2}}.$$

$$\operatorname{tg} \frac{\alpha}{2} = \pm \sqrt{\frac{1 - \cos \alpha}{1 + \cos \alpha}} = \frac{\sin \alpha}{1 + \cos \alpha} = \frac{1 - \cos \alpha}{\sin \alpha}.$$

$$\operatorname{ctg} \frac{\alpha}{2} = \pm \sqrt{\frac{1 + \cos \alpha}{1 - \cos \alpha}} = \frac{\sin \alpha}{1 - \cos \alpha} = \frac{1 + \cos \alpha}{\sin \alpha}.$$

Степени тригонометрических функций.

$$\sin^2 \alpha = \frac{1 - \cos 2\alpha}{2}, \quad \cos^2 \alpha = \frac{1 + \cos 2\alpha}{2}.$$

$$\sin^3 \alpha = \frac{3\sin \alpha - \sin 3\alpha}{4}, \quad \cos^3 \alpha = \frac{3\cos \alpha + \cos 3\alpha}{4}.$$

$$\sin^4 \alpha = \frac{3}{8} - \frac{1}{2}\cos 2\alpha + \frac{1}{8}\cos 4\alpha, \quad \cos^4 \alpha = \frac{3}{8} + \frac{1}{2}\cos 2\alpha + \frac{1}{8}\cos 4\alpha.$$

Формулы суммы и разности тригонометрических функций.

$$\sin \alpha + \sin \beta = 2\sin \frac{\alpha + \beta}{2} \cos \frac{\alpha - \beta}{2}.$$

$$\sin \alpha - \sin \beta = 2\cos \frac{\alpha + \beta}{2} \sin \frac{\alpha - \beta}{2}.$$

$$\cos \alpha + \cos \beta = 2\cos \frac{\alpha + \beta}{2} \cos \frac{\alpha - \beta}{2}.$$

$$\cos \alpha - \cos \beta = -2\sin \frac{\alpha + \beta}{2} \sin \frac{\alpha - \beta}{2}.$$

$$\operatorname{tg} \alpha \pm \operatorname{tg} \beta = \frac{\sin(\alpha \pm \beta)}{\cos \alpha \cos \beta}, \quad \operatorname{ctg} \alpha \pm \operatorname{ctg} \beta = \pm \frac{\sin(\alpha \pm \beta)}{\sin \alpha \sin \beta}.$$

$$\operatorname{tg} \alpha \pm \operatorname{ctg} \beta = \pm \frac{\cos(\alpha \mp \beta)}{\cos \alpha \sin \beta}, \quad \operatorname{ctg} \alpha \pm \operatorname{tg} \beta = \frac{\cos(\alpha \mp \beta)}{\sin \alpha \cos \beta}.$$

Некоторые соотношения.

$$1. \cos \alpha \pm \sin \alpha = \frac{2}{\sqrt{2}} \left(\frac{\sqrt{2}}{2} \cos \alpha \pm \frac{\sqrt{2}}{2} \sin \alpha \right) = \sqrt{2} \cos \left(\frac{\pi}{4} \mp \alpha \right) =$$

$$\sqrt{2} \cos \left(\alpha \mp \frac{\pi}{4} \right) = \sqrt{2} \sin \left(\frac{\pi}{4} \pm \alpha \right).$$

$$2. \sin \alpha \pm \sqrt{3} \cos \alpha = 2 \left(\frac{1}{2} \sin \alpha \pm \frac{\sqrt{3}}{2} \cos \alpha \right) = 2 \sin \left(\alpha \pm \frac{\pi}{3} \right).$$

$$3. \sqrt{3} \sin \alpha \pm \cos \alpha = 2 \left(\sin \alpha \frac{\sqrt{3}}{2} \pm \cos \alpha \cdot \frac{1}{2} \right) = 2 \sin \left(\alpha \pm \frac{\pi}{6} \right).$$

$$4. A \cos \alpha + B \sin \alpha = \sqrt{A^2 + B^2} \cos \left(\operatorname{arctg} \frac{B}{A} - \pm \right),$$

$$A^2 + B^2 \neq 0, \sin \beta = \frac{B}{\sqrt{A^2 + B^2}}, \cos \beta = \frac{A}{\sqrt{A^2 + B^2}}.$$

$$5. (\sin \alpha \pm \cos \alpha)^2 = 1 \pm \sin 2\alpha \Rightarrow \sin \alpha \pm \cos \alpha = \pm \sqrt{1 \pm \sin 2\alpha}.$$

$$6. \sin 3\alpha = 4 \sin \alpha \sin \left(\frac{\pi}{3} - \alpha \right) \sin \left(\frac{\pi}{3} + \alpha \right).$$

$$7. \cos 3\alpha = 4 \cos \alpha \cos \left(\frac{\pi}{3} - \alpha \right) \cos \left(\frac{\pi}{3} + \alpha \right).$$

$$8. \cos^4 \alpha - \sin^4 \alpha = \cos^2 \alpha - \sin^2 \alpha = \cos 2\alpha;$$

$$\sin^4 \alpha + \cos^4 \alpha = (\sin^2 \alpha + \cos^2 \alpha)^2 - 2 \cos^2 \alpha \sin^2 \alpha = 1 - \frac{\sin^2 2\alpha}{2};$$

$$\sin^4 \alpha + \cos^4 \alpha = (\cos^2 \alpha - \sin^2 \alpha)^2 + 2 \cos^2 \alpha \sin^2 \alpha =$$

$$= \cos^2 2\alpha + \frac{1 - \cos^2 2\alpha}{2} = \frac{1 + \cos^2 2\alpha}{2} = \frac{3 + \cos 4\alpha}{4}.$$

$$9. \cos^6 \alpha + \sin^6 \alpha = \frac{1}{8}(5 + 3 \cos 4\alpha) = \frac{1}{4}(1 + 3 \cos^2 2\alpha);$$

$$\cos^6 \alpha - \sin^6 \alpha = \frac{1}{16}(15 \cos 2\alpha + \cos 6\alpha).$$

$$10. \cos^8 \alpha - \sin^8 \alpha = \frac{1}{4} \cos 2\alpha (3 + \cos 4\alpha).$$

$$11. \operatorname{tg} \alpha + \operatorname{ctg} \alpha = \frac{2}{\sin 2\alpha}.$$

12.3. Свойства и графики тригонометрических функций

• **Определение.** Функция $y = f(x)$ называется *периодической*, если существует такое число $T \neq 0$: 1) что для любых допустимых значений x значения $(x + T)$ и $(x - T)$ принадлежат области допустимых значений аргумента; 2) $f(x + T) = f(x)$. Число T называется *периодом* функции $f(x)$.

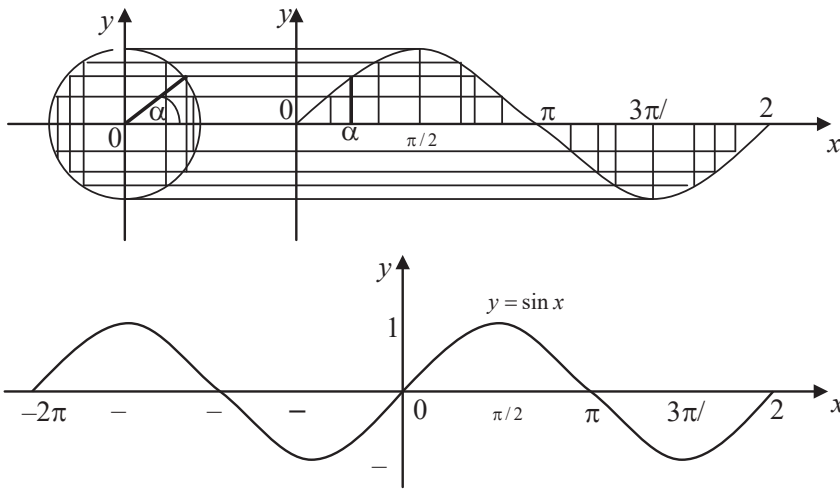
Рассмотрим прямые и производные тригонометрические функции.

Функция $y = \sin x$.

Свойства функции следующие.

1. Область определения — $x \in R$.
2. Область значений функции — $y \in [-1; +1]$.
3. Функция $y = \sin x$ нечетная: $\sin(-x) = -\sin x$.
4. Функция $y = \sin x$ периодическая с периодами $2k\pi$: $\sin(x + 2\pi k) = \sin x$ ($k \in Z$).
5. Точки пересечения с осями координат: с осью Oy — если $x = 0$, то $y = \sin 0 = 0$; с осью Ox (нули функции) — $\sin x = 0$, откуда $x = \pi k$, $k \in Z$.

График функции $y = \sin x$ называется *синусоидой* (рис. 26).

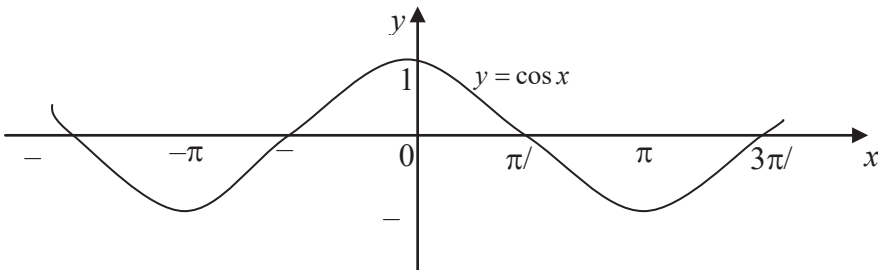
Рис. 26. График функции $y = \sin x$

Функция $y = \cos x$.

Перечислим свойства функции.

1. Область определения $-x \in R$.
2. Область значений функции $-y \in [-1; +1]$.
3. Функция $y = \cos x$ четная $\cos(-x) = \cos x$.
4. Функция $y = \cos x$ периодическая с периодами $2\pi k$: $\cos(x + 2\pi k) = \cos x$ ($k \in Z$).
5. Точки пересечения с осями координат: с осью Oy — если $x = 0$, то $y = \cos 0 = 1$; с осью Ox (нули функции) — $\cos x = 0$, откуда $x = \frac{\pi}{2} + \pi k$.

График функции $y = \cos x$ (рис. 27) называется *косинусоидой*.

Рис. 27. График функции $y = \cos x$

Замечание. Поскольку $\cos x = \sin\left(x + \frac{\pi}{2}\right)$, постольку график функции $y = \cos x$ получается из графика функции $y = \sin x$ с помощью параллельного переноса на расстояние $\pi/2$ в отрицательном направлении оси Ox .

Функция $y = \operatorname{tg} x$.

Рассмотрим свойства функции.

1. Область определения тангенса включает в себя все действительные числа, кроме чисел вида $\frac{\pi}{2} + k\pi, k \in \mathbb{Z}$.

2. Область значений — $y \in \mathbb{R}$.

3. Функция $\operatorname{tg} x$ нечетная, $\operatorname{tg}(-x) = -\operatorname{tg} x$.

4. Функция $y = \operatorname{tg} x$ периодическая с периодом $k\pi$: $\operatorname{tg}(x + k\pi) = \operatorname{tg} x$, $k \in \mathbb{Z}$.

5. Точки пересечения с осями координат: с осью Oy — при $x = 0$ $y = \operatorname{tg} 0 = 0$; с осью Ox (нули функции) — $\operatorname{tg} x = 0$, откуда $\sin x = 0$, т. е. $x = k\pi, k \in \mathbb{Z}$.

График функции (рис. 28) называется *тангенсоидой*.

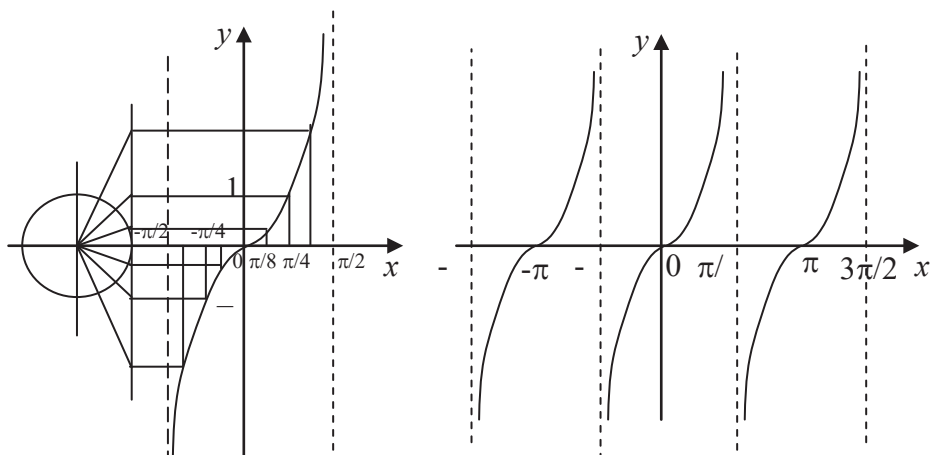


Рис. 28. График функции $y = \operatorname{tg} x$

Функция $y = \operatorname{ctg} x$.

Свойствами функции являются такие.

1. Область определения котангенса состоит из всех действительных чисел, кроме чисел вида $k\pi$, $x \neq k\pi$, $k \in \mathbb{Z}$.

2. Область значений — $y \in \mathbb{R}$.

3. Функция $\operatorname{ctg} x$ нечетная, $\operatorname{ctg}(-x) = -\operatorname{ctg} x$.

4. Функция $y = \operatorname{ctg} x$ периодическая с периодом $k\pi$: $\operatorname{ctg}(x + k\pi) = \operatorname{ctg} x$, $k \in \mathbb{Z}$.

5. Точки пересечения с осями координат: с осью Oy график не пересекается; с осью Ox (нули функции) — $\operatorname{ctg} x = 0$, откуда $\cos x = 0$, т. е.

$$x = \frac{\pi}{2} + k\pi, k \in \mathbb{Z}.$$

График функции (рис. 29) называется *котангенсоидой*.

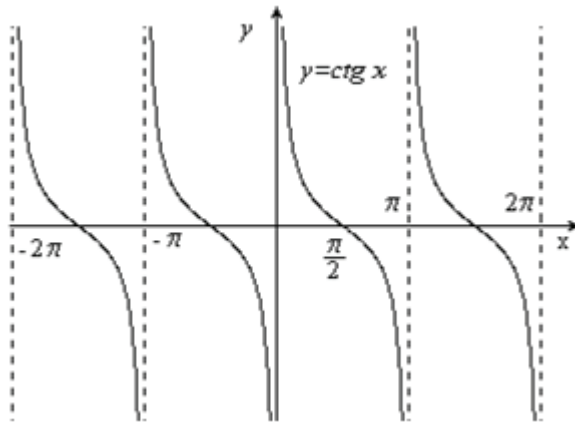


Рис. 29. График функции $y = \operatorname{ctg} x$

Замечание. Поскольку $\operatorname{ctg} x = -\operatorname{tg}\left(x - \frac{\pi}{2}\right)$, постольку график функции $y = \operatorname{ctg} x$ получается из графика функции $y = \operatorname{tg} x$ с помощью параллельного переноса на расстояние $\pi/2$ в отрицательном направлении оси Ox и последующего отражения относительно оси Ox .

12.4. Тригонометрические уравнения

Приведены простейшие виды тригонометрических уравнений.

$$1. \sin x = a \Rightarrow \begin{cases} |a| > 1 \Rightarrow x \in \emptyset, \\ |a| \leq 1 \Rightarrow x = (-1)^k \arcsin a + \pi k, \end{cases}$$

$$\text{где } \arcsin a \in \left[-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right], k \in Z.$$

$$2. \cos x = a \Rightarrow \begin{cases} |a| > 1 \Rightarrow x \in \emptyset, \\ |a| \leq 1 \Rightarrow x = \pm \arccos a + 2\pi k, \end{cases}$$

$$\text{где } \arccos a \in [0, \pi], k \in Z.$$

$$3. \operatorname{tg} x = a \Rightarrow x = \operatorname{arctg} a + \pi k, \text{ где } \operatorname{arctg} a \in \left(-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right), k \in Z, a \in R.$$

$$4. \operatorname{ctg} x = a \Rightarrow x = \operatorname{arccotg} a + \pi k, \text{ где } \operatorname{arccotg} a \in (0, \pi), k \in Z, a \in R.$$

Общие виды их решения и решения для частных случаев представлены в табл. 4.

Таблица 4

Виды решения тригонометрических уравнений

a	$\sin x = a$	$\cos x = a$
0	$x = \pi k$	$x = \frac{\pi}{2} + \pi k$
1	$x = \frac{\pi}{2} + 2\pi k$	$x = 2\pi k$
-1	$x = -\frac{\pi}{2} + 2\pi k$	$x = \pi + 2\pi k$
$\frac{1}{2}$	$x = (-1)^k \frac{\pi}{6} + \pi k$	$x = \pm \frac{\pi}{3} + 2\pi k$
$-\frac{1}{2}$	$x = (-1)^{k+1} \frac{\pi}{6} + \pi k$	$x = \pm \frac{2\pi}{3} + 2\pi k$
$\frac{\sqrt{3}}{2}$	$x = (-1)^k \frac{\pi}{3} + \pi k$	$x = \pm \frac{\pi}{6} + 2\pi k$
$-\frac{\sqrt{3}}{2}$	$x = (-1)^{k+1} \frac{\pi}{3} + \pi k$	$x = \pm \frac{5\pi}{6} + 2\pi k$
$\frac{\sqrt{2}}{2}$	$x = (-1)^k \frac{\pi}{4} + \pi k$	$x = \pm \frac{\pi}{4} + 2\pi k$

Окончание табл. 4

$-\frac{\sqrt{2}}{2}$	$x = (-1)^{k+1} \frac{\pi}{4} + \pi k$	$x = \pm \frac{3\pi}{4} + 2\pi k$
a	$\operatorname{tg} x = a$	$\operatorname{ctg} x = a$
0	$x = \pi k$	$x = \frac{\pi}{2} + \pi k$
1	$x = \frac{\pi}{4} + \pi k$	$x = \frac{\pi}{4} + \pi k$
-1	$x = -\frac{\pi}{4} + \pi k$	$x = \frac{3\pi}{4} + \pi k$
$\sqrt{3}$	$x = \frac{\pi}{3} + \pi k$	$x = \frac{\pi}{6} + \pi k$
$-\sqrt{3}$	$x = -\frac{\pi}{3} + \pi k$	$x = \frac{5\pi}{6} + \pi k$
$\frac{\sqrt{3}}{3}$	$x = \frac{\pi}{6} + \pi k$	$x = \frac{\pi}{3} + \pi k$
$-\frac{\sqrt{3}}{3}$	$x = -\frac{\pi}{6} + \pi k$	$x = \frac{2\pi}{3} + \pi k$

♦ Примеры.

1. Решите уравнение $\sin\left(5x + \frac{3}{8}\pi\right) = \frac{\sqrt{3}}{2}$.

Обозначив $5x + \frac{3}{8}\pi$ через y , получим уравнение $\sin y = \frac{\sqrt{3}}{2}$. Его решение имеет вид: $y = k\pi + (-1)^k \arcsin \frac{\sqrt{3}}{2}$, $k \in \mathbb{Z}$. Поскольку $\arcsin \frac{\sqrt{3}}{2} = \frac{\pi}{3}$, получаем, что $y = (-1)^k \frac{\pi}{3} + \pi k$, $k \in \mathbb{Z}$.

Теперь находим x : $5x + \frac{3}{8}\pi = (-1)^k \frac{\pi}{3} + \pi k$, $k \in \mathbb{Z}$, откуда $5x = -\frac{3}{8}\pi + (-1)^k \frac{\pi}{3} + \pi k$, $k \in \mathbb{Z}$, окончательно $x = (-1)^k \frac{\pi}{15} - \frac{3}{40}\pi + \frac{k}{5}\pi$, $k \in \mathbb{Z}$.

Ответ: $(-1)^k \frac{\pi}{15} - \frac{3}{40}\pi + \frac{k}{5}\pi$, $k \in \mathbb{Z}$.

2. Решите уравнение $2\cos x \cos 2x = \cos x$.

Преобразуем уравнение к виду $\cos x(2\cos 2x - 1) = 0$. Это уравнение равносильно совокупности уравнений:

$$\begin{cases} \cos x = 0, \\ \cos 2x = \frac{1}{2} \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x = \frac{\pi}{2} + \pi n, & n \in Z, \\ 2x = \pm \frac{\pi}{3} + 2\pi k, & k \in Z, \text{ т.е. } x = \pm \frac{\pi}{6} + \pi k, & k \in Z. \end{cases}$$

Ответ: $\frac{\pi}{2} + \pi n, \pm \frac{\pi}{6} + \pi k \ (n, k \in Z)$.

3. Решите уравнение $2\sin^2 x - \cos x - 1 = 0$.

$$2(1 - \cos^2 x) - \cos x - 1 = 0; \quad 2\cos^2 x + \cos x - 1 = 0.$$

Пусть $\cos x = t$, $|t| \leq 1$. Данное уравнение примет следующий вид:

$$2t^2 + t - 1 = 0. \text{ Решив его, найдем } t_1 = -1, \ t_2 = \frac{1}{2}. \text{ Итак, } \cos x = -1, \ \cos x = \frac{1}{2}.$$

Решая каждое из этих уравнений, получим:

$$\begin{cases} x = 2\pi n + \pi, & n \in Z; \\ x = \pm \frac{\pi}{3} + 2\pi k, & k \in Z. \end{cases}$$

Ответ: $(2n+1)\pi, \pm \frac{\pi}{3} + 2\pi k \ (n, k \in Z)$.

Уравнения можно решать с помощью *универсальных тригонометрических подстановок*.

1. Если уравнение содержит только функции $\operatorname{tg} x$, $\sin^2 x$, $\cos^2 x$, $\sin 2x$, $\cos 2x$, то с помощью формул

$$\sin^2 x = \frac{\operatorname{tg}^2 x}{1 + \operatorname{tg}^2 x}; \quad \cos^2 x = \frac{1}{1 + \operatorname{tg}^2 x};$$

$$\sin 2x = \frac{2 \operatorname{tg} x}{1 + \operatorname{tg}^2 x}; \quad \cos 2x = \frac{1 - \operatorname{tg}^2 x}{1 + \operatorname{tg}^2 x}$$

его можно привести к виду $f(\operatorname{tg} x)$.

2. Если уравнение содержит $\sin x$, $\cos x$ и функции половинного угла $\frac{x}{2}$, то с помощью формул

$$\sin x = \frac{2 \operatorname{tg} \frac{x}{2}}{1 + \operatorname{tg}^2 \frac{x}{2}}, \quad \cos x = \frac{1 - \operatorname{tg}^2 \frac{x}{2}}{1 + \operatorname{tg}^2 \frac{x}{2}}, \quad \operatorname{tg} x = \frac{2 \operatorname{tg} \frac{x}{2}}{1 - \operatorname{tg}^2 \frac{x}{2}}$$

уравнение приводится к виду $f\left(\operatorname{tg} \frac{x}{2}\right) = 0$.

♦ **Пример.** Решите уравнение $\sin 2x - \cos 2x = \operatorname{tg} x$.

ОДЗ: $x \neq \frac{\pi}{2} + \pi m, m \in \mathbb{Z}$.

$$\frac{2 \operatorname{tg} x}{1 + \operatorname{tg}^2 x} - \frac{1 - \operatorname{tg}^2 x}{1 + \operatorname{tg}^2 x} = \operatorname{tg} x \text{ или } 2 \operatorname{tg} x - 1 + \operatorname{tg}^2 x = \operatorname{tg} x (1 + \operatorname{tg}^2 x).$$

Отсюда имеем: $\operatorname{tg}^3 x - \operatorname{tg}^2 x - \operatorname{tg} x + 1 = 0$. Пусть $\operatorname{tg} x = t$, тогда

$$t^3 - t^2 - t + 1 = 0; t^2(t-1) - (t-1) = 0; (t-1)(t^2-1) = 0;$$

$$(t-1)^2(t+1) = 0; t_1 = 1, t_2 = -1.$$

$$\begin{cases} \operatorname{tg} x = 1 \Rightarrow x = \frac{\pi}{4} + \pi n, n \in \mathbb{Z}, \\ \operatorname{tg} x = -1 \Rightarrow x = -\frac{\pi}{4} + \pi k, k \in \mathbb{Z}. \end{cases}$$

Ответ: $\frac{\pi}{4} + \pi n, -\frac{\pi}{4} + \pi k \quad (n, k \in \mathbb{Z})$.

Однородные уравнения первого порядка имеют решение:

$$a \sin x + b \cos x = 0 \Leftrightarrow \operatorname{tg} x = -\frac{b}{a} \Leftrightarrow x = \pi k + \operatorname{arctg}\left(-\frac{b}{a}\right), \quad k \in \mathbb{Z}.$$

Однородные уравнения второго порядка решаются так:

$$a \sin^2 x + b \sin x \cos x + c \cos^2 x = 0 \Leftrightarrow a \operatorname{tg}^2 x + b \operatorname{tg} x + c = 0 \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \begin{cases} x_{1,2} = \pi k + \operatorname{arctg} \frac{-b \pm \sqrt{b^2 - 4ac}}{2a}, & b^2 - 4ac \geq 0, \quad a, b, c \neq 0, \\ x \in \emptyset, & b^2 - 4ac < 0. \end{cases}$$

♦ **Пример.** Решите уравнение $10 \sin^2 x + 6 \sin x \cos x - 4 \cos^2 x = 0$.

Поскольку значения $x = \frac{\pi}{2} + \pi n$ не являются корнями уравнения и $\cos x \neq 0$, постольку разделим обе части уравнения на $\cos^2 x$:

$$5 \operatorname{tg}^2 x + 3 \operatorname{tg} x - 2 = 0, \text{ откуда } \operatorname{tg} x = -1, \quad x_1 = -\frac{\pi}{4} + \pi n, \quad n \in \mathbb{Z}, \text{ и } \operatorname{tg} x = \frac{2}{5},$$

$$x_2 = \operatorname{arctg} \frac{2}{5} + \pi k, \quad k \in \mathbb{Z}.$$

$$\text{Ответ: } x_1 = -\frac{\pi}{4} + \pi n, \quad x_2 = \operatorname{arctg} \frac{2}{5} + \pi k \quad (n, k \in \mathbb{Z}).$$

12.5. Тригонометрические неравенства.

Примеры решений

1. Решите неравенство $\sin x > \frac{1}{2}$.

На вспомогательном тригонометрическом круге (рис. 30) мы видим, что искомым значениям x соответствуют точки дуги MNP , т. е.

$$\frac{\pi}{6} + 2\pi n < x < \frac{5\pi}{6} + 2\pi n, \quad n \in \mathbb{Z}.$$

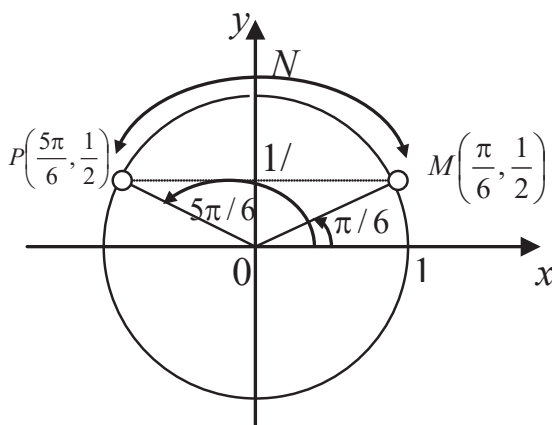


Рис. 30. Решение неравенства $\sin x > \frac{1}{2}$ на тригонометрическом круге

$$\text{Ответ: } x \in \left(\frac{\pi}{6} + 2\pi n, \frac{5\pi}{6} + 2\pi n \right), \quad n \in \mathbb{Z}.$$

2. Решите неравенство $\sin x + \cos 2x > 1$.

Воспользовавшись формулой $\cos 2x = 1 - 2\sin^2 x$ и приняв $t = \sin x$, $|t| \leq 1$, запишем данное неравенство в виде $t - 2t^2 > 0 \Rightarrow t(1 - 2t) > 0 \Rightarrow 0 < t < \frac{1}{2}$ (рис. 31), т. е.

$$0 < \sin x < \frac{1}{2} \Rightarrow 2\pi n < x < \frac{\pi}{6} + 2\pi n, \frac{5\pi}{6} + 2\pi k < x < \pi + 2\pi k, n, k \in \mathbb{Z}.$$

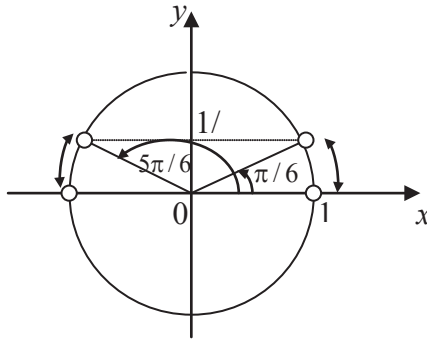


Рис. 31. Решение неравенства $\sin x + \cos 2x > 1$ на тригонометрическом круге

Ответ: $x \in \left(2\pi n, \frac{\pi}{6} + 2\pi n\right) \cup \left(\frac{5\pi}{6} + 2\pi k, \pi + 2\pi k\right), n, k \in \mathbb{Z}.$

12.6. Обратные тригонометрические функции

Арксинусом числа x называется такое число $y \in \left[-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right]$, синус которого равен x .

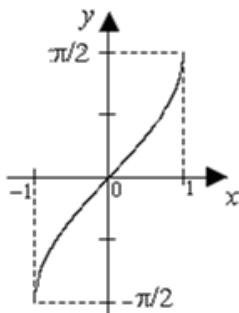
Свойства арксинуса:

$$y = \arcsin x, x = \sin y, |x| \leq 1, y \in \left[-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right].$$

$\arcsin(-x) = -\arcsin x$; $\sin(\arcsin x) = x$, если $|x| \leq 1$; $\arcsin x$ монотонно возрастает (рис. 32).

Ниже приведены значения арксинуса в радианах.

x	0	$\pm \frac{\pi}{6}$	$\pm \frac{\pi}{4}$	$\pm \frac{\pi}{3}$	$\pm \frac{\pi}{2}$
$\sin x$	0	$\pm \frac{1}{2}$	$\pm \frac{\sqrt{2}}{2}$	$\pm \frac{\sqrt{3}}{2}$	± 1

Рис. 32. График функции $y = \arcsin x$

Арккосинусом числа x называется такое число $y \in [0, \pi]$, косинус которого равен x .

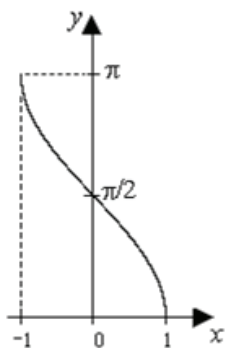
Свойства арккосинуса:

$$y = \arccos x, \quad x = \cos y, \quad |x| \leq 1, \quad y \in [0, \pi].$$

$\arccos(-x) = \pi - \arccos x$; $\cos(\arccos x) = x$, если $|x| \leq 1$; $\arccos x$ монотонно убывает (рис. 33).

Ниже приведены значения арккосинуса в радианах.

x	0	$\frac{\pi}{6}$	$\frac{\pi}{4}$	$\frac{\pi}{3}$	$\frac{\pi}{2}$	$\frac{2\pi}{3}$	$\frac{3\pi}{4}$	$\frac{5\pi}{6}$	π
$\cos x$	1	$\frac{\sqrt{3}}{2}$	$\frac{\sqrt{2}}{2}$	$\frac{1}{2}$	0	$-\frac{1}{2}$	$-\frac{\sqrt{2}}{2}$	$-\frac{\sqrt{3}}{2}$	-1

Рис. 33. График функции $y = \arccos x$

Арктангенсом числа x называется такое число $y \in \left(-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right)$, тангенс которого равен x .

Свойства арктангенса следующие:

$$y = \operatorname{arctg} x, x = \operatorname{tg} y, y \in \left(-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right), x \in R.$$

$\operatorname{arctg}(-x) = -\operatorname{arctg} x$; $\operatorname{tg}(\operatorname{arctg} x) = x$, $x \in R$; $\operatorname{arctg} x$ монотонно возрастает (рис. 34).

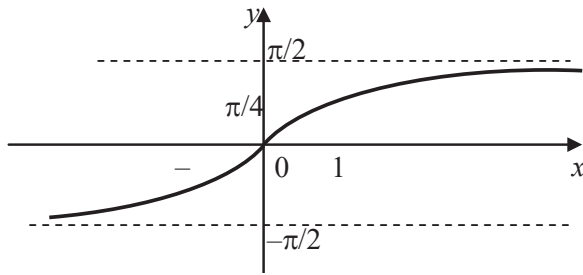


Рис. 34. График функции $y = \operatorname{arctg} x$

Арккотангенсом числа x называется такое число $y \in (0, \pi)$, котангенс которого равен x .

Свойства арккотангенса:

$$y = \operatorname{arcctg} x, x = \operatorname{ctg} y, y \in (0, \pi), x \in R.$$

$\operatorname{arcctg}(-x) = \pi - \operatorname{arcctg} x$ $\operatorname{ctg}(\operatorname{arcctg} x) = x$, $x \in R$; $\operatorname{arcctg} x$ монотонно убывает (рис. 35).

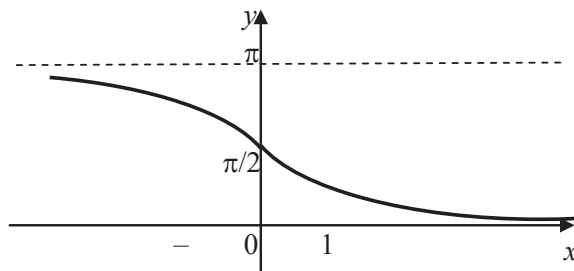


Рис. 35. График функции $y = \operatorname{arcctg} x$

♦ **Примеры решений задач с обратными тригонометрическими функциями.**

1. $4 \operatorname{arctg}(x^2 - 3x - 3) - \pi = 0.$

По определению $\alpha = \operatorname{arctg}(x^2 - 3x - 3), \alpha \in \left(-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right);$

тогда $\operatorname{arctg}(x^2 - 3x - 3) = \frac{\pi}{4}; \operatorname{tg} \operatorname{arctg} \alpha = 1 \Rightarrow x^2 - 3x - 3 = 1; x_{1,2} = -1; 4.$

Ответ: $x_{1,2} = -1; 4.$

2. $\arcsin x < \frac{\pi}{6}.$

$$\begin{cases} \text{ОДЗ: } |x| \leq 1, \\ \arcsin x < \arcsin \frac{1}{2} \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} |x| \leq 1, \\ x < \frac{1}{2} \end{cases} \Rightarrow x \in \left[-1, \frac{1}{2}\right).$$

Ответ: $x \in \left[-1, \frac{1}{2}\right).$

13. ЭЛЕМЕНТЫ МАТЕМАТИЧЕСКОГО АНАЛИЗА

В главе рассмотрены разделы математического анализа, нужные для построения графиков функций. В главе представлена таблица производных и правила дифференцирования, уравнение касательной и нормали к графику функции, исследование функций с помощью производных и схема построения графиков.

Таблица производных.

1. $c' = 0 \quad (c = \text{const})$	9. $(\sin x)' = \cos x$
2. $(x^n)' = nx^{n-1}$	10. $(\cos x)' = -\sin x$
3. $x' = 1, \left(\frac{1}{x}\right)' = -\frac{1}{x^2}$	11. $(\operatorname{tg} x)' = \frac{1}{\cos^2 x}$
4. $(\sqrt{x})' = \frac{1}{2\sqrt{x}}$	12. $(\operatorname{ctg} x)' = -\frac{1}{\sin^2 x}$
5. $(a^x)' = a^x \ln a$	13. $(\arcsin x)' = \frac{1}{\sqrt{1-x^2}}$
6. $(e^x)' = e^x$	14. $(\arccos x)' = -\frac{1}{\sqrt{1-x^2}}$
7. $(\log_a x)' = \frac{1}{x \ln a}$	15. $(\operatorname{arctg} x)' = \frac{1}{1+x^2}$
8. $(\ln x)' = \frac{1}{x}$	16. $(\operatorname{arcctg} x)' = -\frac{1}{1+x^2}$

Правила дифференцирования.

1. $c' = 0, c = \text{const}.$

2. $(u \pm v)' = u' \pm v'.$

3. $(uv)' = u'v + v'u \Rightarrow (cu)' = cu'.$

$$4. \left(\frac{u}{v}\right)' = \frac{u'v - uv'}{v^2} \Rightarrow \left(\frac{c}{v}\right)' = -\frac{cv'}{v^2}.$$

$$5. y = f(u), u = u(x) \Rightarrow y'_x = f'_u u'_x.$$

Уравнение касательной и нормали к графику функции.

Уравнение касательной к графику функции $y = f(x)$ в т. (x_0, y_0) (рис. 36).

$$y = f(x_0) + f'(x_0)(x - x_0).$$

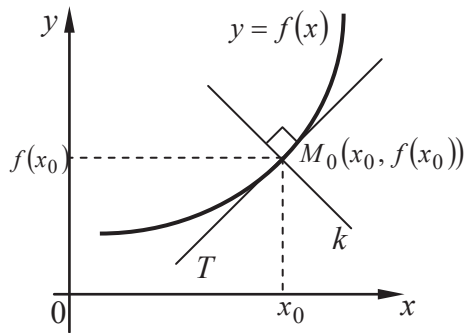


Рис. 36. График функции $y = f(x)$

Условие перпендикулярности двух прямых с угловыми коэффициентами k_1 и k_2 имеет вид $k_1 k_2 = -1 \Rightarrow k_2 = -\frac{1}{k_1}$.

Уравнение прямой проходящей через точку касания (x_0, y_0) перпендикулярно касательной к графику $y = f(x)$ —

$$y - f(x_0) = -\frac{1}{f'(x_0)}(x - x_0).$$

Если функция $s(t)$ задает зависимость пути от времени, то скорость движения будет $v(t) = s'(t)$, а ускорение — $a(t) = v'(t)$.

Исследование функций с помощью производной.

Точки, в которых производная функции равняется нулю, не существует или обращается в бесконечность, называются *критическими*.

Критические точки разбивают область определения функции на интервалы монотонности.

Максимумы и минимумы функции называются ее *экстремумами*.

Необходимым условием существования экстремума функции является равенство нулю ее производной в точке экстремума: $f'(x_0) = 0$ (если в этой точке производная существует). Геометрически это означает, что касательная к графику функции $f(x)$ в точке экстремума параллельна оси x .

Достаточным условием существования экстремума функции в точке x_0 является изменение знака ее производной в этой точке. Так, в точке x_0 максимума функции знак производной изменяется с положительного на отрицательный, что соответствует возрастанию функции до точки максимума при $x < x_0$ и убыванию после нее при $x > x_0$.

Схема построения графиков.

1. Найти область определения функции. Установить точки разрыва.
2. Определить, является ли функция четной (нечетной) и периодической.
3. Определить нули функции $f(x) = 0$.
4. Найти производную функции и ее критические точки, в которых $f'(x) = 0$, не существует или стремится к бесконечности.
5. Определить границы интервалов непрерывности, дифференцируемости и монотонности функции.
6. Вычислить знаки производной на интервалах монотонности и выяснить, на каких из них функция возрастает или убывает. Найти точки экстремума.
7. Построить эскиз графика функции, вычислив ее значения в некоторых точках.

14. ВЕКТОРНАЯ АЛГЕБРА

Вектором называется направленный отрезок с началом в т. A и концом в т. B : $\vec{a} = \overrightarrow{AB}$.

Длиной вектора $\overrightarrow{AB}$ или его модулем $|\overrightarrow{AB}|$ называется расстояние между точками A и B .

Нулевым называется вектор нулевой длины $\vec{0}$.

Векторы называются *равными*, если их длины и направления совпадают.

Суммой векторов $\vec{a}$ и $\vec{b}$ называется вектор $\vec{c}$, геометрически представляемый диагональю параллелограмма, построенного на этих векторах: $\vec{c} = \vec{a} + \vec{b}$ (рис. 37, а).

Разностью векторов $\vec{a}$ и $\vec{b}$ называется вектор $\vec{c}$, в сумме с вектором $\vec{b}$ дающий вектор $\vec{a}$: $\vec{c} = \vec{a} - \vec{b}$ (рис. 37, б).

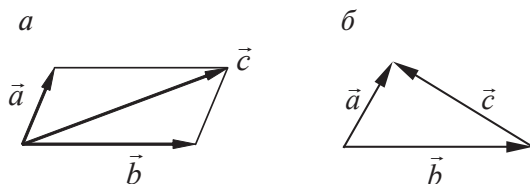


Рис. 37. Сумма (а) и разность (б) векторов

Вектор $(-\vec{b})$ называется противоположным вектору $\vec{b}$, если его длина равна длине вектора $\vec{b}$, а направление противоположно.

Произведением вектора $\vec{a}$ *на число* λ называется вектор $\lambda \cdot \vec{a}$. Геометрически умножение вектора на число приводит к сжатию или растяжению исходного вектора в λ раз.

Линейные операции над векторами обладают следующими свойствами:

$$1) \vec{a} + \vec{b} = \vec{b} + \vec{a};$$

$$2) (\vec{a} + \vec{b}) + \vec{c} = \vec{a} + (\vec{b} + \vec{c});$$

$$5) \lambda \cdot (\vec{a} + \vec{b}) = \lambda \cdot \vec{a} + \lambda \cdot \vec{b};$$

$$6) (\lambda + \mu) \cdot \vec{a} = \lambda \cdot \vec{a} + \mu \cdot \vec{a};$$

$$3) \forall \vec{a}: \vec{a} + \vec{0} = \vec{a};$$

$$7) \lambda \cdot (\mu \cdot \vec{a}) = (\lambda \cdot \mu) \cdot \vec{a};$$

$$4) \forall \vec{a}: \exists -\vec{a}: \vec{a} + (-\vec{a}) = \vec{0};$$

$$8) \forall \vec{a}: 1 \cdot \vec{a} = \vec{a}.$$

Векторы называются коллинеарными, если они лежат на параллельных прямых. Условием коллинеарности двух векторов является равенство $\vec{a} = \lambda \cdot \vec{b}$.

Декартовым базисом на плоскости являются векторы $\vec{i}, \vec{j}$, удовлетворяющие условиям: $\vec{i} \perp \vec{j}, |\vec{i}| = |\vec{j}| = 1$.

$$\overrightarrow{AB} = x \cdot \vec{i} + y \cdot \vec{j} \text{ или } \overrightarrow{AB} = \{x_2 - x_1, y_2 - y_1\}.$$

Координаты единичных векторов, которые называются *ортами системы координат*, равны $\vec{i} = \{1, 0\}, \vec{j} = \{0, 1\}$.

Единичный вектор (орт) в направлении вектора $\vec{a}$ (рис. 38) имеет вид: $\vec{a}_0 = \frac{\vec{a}}{|\vec{a}|}$.

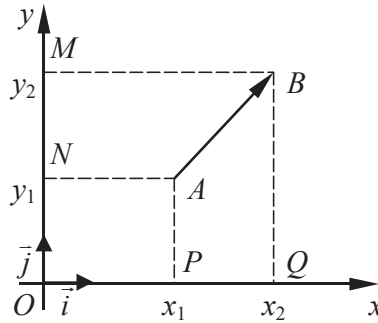


Рис. 38. Единичные векторы

Длина вектора $\overrightarrow{AB}$ равна расстоянию d между точками A и B (рис. 39) и вычисляется по формуле $d = \sqrt{(x_B - x_A)^2 + (y_B - y_A)^2}$.

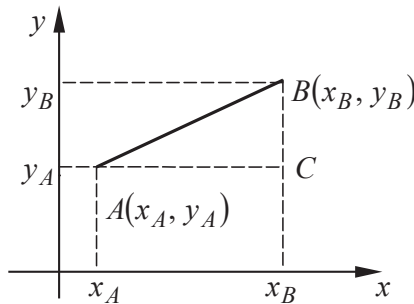


Рис. 39. Длина вектора

Уравнение окружности с центром в точке $C(x_0, y_0)$ и радиусом R имеет вид

$$(x - x_0)^2 + (y - y_0)^2 = R^2.$$

Если центром окружности является начало координат $O(0, 0)$ (рис. 40), то уравнение имеет вид $x^2 + y^2 = R^2$.

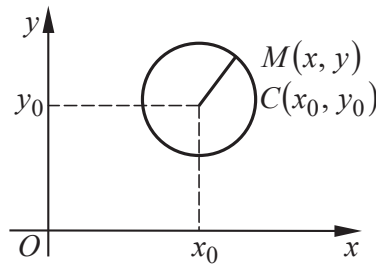


Рис. 40. Окружность

Декартовым базисом в пространстве являются векторы $\{\vec{i}, \vec{j}, \vec{k}\}$, где $\vec{i} = \{1, 0, 0\}$, $\vec{j} = \{0, 1, 0\}$, $\vec{k} = \{0, 0, 1\}$. Вектор $\vec{OA}$ имеет координаты $\{x, y, z\}$, его длина $|\vec{OA}| = \sqrt{x^2 + y^2 + z^2}$. Координаты вектора $\vec{AB}$, у которого начало и конец имеют координаты $A(x_1, y_1, z_1)$ и $B(x_2, y_2, z_2)$ (рис. 41): $\vec{AB} = \{(x_2 - x_1), (y_2 - y_1), (z_2 - z_1)\}$; его длина $|\vec{AB}| = \sqrt{(x_2 - x_1)^2 + (y_2 - y_1)^2 + (z_2 - z_1)^2}$.

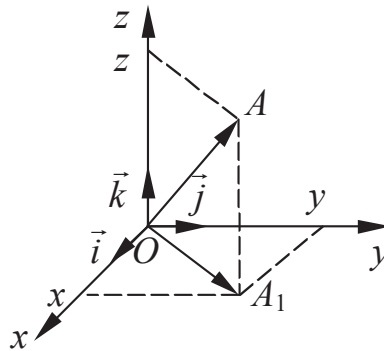


Рис. 41. Орты в пространстве

Условием коллинеарности двух векторов $\vec{a} = \{a_x, a_y, a_z\}$ и $\vec{b} = \{b_x, b_y, b_z\}$ в пространстве является пропорциональность их соответствующих координат.

Из векторного равенства $\vec{a} = \lambda \cdot \vec{b}$ следует, что

$$a_x = \lambda b_x, a_y = \lambda b_y, a_z = \lambda b_z \text{ и } \frac{a_x}{b_x} = \frac{a_y}{b_y} = \frac{a_z}{b_z} = \lambda.$$

Линейным операциям над векторами соответствуют такие же операции над их проекциями: $\vec{a} \pm \lambda \cdot \vec{b} = \{a_x \pm \lambda b_x, a_y \pm \lambda b_y, a_z \pm \lambda b_z\}$.

При сложении векторов, их координаты складываются, а при умножении вектора на число, его координаты умножаются на то же число.

Скалярным произведением векторов $\vec{a}$ и $\vec{b}$ называется число равное произведению их модулей на косинус угла между ними:

$$(\vec{a} \cdot \vec{b}) = |\vec{a}| \cdot |\vec{b}| \cdot \cos \varphi, \quad 0 \leq \varphi \leq \pi.$$

$$(\vec{a} \cdot \vec{b}) = \vec{a} \cdot \text{пр}_a \vec{b} = \vec{b} \cdot \text{пр}_b \vec{a}, \text{ откуда } \text{пр}_b \vec{a} = \frac{(\vec{a} \cdot \vec{b})}{|\vec{b}|} \text{ — проекция вектора } \vec{a} \text{ на на-}$$

$$\text{правление вектора } \vec{b} \text{ и } \cos \varphi = \frac{(\vec{a} \cdot \vec{b})}{|\vec{a}| \cdot |\vec{b}|}.$$

Алгебраические свойства скалярного произведения:

$$\begin{aligned} 1) (\vec{a} \cdot \vec{b}) &= (\vec{b} \cdot \vec{a}); & 2) (\lambda \vec{a}, \vec{b}) &= \lambda \cdot (\vec{a} \cdot \vec{b}); \\ 3) ((\vec{a} + \vec{b}) \cdot \vec{c}) &= (\vec{a} \cdot \vec{c}) + (\vec{b} \cdot \vec{c}); & 4) (\vec{a} \cdot \vec{a}) &= |\vec{a}|^2. \end{aligned}$$

Условием перпендикулярности двух векторов является равенство нулю их скалярного произведения $(\vec{a} \cdot \vec{b}) = 0$, при этом $\cos \varphi = 0 \Rightarrow \varphi = \frac{\pi}{2}$.

Если векторы $\vec{a}$ и $\vec{b}$ заданы своими координатами в декартовом базисе, $\vec{a} = x_1 \cdot \vec{i} + y_1 \cdot \vec{j} + z_1 \cdot \vec{k}$, $\vec{b} = x_2 \cdot \vec{i} + y_2 \cdot \vec{j} + z_2 \cdot \vec{k}$, то скалярное произведение векторов выражается через их координаты следующим образом: $(\vec{a} \cdot \vec{b}) = x_1 x_2 + y_1 y_2 + z_1 z_2$.

Длину вектора и косинус угла между векторами можно вычислить по формулам:

$$|\vec{a}| = \sqrt{(\vec{a} \cdot \vec{a})} = \sqrt{x_1^2 + y_1^2 + z_1^2} \text{ и } \cos \varphi = \frac{x_1 x_2 + y_1 y_2 + z_1 z_2}{\sqrt{x_1^2 + y_1^2 + z_1^2} \cdot \sqrt{x_2^2 + y_2^2 + z_2^2}}.$$

Условием *перпендикулярности* векторов является равенство $(\vec{a} \cdot \vec{b}) = x_1 x_2 + y_1 y_2 + z_1 z_2 = 0$.

15. ПЛАНИМЕТРИЯ

Произвольный треугольник. В произвольном треугольнике $\triangle ABC$ внутренние углы треугольника $\angle A = \alpha$, $\angle B = \beta$, $\angle C = \gamma$; a , b , c — длины сторон $\triangle ABC$; $p = \frac{a+b+c}{2}$ — полупериметр; S — площадь; r и R — радиусы вписанной и описанной окружностей; h_a , β_a , m_a — длины высоты, медианы и биссектрисы, проведенной к стороне a , (рис. 42).

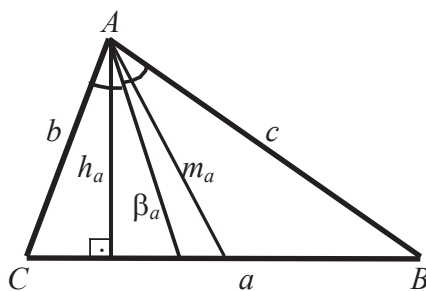


Рис. 42. Произвольный треугольник

В треугольнике против большей стороны лежит больший угол.

Сумма внутренних углов треугольника равна 180° .

Внешний угол треугольника равен сумме двух других внутренних углов треугольника, не смежных с ним.

■ **Теорема синусов.** Стороны треугольника пропорциональны синусам противолежащих углов

$$\frac{a}{\sin \alpha} = \frac{b}{\sin \beta} = \frac{c}{\sin \gamma}.$$

■ **Теорема косинусов.** Квадрат любой стороны треугольника равен сумме квадратов двух других сторон без удвоенного произведения этих сторон на косинус угла между ними

$$a^2 = b^2 + c^2 - 2bc \cos \alpha.$$

Площадь треугольника:

$$S = \sqrt{p(p-a)(p-b)(p-c)}; \quad S = \frac{1}{2}ah_a; \quad S = \frac{1}{2}ab\sin C;$$

$$S = pr; \quad S = \frac{abc}{4R}; \quad S = 2R^2 \sin \alpha \sin \beta \sin \gamma; \quad S = \frac{c^2 \sin \alpha \sin \beta}{2 \sin \gamma}.$$

Биссектриса треугольника. Для любого треугольника существует только одна вписанная окружность. Центр окружности вписанной в треугольник лежит на пересечении его биссектрис.

Биссектриса внутреннего угла треугольника делит противоположную сторону на отрезки пропорциональные прилежащим сторонам.

$$\begin{aligned} r = \frac{S}{p} &= \sqrt{\frac{(p-a)(p-b)(p-c)}{p}} = p \operatorname{tg} \frac{\alpha}{2} \operatorname{tg} \frac{\beta}{2} \operatorname{tg} \frac{\gamma}{2} = (p-c) \operatorname{tg} \frac{\gamma}{2} = \\ &= 4R \sin \frac{\alpha}{2} \sin \frac{\beta}{2} \sin \frac{\gamma}{2}. \\ l_c &= \frac{\sqrt{ab(a+b+c)(a+b-c)}}{a+b} = \frac{2ab \cos(\gamma/2)}{a+b}. \end{aligned}$$

Высота треугольника. Три высоты треугольника или три прямые, на которых лежат высоты, пересекаются в одной точке, которая называется его *ортоцентром*.

Медиана треугольника. Медианы треугольника пересекаются в одной точке и делятся точкой пересечения в отношении 2:1, считая от вершины. Точка пересечения медиан треугольника совпадает с его центром тяжести.

Медиана делит площадь треугольника пополам; длина медианы вычисляется по формуле $m_a = \frac{1}{2} \sqrt{2b^2 + 2c^2 - a^2}$.

Серединные перпендикуляры — перпендикуляры, проведенные через середины сторон треугольника.

Точка O пересечения серединных перпендикуляров — центр описанной окружности; радиус описанной окружности $R = \frac{abc}{4S}$ (рис. 43).

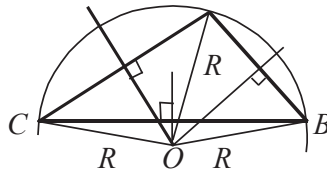


Рис. 43. Медиана треугольника

Прямоугольный треугольник. В прямоугольном треугольнике (рис. 44) a и b — катеты; c — гипотенуза; a_c и b_c — проекции катетов на гипотенузу; $a^2 + b^2 = c^2$ — теорема Пифагора; $S = \frac{1}{2}ab$; $S = \frac{1}{2}ch_c$; $r = \frac{a+b-c}{2}$; $R = \frac{c}{2}$; $h_c^2 = a_c b_c$; $a^2 = ca_c$; $b^2 = cb_c$; $a = c \sin A = c \cos B = b \operatorname{tg} A = b \operatorname{ctg} B$; $ab = ch_c$; $m_c = \frac{1}{2}c = R$.

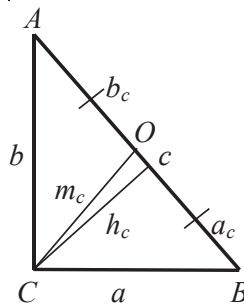


Рис. 44. Прямоугольный треугольник

Равносторонний треугольник. В равностороннем треугольнике (рис. 45) $S = \frac{a^2 \cdot \sqrt{3}}{4}$; $a = R \cdot \sqrt{3}$; $a = 2r \cdot \sqrt{3}$; $r = \frac{a \cdot \sqrt{3}}{6}$; $R = \frac{a \cdot \sqrt{3}}{3}$.

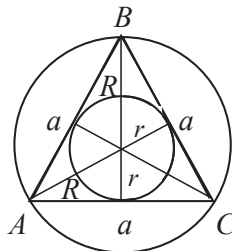


Рис. 45. Равносторонний треугольник

Окружность, круг, сектор круга, сегмент круга. В окружности (рис. 46, а) r — радиус; D — диаметр; C — длина окружности, $C = 2\pi r$; S — площадь круга, $S = \pi r^2$.

Сектор круга (рис. 46, б) — часть круга, ограниченная дугой и двумя радиусами, соединяющими концы дуги с центром круга. На рисунке сектора r — радиус окружности; l — длина дуги, ограничивающей сектор, $l = \frac{\pi r \cdot n^\circ}{180^\circ} = r\theta$; $S_{\text{сект}}$ — площадь сектора, $S_{\text{сект}} = \frac{\pi r^2 \cdot n^\circ}{360^\circ} = \frac{1}{2} r^2 \theta$; n° — градусная мера центрального угла; θ — радианная мера центрального угла.

Сегмент круга, круговой сегмент — часть круга, ограниченная дугой окружности и ее хордой или секущей.

На рисунке сегмента (рис. 46, в) r — радиус круга; c — длина хорды сегмента; s — длина дуги сегмента; h — высота сегмента, также называемая стрелкой сегмента; θ — угол дуги сегмента, выраженный в радианах.

$$S_{\text{сегм}} = S_{\text{АлВ}} = S_{\text{АОВл}} - S_{\Delta \text{АОВ}} = \frac{r^2}{2} (\theta - \sin \theta).$$

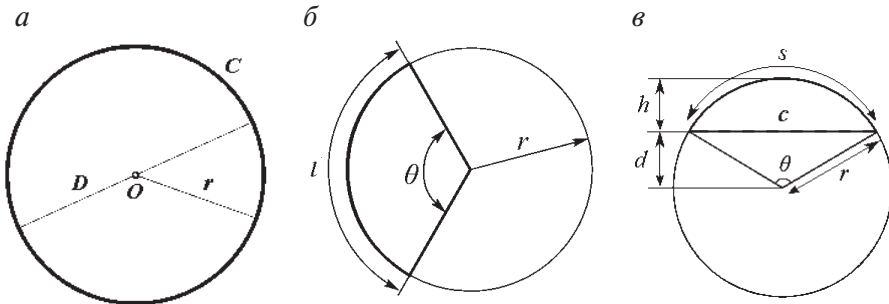


Рис. 46. Окружность, круг (а), сектор (б) и сегмент (в)

■ **Теоремы об углах в окружности.** Центральным углом AOB измеряется градусной мерой дуги, на которую он опирается: $\angle AOB = \overset{\frown}{AB} = \alpha$.

Вписанный в окружность угол ACB равен половине центрального угла AOB , опирающегося на ту же дугу, или дополняет ее до 180° (рис. 47).

Угол CAB между хордой и секущей в ее концевой точке измеряется половиной соответствующего центрального угла AOB (рис. 48).

Углы с вершиной внутри или вне окружности (рис. 49):

$$\angle ABC = \frac{\overset{\frown}{AC} - \overset{\frown}{DE}}{2}; \quad \angle DKM = \frac{\overset{\frown}{DM} + \overset{\frown}{AF}}{2}.$$

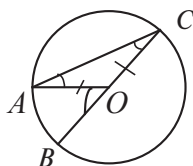


Рис. 47. Вписанный в окружность угол

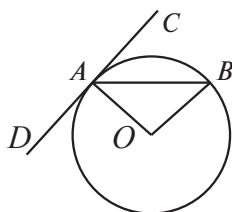


Рис. 48. Угол между хордой и касательной

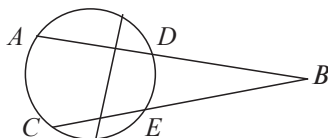


Рис. 49. Углы с вершиной внутри или вне окружности

■ **Теоремы об отрезках хорд или секущих в окружности.** Произведения отрезков пересекающихся хорд (рис. 50) составляют $AS \cdot BS = DS \cdot CS$.

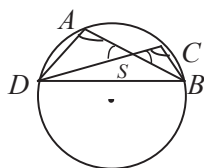


Рис. 50. Произведения отрезков пересекающихся хорд

Квадрат отрезка касательной (рис. 51) равен произведению отрезков секущей, если через точку окружности проведены секущая и касательная $CP^2 = AP \cdot BP$.

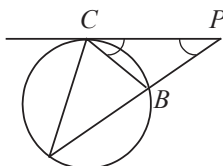


Рис. 51. Квадрат отрезка касательной

Произведения отрезков секущих на их внешние части (рис. 52)
 $AP \cdot BP = DP \cdot EP$.

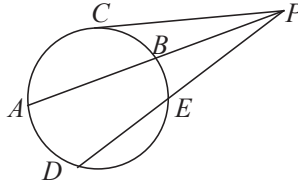


Рис. 52. Произведения отрезков секущих

Произвольный выпуклый четырехугольник. В выпуклом четырехугольнике (рис. 53) d_1 и d_2 — длины диагоналей; φ — угол между ними; S — площадь, $S = \frac{1}{2}d_1d_2 \sin \varphi$; $\angle A + \angle B + \angle C + \angle D = 360^\circ$.

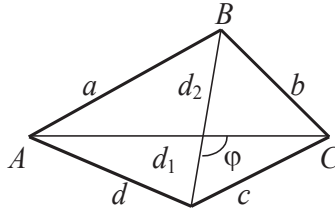


Рис. 53. Произвольный выпуклый четырехугольник

Квадрат. Диагонали квадрата (рис. 54) перпендикулярны и равны между собой $|d_1| = |d_2| = d$, $d_1 \perp d_2$; $S = a^2 = \frac{d^2}{2}$; $r = \frac{a}{2}$; $R = \frac{d}{2}$.

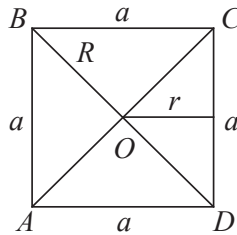


Рис. 54. Квадрат

Параллелограмм. В параллелограмме (рис. 55) a и b — длины смежных сторон параллелограмма $ABCD$; A — величина угла между этими сторонами; h_a — высота, опущенная на сторону a ; d_1 и d_2 — длины диагоналей; S — площадь параллелограмма; $h_a = b \sin A$;

$$d_1^2 = a^2 + b^2 - 2ab \cos \angle ABC; \quad d_1^2 + d_2^2 = 2(a^2 + b^2); \quad S = ah_a; \quad S = ab \sin \angle BAD;$$

$$S = \frac{1}{2} d_1 d_2 \sin \angle AOB; \quad S = \frac{AC^2 - BD^2}{4} \operatorname{tg} A = \frac{AB^2 - AD^2}{2} \operatorname{tg} \angle AOD.$$

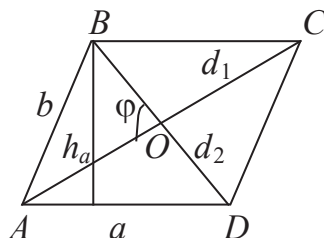


Рис. 55. Параллелограмм

Ромб. В ромбе (рис. 56) $d_1 \perp d_2$; $S = ah_a$; $S = a^2 \sin B$; $S = \frac{1}{2} d_1 d_2$; $r = \frac{h_a}{2}$;
 $d_1^2 + d_2^2 = 4a^2$; O — центр вписанной окружности; $d_1 = 2a \sin \frac{\alpha}{2}$; $d_2 = 2a \cos \frac{\alpha}{2}$,
 $\alpha = \angle ADC$.

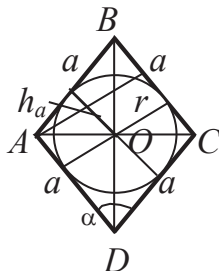


Рис. 56. Ромб

Трапеция. В трапеции (рис. 57) a и b — основания; c и d — боковые стороны; h — высота; d_1 и d_2 — длины диагоналей; l — средняя линия; φ — угол между диагоналями; S — площадь; $l = \frac{a+b}{2}$; $S = \frac{a+b}{2} h$;
 $S = \frac{d_1 d_2}{2} \sin \varphi$.

Если $a + b = c + d$, то в трапецию можно вписать окружность.

Описать окружность можно только в том случае, если $c = d$.

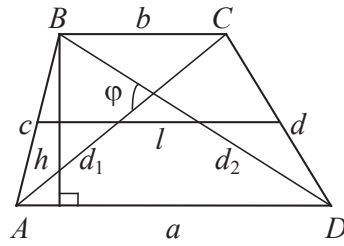


Рис. 57. Трапеция

Многоугольники. В многоугольнике n — число сторон или вершин;
 $(n - 2) \cdot 180^\circ$ — сумма внутренних углов; $\frac{n(n-3)}{2}$ — число диагоналей.

16. СТЕРЕОМЕТРИЯ

Произвольная призма. В призме (рис. 58) l — боковое ребро; P — периметр основания; S — площадь основания; H — высота; $P_{\text{сеч}}$ — периметр перпендикулярного сечения; $S_{\text{сеч}}$ — площадь перпендикулярного сечения, $S_{\text{сеч}} \perp l$; $S_{\text{бок}}$ — площадь боковой поверхности, $S_{\text{бок}} = P_{\text{сеч}} \cdot l$; V — объем, $V = S_{\text{осн}} \cdot H$, $V = S_{\text{сеч}} \cdot l$.

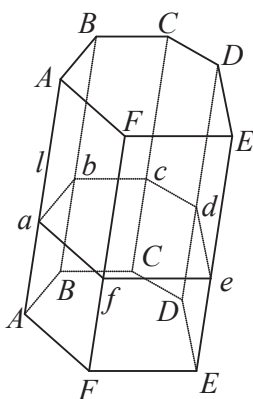


Рис. 58. Призма

Параллелепипед, прямой параллелепипед. В параллелепипеде (рис. 59) $S_{\text{бок}} = P_{\text{сеч}} l$; $ABCD$ — параллелограмм; $V = SH$.

Для прямого параллелепипеда (рис. 59) $S_{\text{бок}} = Pl$; $V = Sl$.

Прямоугольный параллелепипед и куб. В прямоугольном параллелепипеде (рис. 60) $ABCD$ — прямоугольник; $S_{\text{бок}} = 2(a+b)c$; $V = abc$; $d^2 = a^2 + b^2 + c^2$.

В кубе (рис. 60) $ABCD$ — квадрат; $S_{\text{бок}} = 4a^2$; $S_{\text{пов}} = 6a^2$; $V = a^3$; $d = a\sqrt{3}$.

Пирамида. В пирамиде (рис. 61) S — площадь основания; H — высота; V — объем; $S_{\text{бок}}$ — площадь боковой поверхности; α — угол между боковой гранью и плоскостью основания; β — угол между боковым

ребром и плоскостью основания; l — высота боковой грани (для правильной пирамиды — апофема); P — периметр основания; $V = \frac{1}{3} S_{\text{осн}} \cdot H$; $V = \frac{r}{3} (S_{\text{бок}} + S_{\text{осн}})$, где r — радиус вписанного шара.

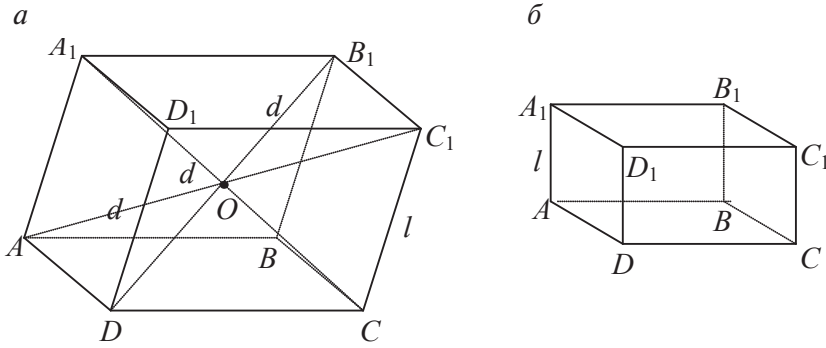


Рис. 59. Параллелепипед (а) и прямой параллелепипед (б)

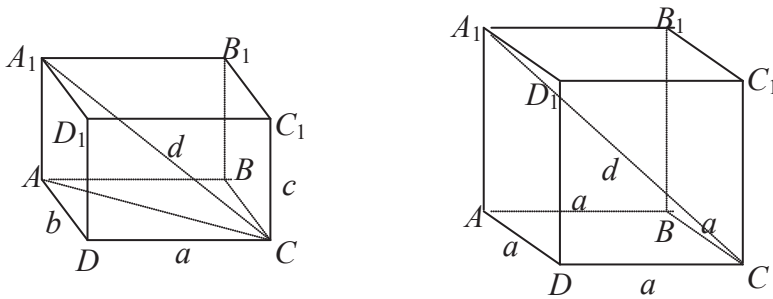


Рис. 60. Прямоугольный параллелепипед (а) и куб (б)

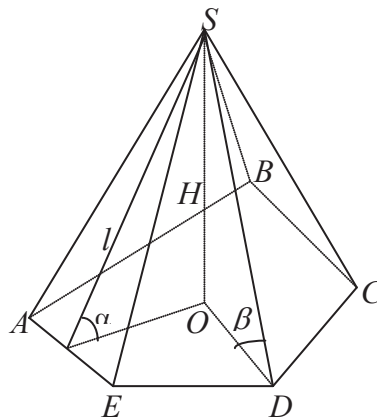


Рис. 61. Произвольная пирамида

Правильная пирамида. Пирамида называется *правильной*, если основанием ее является правильный многоугольник, а вершина проецируется в центр основания.

В правильной пирамиде (рис. 62) $ABCD$ — правильный многоугольник; $S = S_{\text{бок}} \cos \alpha$; $S_{\text{бок}} = \frac{1}{2} Pl$.

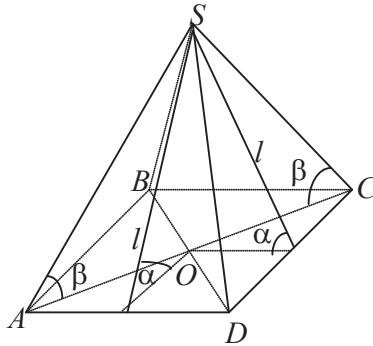


Рис. 62. Правильная пирамида

Правильная усеченная пирамида. В правильной усеченной пирамиде (рис. 63) S_1 и S_2 — площади оснований; h — высота; V — объем; l — апофема; a_1 и a_2 , P_1 и P_2 — стороны и периметры оснований; h_1 , h_2 — высоты пирамид с общей вершиной; $S_{\text{бок}} = \frac{1}{2}(P_1 + P_2)l$;

$$V = \frac{1}{3}h(S_1 + \sqrt{S_1 S_2} + S_2); \frac{S_1}{S_2} = \frac{a_1^2}{a_2^2} = \frac{h_1^2}{h_2^2}.$$

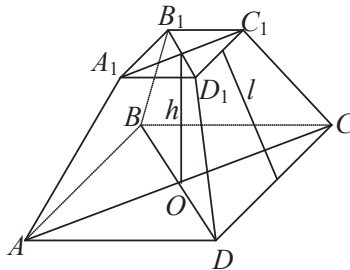


Рис. 63. Усеченная пирамида

Цилиндр. В цилиндре (рис. 64) R — радиус основания; H — высота; $S_{\text{бок}}$ — площадь боковой поверхности, $S_{\text{бок}} = 2\pi RH$; $S_{\text{п}}$ — площадь полной поверхности, $S_{\text{п}} = 2\pi R(R + H)$; V — объем, $V = \pi R^2 H$.

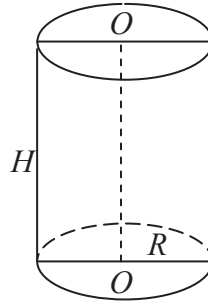


Рис. 64. Цилиндр

Круговой конус. В конусе (рис. 65) R — радиус основания; H — высота; l — образующая; $S_{\text{бок}}$ — площадь боковой поверхности, $S_{\text{бок}} = \pi Rl$; $S_{\text{п}}$ — площадь полной поверхности, $S_{\text{полн}} = \pi R(R + l)$; V — объем, $V = \frac{1}{3} \pi R^2 H$.

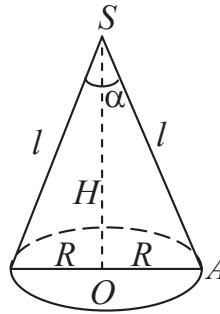


Рис. 65. Конус

Усеченный конус. В усеченном конусе (рис. 66) V — объем, $V = \frac{1}{3} \pi H (R^2 + Rr + r^2)$; $S_{\text{бок}}$ — площадь боковой поверхности, $S_{\text{бок}} = \pi l(R + r)$; $S_{\text{п}}$ — площадь полной поверхности, $S_{\text{п}} = \pi l(R + r) + \pi R^2 + \pi r^2$.

Шар. В шаре (рис. 67) R — радиус шара; S — площадь поверхности шара, $S = 4\pi R^2$; V — объем шара, $V = \frac{4}{3} \pi R^3$.

Шаровой сектор. Шаровой сегмент. Шаровой сектор — геометрическое тело, возникающее при вращении сектора круга вокруг одного из его радиусов, (рис. 68).

$$S_{\text{шар.сект}} = \pi R(2h + a); \quad V_{\text{шар.сект}} = \frac{2}{3} \pi R^2 h,$$

где R — радиус сектора; h — проекция хорды, стягивающей дугу сектора, на ось вращения; a — радиус окружности, образованной концом дуги сектора круга.

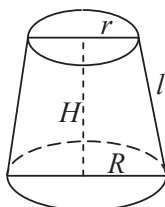


Рис. 66. Усеченный конус

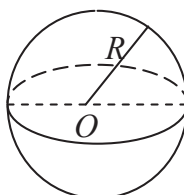


Рис. 67. Шар

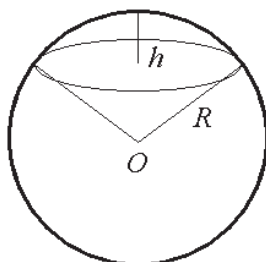


Рис. 68. Шаровой сектор

Шаровой сегмент — часть шара, отсекаемая от него некоторой плоскостью. Поверхностью шарового сегмента является объединение сферического сегмента (части сферы, отсекаемой от нее плоскостью) и круга (основания шарового сегмента), границы которых совпадают.

$$S_{\text{шар.сегм}} = S_{\text{сфер.сегм}} + S_{\text{осн}} = 2\pi Rh + \pi a^2; \quad V_{\text{шар.сегм}} = \pi h^2 \left(R - \frac{1}{3}h \right),$$

где R — радиус шара; h — высота сегмента; a — радиус сечения шара (рис. 69).

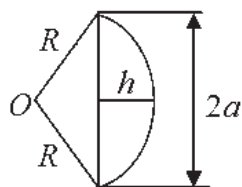


Рис. 69. Осевое сечение шарового сектора

ЗАДАНИЯ ДЛЯ САМОСТОЯТЕЛЬНОЙ РАБОТЫ

Задание 1. Арифметика

Вариант 1

1. Вычислите выражение

$$\left(26,7 - 13\frac{1}{5}\right) : 1,8 + 0,125 \cdot \left(1,88 + 2\frac{3}{25}\right) + 22 \cdot \frac{3}{5,5}.$$

Ответ: 20.

2. Вычислите выражение $\left(\frac{41}{18} - \frac{17}{36}\right) \cdot \frac{18}{65} + \left(\frac{8}{7} - \frac{23}{49}\right) : \frac{99}{49} + \frac{7}{6}.$

Ответ: 2.

3. Вычислите выражение $\frac{\left(2,3 + 5 : \frac{25}{4}\right) \cdot 7}{0,8 \cdot 0,125 + 6,9}.$

Ответ: 3,1.

4. Найдите x из пропорции $\frac{9 \cdot \left(\frac{108}{75} + 0,56\right)}{5x} = \frac{0,25 : \frac{5}{6} - \frac{4}{25}}{\frac{33}{2} - \frac{124}{9}}.$

Ответ: 70.

5. Найдите число, если 8 % его равны 24.

Ответ: 300.

6. Вычислите выражение $\left(8 - 6 \cdot \left(\frac{5}{18}\right)^0\right)^{-2}.$

Ответ: 0,25.

7. Вычислите выражение $(2^{-1/2})^{-6} - (0,125)^{-1} + (2^{1/2})^0.$

Ответ: 1.

8. Вычислите выражение $\frac{3 \cdot 2^7 \cdot 4^5 \cdot \left(\frac{1}{32}\right)^2 + \frac{2^5}{4}}{245}$.

Ответ: 1,6.

9. Вычислите выражение $\sqrt[3]{\frac{12}{\sqrt{2}}} \cdot \sqrt{\frac{63^2 - 27^2}{5}}$.

Ответ: 6.

10. Вычислите выражение $\frac{(10^{1/3} - 7^{1/3})(\sqrt[3]{100} + \sqrt[3]{70} + \sqrt[3]{49})}{(3 \cdot \sqrt{16} - 3 \cdot \sqrt{6})^2 \left(\frac{\sqrt{16}}{3} + \frac{\sqrt{6}}{3}\right)^2}$.

Ответ: 0,03.

Вариант 2

1. Вычислите выражение $\left(4\frac{1}{8} - 0,004 \cdot 300\right) : 29,25 + \left(4\frac{1}{5} - 3\frac{1}{2}\right) : 70$.

Ответ: 0,11.

2. Вычислите выражение $\frac{10}{16} + \frac{3}{2} \left(\frac{17}{4} : 17\right) + 3,75 : \frac{5}{6}$.

Ответ: 5,5.

3. Вычислите выражение $\frac{\left(\frac{16}{5} - 1,7\right) : 0,05}{\left(\frac{33}{20} - 1,5\right) : 1,5}$.

Ответ: 300.

4. Найдите x из пропорции: $\frac{\left(\frac{94}{50} + \frac{53}{25}\right) \cdot \frac{3}{16}}{\frac{5}{72} - \frac{13}{18} \cdot \frac{1}{26}} = \frac{x}{\frac{2}{15} + 7,7 : \frac{99}{4}}$.

Ответ: 8.

5. Найдите число, если 140 % его равны 182.

Ответ: 130.

6. Вычислите: $\left(2^{-3} + \left(\frac{3}{4}\right)^{-4} \cdot \left(\frac{1}{2}\right)^2\right) : \left(\left(\frac{1}{6}\right)^0 - 12 \cdot 3^{-3}\right) \cdot 18$.

Ответ: 29,65.

7. Вычислите: $\left(\left(3^{-1/4} \right)^8 + \left(\frac{3}{2} \right)^0 \right)^{-2}$.

Ответ: 0,81.

8. Вычислите: $\frac{\left(\frac{7}{16} \right)^2 \cdot 56^4 \cdot \left(\frac{1}{49} \right)^2 - 160}{\left(\frac{1}{13} \right)^{-1}}$.

Ответ: 48.

9. Вычислите: $\sqrt[3]{\frac{12}{25}} \cdot \sqrt{15(38^2 - 23^2)}$.

Ответ: 0,4.

10. Вычислите: $\frac{(7 \cdot \sqrt{27} - 7 \cdot \sqrt{8})(27^{1/2} + 8^{1/2})}{27^2 - 64}$.

Ответ: 0,2.

Задание 2. Алгебра

Вариант 1

1. Упростите выражение $\frac{a^3 + 3a^2b + 3ab^2 + b^3}{a^2 - b^2}$.

Ответ: $\frac{(a+b)^2}{a-b}$.

2. Выполните действия: $\frac{a^2 + 4a + 2}{a} - a - \frac{2}{a}$.

Ответ: 4.

3. Выполните действия: $\frac{x}{a^2 + ax} + \frac{1}{a + x}$.

Ответ: $\frac{1}{a}$.

4. Выполните действия: $\frac{b^2}{a^2 + ab + b^2} + \frac{4a^2b - ab^2}{b^3 - a^3} + \frac{a}{a - b}$.

Ответ: $\frac{(b-a)^2}{a^2 + ab + b^2}$.

5. Выполните действия: $\frac{9a}{(3-a)^2} - 1 : \left(\frac{a}{a-3} + \frac{12a^2 - 9a}{27 - a^3} + \frac{9}{a^2 + 3a + 9} \right)$.

Ответ: -1 .

6. Выполните действия: $\frac{1 + (a+x)^{-1}}{1 - (a+x)^{-1}} \left(1 - \frac{1 - (a^2 + x^2)}{2ax} \right)$.

Ответ: $\frac{(a+x+1)^2}{2ax}$.

7. Выполните действия: $\left(\frac{a^{1,5} + b^{1,5}}{a^{0,5} + b^{0,5}} - a^{0,5} b^{0,5} \right) : (a-b) + \frac{2b^{0,5}}{a^{0,5} + b^{0,5}}$.

Ответ: 1 .

8. Выполните действия: $\left(\frac{1}{a - \sqrt{b}} + \frac{1}{a + \sqrt{b}} \right) : \frac{a}{a^2 - b}$.

Ответ: 2 .

9. Упростите выражение

$$(m\sqrt{m^3} + 5\sqrt{m^3} + m \cdot \sqrt{18} + 15 \cdot \sqrt{2}) : \left(\frac{3m+15}{2\sqrt{m^3} - 6 \cdot \sqrt{2}} \right)$$

и вычислите его при $m = 3$

Ответ: 6 .

10. Упростите выражение $\frac{\sqrt{a^3} + a \cdot \sqrt{18} + 6\sqrt{a} + 2 \cdot \sqrt{2}}{\sqrt{a^3} + 2\sqrt{a} + a \cdot \sqrt{2} + \sqrt{8}} - 1$ и вычислите его при $a = 2$.

Ответ: 1 .

Вариант 2

1. Упростите выражение $\frac{(a^2 - b^2)(a^2 - ab + b^2)}{a - b}$.

Ответ: $a^3 + b^3$.

2. Выполните действия: $\frac{b^2 + 2b - 3}{b - 1} - b$.

Ответ: 3 .

3. Выполните действия: $\frac{a^2 - b^2}{a - b} - \frac{a^3 - b^3}{a^2 - b^2}$.

Ответ: $\frac{ab}{a+b}$.

4. Выполните действия: $\frac{1}{x^2 + 3xy} + \frac{2}{9y^2 - x^2} + \frac{1}{2x - 6y}$.

Ответ: $\frac{x-2}{2x(x-3y)}$.

5. Выполните действия: $\left(\frac{c+5}{5c-1} + \frac{c+5}{c+1}\right) : \frac{c^2+5c}{1-5c} + \frac{c^2+5}{c+1}$.

Ответ: $c - 1$.

6. Выполните действия: $\frac{(x^2 - b^2)^{-1} + (x^2 + b^2)^{-1}}{(x^2 - b^2)^{-1} - (x^2 + b^2)^{-1}} - \frac{1}{2} \left(\frac{b^2}{x^2}\right)^{-1}$.

Ответ: $\frac{x^2}{2b^2}$.

7. Выполните действия: $\left(\frac{1-a^{-1/2}}{1+a^{-1/2}} + \frac{1+a^{-1/2}}{1-a^{-1/2}}\right) : \frac{a+1}{a-1}$.

Ответ: 2.

8. Выполните действия: $\left(\frac{\sqrt{a+x} + \sqrt{a-x}}{\sqrt{a+x} - \sqrt{a-x}} + 1\right) : \frac{1}{(\sqrt{a+x} - \sqrt{a-x})\sqrt{a+x}}$.

Ответ: $2(a+x)$.

9. Упростите выражение $\frac{\sqrt[3]{n\sqrt{n}} + \sqrt{n\sqrt[3]{n}}}{4n\sqrt{n}(1+\sqrt[6]{n})}$ и вычислите его при $n = \frac{5}{64}$.

Ответ: 3,2.

10. Упростите выражение $\left(\left(\sqrt{a^3 \cdot 3^{-3}} - \sqrt{27a^{-3}}\right) : \left(\frac{a^2+9}{3a} + 1\right)\right) \frac{(a-3)^{-1}}{(6a^3)^{-1/2}}$

и вычислите его при $a = 18 \cdot \sqrt{2}$.

Ответ: 36.

Задание 3. Функции и их графики

Вариант 1

Постройте графики функций.

1. $y = 2 - x$.

2. $y = x^2 + 2x + 3$.

3. $y = 1 - \frac{2}{x}$.
4. $y = \sqrt{x^3}$.
5. $y = \sqrt[3]{x}$.
6. $y = \left(\frac{1}{3}\right)^{\frac{x}{2}}$.
7. $y = \log_2\left(\frac{x}{2}\right)$.
8. $y = \sin 2x$.
9. $y = 2 + \operatorname{ctg} x$.
10. $y = \arccos x$.

Вариант 2

Постройте графики функций.

1. $y = 2x - 1$.
2. $y = 2(x - 3)^2$.
3. $y = \frac{3x + 4}{x - 1}$.
4. $y = \sqrt[3]{x^4}$.
5. $y = x^{2/3}$.
6. $y = 3^{2x}$.
7. $y = 2 \log_{(1/2)} x$.
8. $y = 3 \cos\left(\frac{x}{2}\right)$.
9. $y = \operatorname{tg} 3x$.
10. $y = \operatorname{arctg} x$.

Задание 4. Многочлены**Вариант 1**

1. Выполните умножение и приведите подобные члены в выражении $(a + 5)(a^2 - 5a + 25)$.

Ответ: $a^3 + 125$.

2. Выполните умножение и приведите подобные члены в выражении $5a(2x-3)-3x(2x-3)+(3-2x)$.
 Ответ: $(2x-3)(5a-3x-1)$.
3. Вставьте в выражение $(\otimes x+3)^2=4x+\langle \rangle x+9$ нужные числа вместо символов.
 Ответ: $\otimes = \pm 2$; $\langle \rangle = \pm 12$.
4. Разложите на множители выражение $(2c+1)^3-27$.
 Ответ: $2(c-1)(4c^2+10c+13)$.
5. Выделите полный квадрат в выражении x^2-2x+5 .
 Ответ: $(x-1)^2+4$.
6. Разделите многочлены $(-2x+x^2-x+2x^3):(x+1)$.
 Ответ: $2x^2-x-1$.
7. Найдите значение коэффициента при x^2 в выражении $(x-2)(2-3x)(2x+5)+2(x^2-1)$.
 Ответ: 3.
8. Найдите значение a , при котором равенство $\frac{8x-35a-3}{15a}=\left(\frac{7}{3}+\frac{1}{5a}\right)(x-1)+\frac{x}{3}$ верно для всех x .
 Ответ: 0,125.
9. Найдите значения a и b , при которых равенство $(3x+4)^2=(3b-4a)x^2+\frac{12}{b}(17-a)x+16$ является верным для всех x .
 Ответ: 3; 7.
10. Найдите числа A , B , C , при которых справедливо равенство $\frac{1}{x(x-1)(x+2)}=\frac{A}{x}+\frac{B}{x-1}+\frac{C}{x+2}$.
 Ответ: $-\frac{1}{2}$; $\frac{1}{3}$; $\frac{1}{6}$.

Вариант 2

1. Выполните умножение и приведите подобные члены в выражении $(2b-1)(1+2b+4b^2)$.
 Ответ: $8b^3-1$.
2. Выполните умножение и приведите подобные члены в выражении $135a^{12}x^8+90a^{10}x^{11}-36a^6x^{16}$.
 Ответ: $9a^6x^8(15a^4+10a^4x^3-4x^8)$.

3. Вставьте в выражение $(3x + \otimes)^2 = 9x^2 + \frac{1}{2}x + \langle \rangle$ нужные числа вместо символов.

Ответ: $\otimes = \frac{1}{12}$, $\langle \rangle = \frac{1}{144}$.

4. Разложите на множители выражение $(p-2)^3 + 27$.

Ответ: $(p+1)(p^2 - 7p + 19)$.

5. Выделите полный квадрат в выражении $a^2 + \frac{1}{2}a + 3$.

Ответ: $\left(a + \frac{1}{4}\right)^2 + \frac{47}{4}$.

6. Разделите многочлены $(1 - x^2 - 3x + 6x^3) : (2x - 1)$.

Ответ: $3x^2 + x - 1$.

7. Найдите значение коэффициента при x^2 в выражении $\left(x - \frac{1}{4}\right)(4x - 2) + (1 - x)(2x + 5)x$.

Ответ: 1.

8. Найдите значение a , при котором равенство $(2x + 5)(2a + 7) = (6a + 1)x + 10a + 35$ верно для всех x .

Ответ: 6,5.

9. Найдите значения a и b , при которых равенство $(x + 7)(x + 8) = x^2 + (4a + b)x + 2a - b + 56$ является верным для всех x .

Ответ: 2,5; 5.

10. Найдите числа A , B , C , при которых справедливо равенство:

$$\frac{x}{(x-1)(x+2)(x+3)} = \frac{A}{x-1} + \frac{B}{x+2} + \frac{C}{x+3}.$$

Ответ: $\frac{1}{12}$; $\frac{2}{3}$; $-\frac{3}{4}$.

Задание 5. Рациональные уравнения и системы

Вариант 1

1. Решите уравнение $\frac{71-3x}{6x-9} = \frac{1}{3}$.

Ответ: 14,8.

2. Найдите меньший корень уравнения $24x(x+1) = 4x^2 - 7$.

Ответ: -0,7.

3. Решите уравнение $\frac{2}{x} - 15 = 8x$.

Ответ: -2; 0,125.

4. Решите уравнение $\frac{ax-b}{a+b} + \frac{a+bx}{a-b} = \frac{(a+b)^2}{a^2-b^2}$.

Ответ: $\frac{2ab}{a^2+b^2}$.

5. Решите уравнение $3 + \frac{27}{x} + x^2 + \frac{81}{x^3} = 0$.

Ответ: -3.

6. Решите уравнение $(x+0,5)(x^2-9) = (2x+1)(x+3)^2$.

Ответ: -9; -3; -0,5.

7. Решите уравнение $\frac{x^3-8}{2x-4} = 12x-8$.

Ответ: 20.

8. Решите систему уравнений $\begin{cases} 2x+11y=-2, \\ x-3y=-1. \end{cases}$

Ответ: (-1; 0).

9. Решите систему уравнений $\begin{cases} 7x+24y=65, \\ \frac{3}{4x+13} - \frac{1}{y} = 0. \end{cases}$

Ответ: (-1; 3).

10. Решите систему уравнений $\begin{cases} x+y+z=1, \\ 2x+2y+z=1, \\ x+3y+2z=3. \end{cases}$

Ответ: (-0,5; 0,5; 1).

Вариант 2

1. Решите уравнение $\frac{17}{5x} = 2 - \frac{7}{x}$.

Ответ: 5, 2.

2. Найдите меньший корень уравнения $61x(x+1) = 31x^2 - 30$.

Ответ: -1, 2.

3. Решите уравнение $1 - \frac{15}{x} = \frac{16}{x^2}$.

Ответ: -1; 16.

4. Решите уравнение $\frac{5}{b+3} - \frac{x}{3-b} = \frac{6x}{b^2-9}$.

Ответ: -5.

5. Решите уравнение $4x^4 + 3x^3 + 32x + 24 = 0$.

Ответ: -2; -0,75.

6. Решите уравнение $(x^2 - 0,01)(2x - 5) = (x - 2,5)(x + 0,1)^2$.

Ответ: -0,1; 0,3; 2,5.

7. Решите уравнение $\frac{x^4 - 256}{16 - x^2} = 2(7x + 12)$.

Ответ: -10.

8. Решите систему уравнений $\begin{cases} 15x + 2y = 2, \\ 13x - 3y = -3. \end{cases}$

Ответ: (0; 1).

9. Решите систему уравнений $\begin{cases} \frac{1}{x} + \frac{8}{191 - 35y} = 0, \\ 19x + 12y = 22. \end{cases}$

Ответ: (-2; 5).

10. Решите систему уравнений $\begin{cases} 4x - 7y + 8z = 0, \\ x - 2y - z = -3, \\ 6x + 2y + 3z = -9. \end{cases}$

Ответ: (-2; 0; 1).

Задание 6. Уравнения и неравенства содержащие знак модуля

Вариант 1

1. Решите уравнение $|5 - 4x| = 1$.

Ответ: 1; 1,5.

2. Найдите целочисленные решения уравнения $x^2 - 3x + 2|x - 2| = 0$.

Ответ: 1.

3. Решите неравенство $|0,5 - x| < 3$.

Ответ: $(-2,5; 3,5)$.

4. Найдите наибольшее целое x удовлетворяющее неравенству $|5x - 3| > 6x - 2$.

Ответ: 0.

5. Найдите наименьшее целое x удовлетворяющее неравенству $\frac{2x+5}{|x+1|} > 1$.

Ответ: 0.

6. Решите неравенство $1 \leq |x - 1| \leq 3$.

Ответ: $x \in [-2, 0] \cup [2, 4]$.

Вариант 2

1. Решите уравнение $|2 - 5x| = 16$.

Ответ: $-2,8; 3,6$.

2. Найдите целочисленные решения уравнения $x^2 + 2 - |x - 3| - 5x = 0$.

Ответ: 5.

3. Решите неравенство $|x - 3| < 1$.

Ответ: $(2; 4)$.

4. Найдите наибольшее целое x удовлетворяющее неравенству $|x - 3| > 2x$.

Ответ: 0.

5. Найдите наименьшее целое x удовлетворяющее неравенству $\frac{3x-4}{|x-3|} > 2$.

Ответ: 4.

6. Решите неравенство $2 \leq |x+1| \leq 4$.

Ответ: $x \in [-5, -3] \cup [1, 3]$.

Задание 7. Иррациональные уравнения и системы

Вариант 1

Решите уравнения.

1. $\sqrt{x+1} + \sqrt{2} = \sqrt[4]{2}$.

Ответ: -1.

2. $\sqrt{\frac{9-5x}{3-8x}} = \frac{1}{\sqrt{2}}$.

Ответ: 5.

3. $\sqrt{x+2} = 2 + \sqrt{x-6}$.

Ответ: 7.

4. $(x^2 + 4x)\sqrt{x-3} = 0$.

Ответ: 3.

5. $\sqrt{x+1} = 11 - x$.

Ответ: 8.

6. $2\sqrt{x+1} - \frac{4}{\sqrt{x+1}} + 7 = 0$.

Ответ: -0,75.

7. $\frac{8}{\sqrt{10-x}} - \sqrt{10-x} = 2$.

Ответ: 6.

8. $\sqrt{|x-7|} = x-1$.

Ответ: 3.

9. $\sqrt{4x^2 - 1} + x = |x - 2|.$

Ответ: 0,625.

10. Решите систему уравнений $\begin{cases} \sqrt{x} + \sqrt{x + y} = 4, \\ y - x = 7. \end{cases}$

Ответ: (1; 8).

Вариант 2

Решите уравнения.

1. $\sqrt{\sqrt{3} - x} = \sqrt[4]{3}.$

Ответ: 0.

2. $\sqrt{\frac{4 - x}{x + 2}} = \frac{1}{\sqrt{3}}.$

Ответ: 2,5.

3. $\sqrt{x} + \sqrt{25 - x} = 5.$

Ответ: 0; 25.

4. $(x^2 - 1)\sqrt{2x + 1} = 0.$

Ответ: -0,5; 1.

5. $\sqrt{4 - x} = x + 2.$

Ответ: 0.

6. $10\sqrt{x + 3} + 17 = \frac{6}{\sqrt{x + 3}}.$

Ответ: -2,91.

7. $\sqrt{x + 3} + \frac{4}{\sqrt{x + 3} + 3} = 2.$

Ответ: -2.

8. $\sqrt{|x - 10|} = x + 2.$

Ответ: 1.

9. $\sqrt{1 - x^2} - x = |2x + 1|.$

Ответ: 0; 0,6.

10. Решите систему уравнений $\begin{cases} \sqrt{2x + y + 1} - \sqrt{x + y} = 1, \\ 3x + 2y = 4. \end{cases}$

Ответ: (2; -1).

Задание 8. Свойства логарифмов

Вариант 1

Вычислите выражения.

1. $\log_2 0,25$.

Ответ: -2 .

2. $\log_3^2 9$.

Ответ: 4 .

3. $\log_2 27 - 2\log_2 3 + \log_2 \frac{2}{3}$.

Ответ: 1 .

4. $2^{\log_{\sqrt{2}} 5}$.

Ответ: 25 .

5. $\log_{\sqrt{2}} \log_{1/3} \frac{1}{9}$.

Ответ: 2 .

6. $27^{\frac{1}{3\log_{16} 81}}$.

Ответ: 2 .

7. $\log_{1/4} (\log_2 3 \cdot \log_3 4)$.

Ответ: $-0,5$.

Вариант 2

Вычислите выражения.

1. $\log_{1/9} 3$.

Ответ: $-0,5$.

2. $\log_2^3 8$.

Ответ: 27 .

3. $\log_6 34 - \log_6 17 + \log_6 18$.

Ответ: 2 .

4. $6^{\log_{1/\sqrt{6}} 2}$.

Ответ: $0,25$.

5. $\log_9 \log_4 (\sqrt[3]{4})$.

Ответ: $-0,5$.

$$6. \quad 3^{\frac{3}{\log_{\left(\frac{3}{\sqrt[3]{6}}\right)} 3}}.$$

Ответ: 6.

$$7. \quad 0,8(1+9^{\log_3 8})^{\log_{65} 5}.$$

Ответ: 4.

Задание 9. Логарифмические уравнения

Вариант 1

Решите уравнения.

$$1. \quad \left(\frac{49}{16}\right)^{x+1} = \left(\frac{4}{7}\right)^9.$$

Ответ: $-5,5$.

$$2. \quad 2^{x-1} = 2\sqrt{2}.$$

Ответ: $2,5$.

$$3. \quad 7^{x-1} - 6^{2-2x} = 0.$$

Ответ: 1.

$$4. \quad 8 \cdot 3^x = 243 \cdot 2^{x-2}.$$

Ответ: 5.

$$5. \quad 9^x - 75 \cdot 3^{x-1} - 54 = 0.$$

Ответ: 3.

$$6. \quad \log_4 2x = \frac{1}{2}.$$

Ответ: 1.

$$7. \quad \log_{0,5}(3x+1) = -2.$$

Ответ: 1.

$$8. \quad \log_2 \sqrt{x-1} = 1.$$

Ответ: 3.

$$9. \quad \log_{\frac{12-x}{x}} 3 - 1 = 0.$$

Ответ: 3.

$$10. \quad \log_2(x^2 + 4x + 11) = \log_{0,5} 0,125.$$

Ответ: $-3; -1$.

Вариант 2

Решите уравнения.

1. $\left(\frac{3}{5}\right)^{2x} = \left(\frac{25}{9}\right)^{-3}.$

Ответ: 3.

2. $5^{2-x} = 125.$

Ответ: -1.

3. $5^{3x} - 7^{-2x} = 0.$

Ответ: 0.

4. $\sqrt{17^{x-1}} = 102 \cdot 6^{x-4}.$

Ответ: 3.

5. $4^{x+1} - 15 \cdot 2^{x-1} - 1 = 0.$

Ответ: -3.

6. $\log_{1/4} x = -2.$

Ответ: 16.

7. $\log_3(2-x) = 2.$

Ответ: -7.

8. $\log_{1/3} \sqrt[3]{x+1} = -1.$

Ответ: 26.

9. $\log_{8-x} 11 - 0,5 = 0.$

Ответ: -113.

10. $\log_3(2x^2 + 5x + 6) = \lg 100.$

Ответ: 0,5; -3.

Задание 10. Рациональные и иррациональные неравенства**Вариант 1**

1. Найдите наибольшее целое x удовлетворяющее неравенству
$$\frac{2x+1}{3} - \frac{3x-1}{2} > 1.$$

Ответ: -1.

2. Найдите целочисленные решения неравенства $\frac{6x-5}{4x+1} < 0$.
 Ответ: 0.
3. Найдите целочисленные решения неравенства $2x^2 - 9x + 4 < 0$.
 Ответ: 1; 2; 3.
4. Решите неравенство $\frac{1}{x} > \frac{1}{3}$.
 Ответ: (0; 3).
5. Решите неравенство $\frac{7}{x} - \frac{x}{7} > 0$.
 Ответ: $(-\infty, -7) \cup (0; 7)$.
6. Найдите наименьшее целое x удовлетворяющее условию $\sqrt{x} > 2$.
 Ответ: 5.
7. Решите неравенство $\sqrt{4+2x} < 1,5$.
 Ответ: $[-2; -0,875]$.
8. Решите неравенство $\sqrt{14-x} > 2-x$.
 Ответ: $(-2; 14]$.

Вариант 2

1. Найдите наибольшее целое x удовлетворяющее неравенству $\frac{9x+2}{10} - \frac{10x-2}{9} > 2$.
 Ответ: -8.
2. Найдите целочисленные решения неравенства $\frac{2x-3}{x+1} < 0$.
 Ответ: 0; 1.
3. Найдите целочисленные решения неравенства $x^2 - 6x + 5 < 0$.
 Ответ: 2; 3; 4.
4. Решите неравенство $\frac{2}{2x+3} > \frac{1}{4}$.
 Ответ: $(-1,5; 2,5)$.
5. Решите неравенство $\frac{x}{2} < \frac{8}{x}$.
 Ответ: $(-\infty, -4) \cup (0; 4)$.

6. Найдите наименьшее целое x удовлетворяющее условию $\sqrt{2-2x} < 1$.
Ответ: 1.
7. Решите неравенство $\sqrt{x-0,5} < 1$.
Ответ: $[0,5; 1,5]$.
8. Решите неравенство $2\sqrt{x-1} > x-4$.
Ответ: $[1; 10]$.

Задание 11. Показательные и логарифмические неравенства

Вариант 1

1. Найдите наименьшее целое x удовлетворяющее неравенству $2^{-x} < \sqrt{2}$.
Ответ: 0.
2. Найдите наибольшее целое x удовлетворяющее неравенству $3^{2x} < \sqrt[3]{3}$.
Ответ: 0.
3. Найдите наибольшее целое x удовлетворяющее неравенству $3 \cdot 5^{x+1} + 6 \cdot 5^{-(x+1)} < \frac{81}{5^{x+1}}$.
Ответ: -1 .

Решите следующие неравенства.

4. $\left(\frac{3}{4}\right)^{6x+10-x^2} < \frac{27}{64}$.

Ответ: $(-1; 7)$.

5. $\left(\frac{2}{5}\right)^{\frac{6-5x}{2+5x}} > \frac{25}{4}$.

Ответ: $(-2; -0,4)$.

6. Найдите наименьшее целое x удовлетворяющее неравенству $\lg 3^{x-1} - \lg 3^{2x+4} < \lg 3$.
Ответ: -5 .

7. Найдите наибольшее целое x удовлетворяющее неравенству $\log_{3,1}(2x-8) - \log_{3,1} 6 < 0$.

Ответ: 6.

8. Найдите целые числа x , при которых выполняется неравенство $\log_{1/2}(2x-1) + \log_{1/2} 12 > \log_{1/2} 10 + \log_{1/2} 6$.

Ответ: 1; 2.

Решите неравенства.

9. $\log_{1/5}(x-5) > -2$.

Ответ: (5; 30).

10. $\log_5(x+1) < 2$.

Ответ: (-13; 12).

Вариант 2

1. Найдите наименьшее целое x удовлетворяющее неравенству $\left(\frac{1}{7}\right)^{-x/3} > 7$.

Ответ: 4.

2. Найдите наибольшее целое x удовлетворяющее неравенству $4^{x/3} < 16$.

Ответ: 5.

3. Найдите наибольшее целое x удовлетворяющее неравенству $162 \cdot 3^{5-x} - 2 \cdot 3^{x-5} > 0$.

Ответ: 6.

Решите следующие неравенства.

4. $\left(\frac{1}{3}\right)^{x^2+2x} > \left(\frac{1}{9}\right)^{16-x}$.

Ответ: (-8; 4).

5. $\left(\frac{1}{5}\right)^{\frac{2x+1}{1-x}} > \left(\frac{1}{5}\right)^{-3}$.

Ответ: (1; 4).

6. Найдите наименьшее целое x удовлетворяющее неравенству $\lg 8 + \lg 20 < \lg 5 + \lg 2^{2x-5}$.

Ответ: 6.

7. Найдите наибольшее целое x удовлетворяющее неравенству $\log_2 \left(4 - \frac{x}{2} \right) - \log_2 8 < 0$.

Ответ: 7.

8. Найдите целые числа x , при которых выполняется неравенство $\log_{2/3}(3x+6) > \log_{2/3} 3 + 2\log_{2/3} 2$.

Ответ: $-1; 0; 1$.

Решите неравенства.

9. $\log_{1/9}(x+3) > -0,5$.

Ответ: $(-3; 0)$.

10. $\log_3(x+20) < 3$.

Ответ: $(-20; 7)$.

Задание 12. Тригонометрия

Вариант 1

Решите уравнения.

1. $\cos x = -1$.

Ответ: $\pi + 2\pi k, k \in \mathbb{Z}$.

2. $\sin x = 1/2$.

Ответ: $\frac{\pi}{6} + 2\pi k; \frac{5\pi}{6} + 2\pi k, k \in \mathbb{Z}$.

3. $\operatorname{tg} x = \sqrt{3}$.

Ответ: $\frac{\pi}{3} + \pi k, k \in \mathbb{Z}$.

4. Найдите решения уравнения $\sin(\pi(x-2)) = 0$, $0 < x < 4$ на заданном промежутке.

Ответ: 1; 2; 3.

5. Найдите решения уравнения $\sqrt{3} + 2\cos\frac{\pi x}{9} = 0$, $8 < x < 20$ на заданном промежутке.

Ответ: 10,5.

Решите уравнения.

6. $\left| \operatorname{tg} \frac{x}{2} \right| = 1.$

ОТВЕТ: $\frac{\pi}{2} + \pi k, k \in Z.$

7. $\cos^2 x = \frac{1}{2}.$

ОТВЕТ: $\frac{\pi}{4} + \frac{\pi k}{2}, k \in Z.$

8. $2\cos^2 x + 5\sin x - 4 = 0.$

ОТВЕТ: $\frac{\pi}{6} + 2\pi k, \frac{5\pi}{6} + 2\pi n, k, n \in Z.$

9. $\sin 2x = \sin 3x.$

ОТВЕТ: $2\pi k, \frac{\pi}{5} + \frac{2\pi n}{5}, k, n \in Z.$

Решите неравенства.

10. $\cos x < -\frac{\sqrt{3}}{2}.$

ОТВЕТ: $\left(2\pi k + \frac{5\pi}{6}; 2\pi k + \frac{7\pi}{6} \right), k \in Z.$

11. $\operatorname{tg} x < 1.$

ОТВЕТ: $\left(\pi k - \frac{\pi}{2}, \pi k + \frac{\pi}{4} \right), k \in Z.$

Вариант 2

Решите уравнения.

1. $\cos x = 1.$

ОТВЕТ: $2\pi k, k \in Z.$

2. $\operatorname{tg} x = -\sqrt{3}.$

ОТВЕТ: $-\frac{\pi}{3} + \pi k; k \in Z.$

3. $\sin x = -1/2.$

ОТВЕТ: $-\frac{\pi}{6} + 2\pi k, k \in Z.$

4. Найдите решения уравнения $\cos(\pi(x-3))=0$, $4 < x < 6$ на заданном промежутке.

Ответ: 5.

5. Найдите решения уравнения $1+2\sin\frac{\pi x}{3}=0$, $2 < x < 4$ на заданном промежутке.

Ответ: 3,5.

Решите уравнения.

6. $|\sin 4x| = \frac{\sqrt{3}}{2}$.

Ответ: $\pm\frac{\pi}{12} + \frac{\pi k}{2}$; $\pm\frac{\pi}{6} + \pi n$, $k, n \in Z$.

7. $\operatorname{ctg}^2 x = \frac{1}{3}$.

Ответ: $\pm\frac{\pi}{3} + \pi k$, $k \in Z$.

8. $2\sin^2 2x + 7\sin 2x - 4 = 0$.

Ответ: $\frac{\pi}{12} + \pi k$, $\frac{5\pi}{12} + \pi n$, $k, n \in Z$.

9. $\cos\frac{x}{3} = \cos 2x$.

Ответ: $\frac{6\pi k}{7}$; $\frac{6\pi n}{5}$, $k, n \in Z$.

Решите неравенства.

10. $\sin x > \frac{\sqrt{3}}{2}$.

Ответ: $\left(2\pi k + \frac{\pi}{3}; 2\pi k + \frac{2\pi}{3}\right)$, $k \in Z$.

11. $\operatorname{ctg} x < -1$.

Ответ: $\left(\pi k + \frac{3\pi}{4}, \pi k + \pi\right)$, $k \in Z$.

Задание 13. Планиметрия

Вариант 1

1. Найдите основание равнобедренного треугольника, если его боковая сторона равна 23, а периметр равен 81.
Ответ: 25.
2. Найдите третью сторону прямоугольного треугольника, если даны две другие его стороны: $2 \cdot \sqrt{5}$ и 4.
Ответ: 2; 6.
3. Найдите площадь прямоугольного треугольника с катетом 2,5 и гипотенузой $\frac{\sqrt{281}}{2}$.
Ответ: 10.
4. Гипотенуза равнобедренного прямоугольного треугольника равна $2 \cdot (\sqrt{2} - 1)$. Найдите его периметр.
Ответ: 2.
5. Гипотенуза прямоугольного треугольника в 3 раза больше меньшего из катетов. Найдите медиану проведенную к гипотенузе, если больший катет равен $4 \cdot \sqrt{2}$.
Ответ: 3.
6. Одна из сторон параллелограмма равна 21, а периметр равен 123. Найдите длину стороны параллелограмма, смежной с данной.
Ответ: 40,5.
7. Одна из диагоналей параллелограмма равная $\frac{9}{2} \cdot \sqrt{6}$ составляет с основанием угол 60° . Найдите длину второй диагонали, если она составляет с тем же основанием угол 45° .
Ответ: 13,5.
8. Хорда делит окружность на части в отношении 5:7. Найдите вписанный угол опирающийся на меньшую из дуг, стягиваемых этой хордой.
Ответ: 75° .
9. Окружность радиуса описана около равнобедренного треугольника с углом 120° . Найдите основание.
Ответ: 18.

10. Вычислите вписанный угол опирающийся на дугу равную $\frac{1}{12}$ длины окружности.
Ответ: 15° .

Вариант 2

1. Периметр треугольника равен 156. Найдите периметр треугольника, вершинами которого служат середины сторон данного треугольника.
Ответ: 78.
2. Найдите третью сторону прямоугольного треугольника, если даны две другие его стороны: 5 и 4.
Ответ: 3; $\sqrt{41}$.
3. Высота равностороннего треугольника равна $7(\sqrt[4]{3})$. Найдите площадь треугольника.
Ответ: 49.
4. В равнобедренном треугольнике боковая сторона равна 25, а высота равна 20. Найдите периметр треугольника.
Ответ: 80.
5. Катет прямоугольного треугольника равен 4, а медиана треугольника, проведенная к гипотенузе, равна 2,5. Найдите периметр треугольника.
Ответ: 12.
6. Диагональ ромба, лежащая против угла 60° , равна 11,2. Найдите периметр ромба.
Ответ: 44,8.
7. В параллелограмме одна из сторон равна $2 \cdot \sqrt{3}$, а диагональ равна 8. Найдите синус угла между диагоналями, если другая диагональ составляет с заданной стороной угол 60° .
Ответ: 75.
8. Секущая и касательная выходящие из одной точки соответственно равны 40 и 20. Секущая удалена от центра на 8. Определите радиус круга.
Ответ: 17.
9. Один из острых углов прямоугольного треугольника равен 40° . Определите острый угол между радиусом описанной окружности, проведенным в вершину прямого угла, и гипотенузой.
Ответ: 80° .

10. Найдите длину дуги сектора, если его площадь равна 15, а радиус круга равен 6.

Ответ: 5.

Задание 14. Стереометрия

Вариант 1

1. Боковая поверхность куба равна 3. Чему равна диагональ куба?
Ответ: 1,5.

2. Основанием призмы служит ромб со стороной 2 и острым углом 30° . Найдите объем призмы, если ее высота равна 3.
Ответ: 6.

3. Основанием прямой призмы служит равнобедренный треугольник, основание которого равно 8, а боковая сторона равна 5. Найдите площадь боковой поверхности призмы, если ее высота равна высоте треугольника, проведенной к его основанию.
Ответ: 54.

4. Высота правильной четырехугольной пирамиды равна 7, а сторона основания равна 8. Определите боковое ребро.
Ответ: 9.

5. Сторона основания правильной треугольной пирамиды равна 6, двугранный угол при основании равен 45° . Определите объем пирамиды.
Ответ: 9.

6. Найдите диаметр шара, если его объем равен $\frac{2048\pi}{3}$.

Ответ: 16.

7. В куб вписан шар. Найдите объем шара, если объем куба равен $\frac{156}{\pi}$.

Ответ: 26.

8. Найдите высоту конуса, если его объем равен 48π , а диаметр основания равен $\frac{\sqrt{3}}{2}$.

Ответ: 768.

9. Площадь полной поверхности цилиндра равна 172π . Найдите площадь осевого сечения цилиндра, если диаметр его основания равен 8.
Ответ: 140.
10. Объем цилиндра равен 572. Найдите объем другого цилиндра, у которого диаметр основания в 3 раза больше, а высота в 3 раза меньше, чем у данного цилиндра.
Ответ: 1716.

Вариант 2

1. Полная поверхность куба равна 3. Чему равна диагональ грани куба?
Ответ: 1.
2. Основанием призмы служит равносторонний треугольник, площадь которого равна $9 \cdot \sqrt{3}$. Найдите объем призмы, если ее высота в $\sqrt{3}$ раз больше стороны основания.
Ответ: 162.
3. Высота прямоугольного параллелепипеда равна 7, а стороны основания равны 4 и 5. Найдите площадь боковой поверхности параллелепипеда.
Ответ: 126.
4. Найдите объем правильного тетраэдра с ребром $3 \cdot \sqrt{2}$.
Ответ: 9
5. Сторона основания правильной треугольной пирамиды равна 1, а ее боковая поверхность — $0,5 \cdot \sqrt{3}$. Найдите высоту пирамиды.
Ответ: 0,5.
6. Объем конуса равен 162π . Найдите диаметр основания конуса, если его высота равна 6.
Ответ: 18.
7. В куб вписан шар. Найдите площадь поверхности шара, если площадь полной поверхности куба равна $\frac{1170}{\pi}$.
Ответ: 195.
8. Высота конуса равна диаметру основания. Найдите радиус основания конуса, если объем конуса равен $\frac{128\pi}{3}$.
Ответ: 4.

9. Площадь боковой поверхности цилиндра равна 15π . Найдите площадь основания цилиндра, если его высота равна длине окружности основания.

Ответ: $3,75$.

10. Объем шара равен 12. Найдите объем другого шара, у которого площадь поверхности в 9 раз больше, чем у данного шара.

Ответ: 324.

БИБЛИОГРАФИЧЕСКИЙ СПИСОК

Алгебра и начала математического анализа, 10–11 класс : учебник / Ш. А. Алимов, Ю. М. Колягин, М. В. Ткачева [и др.] — Москва : Просвещение, 2024. — 463 с. — ISBN 978-5-0907-1729-8.

Геометрия, 10–11 классы : учебник для общеобразовательных учреждений: базовый и профильный уровни / Л. С. Атанасян, В. Ф. Бутузов, С. Б. Кадомцев [и др.]. — 22-е изд. — Москва : Просвещение, 2013. — 255 с.: ил. — (МГУ школе). — ISBN 978-5-0903-0854-0.

Шабунин, М. И. Математика : пособие для поступающих в вузы / М. И. Шабунин. — 9-е изд. — Москва : Лаборатория знаний, 2022. — 744 с. — ISBN 978-5-9320-8299-7

Сканави, М. И. Сборник задач по математике для поступающих в вузы / М. И. Сканави. — Москва : АСТ, 2024. — 608 с. — ISBN 978-5-17-149903-7.

Черкасов, О. Ю. Математика. Справочник для школьников и поступающих в вузы: курс подготовки к ГИА, ЕГЭ и дополнительным вступительным испытаниям в вузы / О. Ю. Черкасов, А. Г. Якушев. — Москва : АСТ-ПРЕСС ШКОЛА, 2022. — 482 с. — ISBN 978-5-4620-1938-8.

Ткачук, В. В. Математика — абитуриенту / В. В. Ткачук. — Москва : МЦНМО, 2024. — 960 с. — ISBN 978-5-4439-1837-2.

Письменный, Д. Т. Готовимся к экзамену по математике: математика для старшеклассников / Д. Т. Письменный. — Москва : Айрис-Пресс, 2008. — 352 с. — ISBN 978-5-8112-3407-3.

Райхмист, Р. Б. Задачник по математике для учащихся средней школы и поступающих в вузы (с решениями и ответами) : учебное пособие / Р. Б. Райхмист. — Москва : Московский лицей, 2009. — 304 с. — ISBN 978-5-7611-0223-4.

Учебное издание

Белоусова Вероника Игоревна
Рыбалко Александр Федорович
Рыбалко Наталья Михайловна
Чашина Вера Геннадьевна

**ЭЛЕМЕНТАРНЫЕ ОСНОВЫ
МАТЕМАТИКИ
(АДАПТАЦИОННЫЙ КУРС)**

Редактор И. В. Меркурьева
Верстка О. П. Игнатьевой

Подписано в печать 03.04.2025. Формат 70×100/16.
Бумага офсетная. Цифровая печать. Усл. печ. л. 10,6.
Уч.-изд. л. 8,9. Тираж 30 экз. Заказ 36.

Издательство Уральского университета
Редакционно-издательский отдел ИПЦ УрФУ ЦСД
620062, Екатеринбург, ул. С. Ковалевской, 5
Тел.: +7 (343) 375-48-25, 375-46-85, 374-19-41
E-mail: rio@urfu.ru

Отпечатано в Издательско-полиграфическом центре УрФУ ЦСД
620083, Екатеринбург, ул. Тургенева, 4
Тел.: +7 (343) 358-93-06, 350-58-20, 350-90-13
<http://print.urfu.ru>

