



**Уральский
федеральный
университет**

имени первого Президента
России Б.Н.Ельцина

**Институт
фундаментального
образования**

Л. Г. МАЛЫШЕВ

А. А. ПОВЗНЕР

ЭЛЕКТРИЧЕСТВО И МАГНЕТИЗМ. ЗАДАЧИ, ИХ АНАЛИЗ И РЕШЕНИЕ

Практикум

Министерство науки и высшего образования
Российской Федерации
Уральский федеральный университет
имени первого Президента России Б. Н. Ельцина

Л. Г. Малышев, А. А. Повзнер

ЭЛЕКТРИЧЕСТВО И МАГНЕТИЗМ. ЗАДАЧИ, ИХ АНАЛИЗ И РЕШЕНИЕ

Практикум

Рекомендовано методическим советом
Уральского федерального университета
для студентов вуза инженерно-технических
специальностей и направлений

Екатеринбург
Издательство Уральского университета
2025

УДК 537(076)

ББК 22.33я73

М20

Рецензенты:

кафедра общей физики Уральского государственного лесотехнического университета (завкафедрой д-р физ.-мат. наук, проф. *М. П. Кащенко*); д-р физ.-мат. наук, проф., гл. науч. сотр. Уральского государственного педагогического университета *В. Е. Сидоров*

Научный редактор — д-р физ.-мат. наук, проф. *О. А. Чикова*

Мальшев, Леонид Григорьевич.

М20 Электричество и магнетизм. Задачи, их анализ и решение : практикум / Л. Г. Мальшев, А. А. Повзнер ; М-во науки и высшего образования РФ. — Екатеринбург : Изд-во Урал. ун-та, 2025. — 152 с. — ISBN 978-5-7996-3980-8. — Текст : непосредственный.

ISBN 978-5-7996-3980-8

В практикуме рассмотрены основные физические законы и соотношения, на их основе проводится подробный анализ и решение большого числа задач. Настоящее издание позволит учащимся улучшить уровень подготовки по соответствующему разделу курса физики.

Практикум предназначен для студентов УрФУ, обучающихся на физических и инженерно-физических направлениях подготовки, изучающих курс общей физики в соответствии с рабочей программой курса «Общая физика» и образовательными стандартами.

УДК 537(076)

ББК 22.33я73

Учебное издание

Мальшев Леонид Григорьевич, Повзнер Александр Александрович

**ЭЛЕКТРИЧЕСТВО И МАГНЕТИЗМ.
ЗАДАЧИ, ИХ АНАЛИЗ И РЕШЕНИЕ**

Редактор *Т. Е. Мери*
Верстка *Ю. В. Ершовой*

Подписано в печать 20.03.2025. Формат 60×84 1/16. Бумага офсетная. Цифровая печать. Усл. печ. л. 8,8. Уч.-изд. л. 6,9. Тираж 30 экз. Заказ № 35.

Издательство Уральского университета РИО ИПЦ УрФУ ЦСД

620062, Екатеринбург, ул. С. Ковалевской, 5.

Тел.: +7 (343) 375-48-25, 375-46-85, 374-19-41. Е-mail: rio@urfu.ru

Отпечатано в ИПЦ УрФУ ЦСД. 620083, Екатеринбург, ул. Тургенева, 4.

Тел.: +7 (343) 358-93-06, 350-58-20, 350-90-13. <http://print.urfu.ru>

ISBN 978-5-7996-3980-8 © Уральский федеральный университет, 2025

Оглавление

Предисловие.....	3
1. Магнитное поле в вакууме	4
2. Магнитное поле в веществе	67
3. Движение заряженных частиц в электрическом и магнитном полях	87
4. Электромагнитная индукция.....	119
Список библиографических ссылок	151

Предисловие

Изучение курса физики основано на двух взаимосвязанных вещах. С одной стороны, это понимание фундаментальных законов, лежащих в основе физической науки, и их взаимосвязей. Законы включают множество следствий, описывающих различные физические процессы и явления. С другой стороны, для их изучения требуется практическое использование основных положений теории, их применение к конкретным физическим ситуациям. Научиться этому можно лишь решая задачи, условия которых в той или иной степени моделируют реальные процессы и явления.

В этой книге авторы стремились показать, как практически применять основные физические законы при описании различных явлений и процессов — как модельных, так и реальных. Все рассмотренные задачи включают анализ условий, подробные решения и обсуждение полученных результатов.

1. Магнитное поле в вакууме

1.1. Ток $I = 1,00$ А протекает по плоскому контуру, имеющему форму окружности радиусом $R = 100$ мм. Требуется вычислить индукцию магнитного поля в точке, расположенной на оси, перпендикулярной плоскости контура и проходящей через его центр на расстоянии $x = 100$ мм от него.

Решение. Представим контур в виде совокупности малых элементов dl и найдем индукцию магнитного поля dB , создаваемого этим элементом в точке x на оси, проходящей через центр кольца (рис. 1.1).

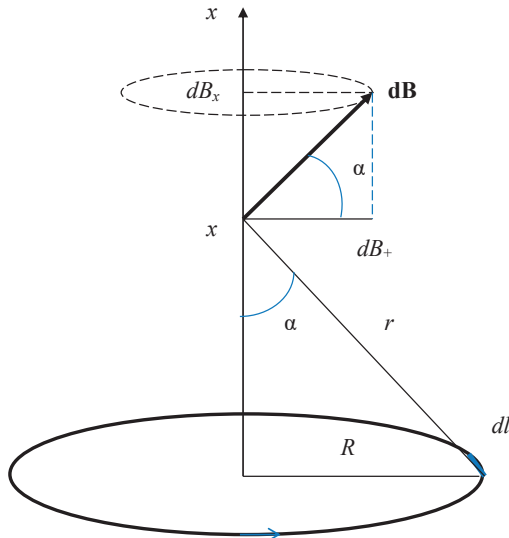


Рис. 1.1

По закону Био — Савара — Лапласа

$$dB = \frac{\mu_0 I dl \sin 90^\circ}{4\pi r^2}.$$

Вклад в магнитную индукцию вносит лишь составляющая dB_x , поскольку поперечные составляющие векторов $d\mathbf{B}$ для различных отрезков dl компенсируют друг друга. Таким образом,

$$\begin{aligned} B_x &= \int dB_x = \int_l \frac{\mu_0 I dl \sin \alpha}{4\pi r^2} = \int_l \frac{\mu_0 I dl \sin^3 \alpha}{4\pi R^2} = \\ &= \frac{\mu_0 I 2\pi R \sin^3 \alpha}{4\pi R^2} = \frac{\mu_0 I}{2R} \frac{R^3}{(R^2 + x^2)^{3/2}} = \frac{\mu_0 I R^2}{2(R^2 + x^2)^{3/2}}. \end{aligned}$$

Кстати, из этой формулы следует, что поле в центре кольцевого тока ($x = 0$) равно

$$B = \frac{\mu_0 I}{2R}.$$

1.2. Ток I протекает по плоскому контуру, имеющему прямолинейный участок длиной $2a$. Найти магнитную индукцию поля в точке, отстоящей на расстояние r от этого участка, как это показано на рис. 1.2.

Решение. Представим прямолинейный участок контура в виде множества малых элементов dl и найдем индукцию магнитного поля dB , создаваемого этим элементом в точке r , которая находится на перпендикуляре, проведенном к прямолинейному участку в точке O (рис. 1.2):

$$dB = \frac{\mu_0 I dl \sin \alpha}{4\pi x^2}.$$

Проведем ряд преобразований:

$$x = \frac{r}{\sin \alpha}, \quad l = r \cotan \alpha, \quad dl = \left| -\frac{r d\alpha}{\sin^2 \alpha} \right| = \frac{r d\alpha}{\sin^2 \alpha},$$

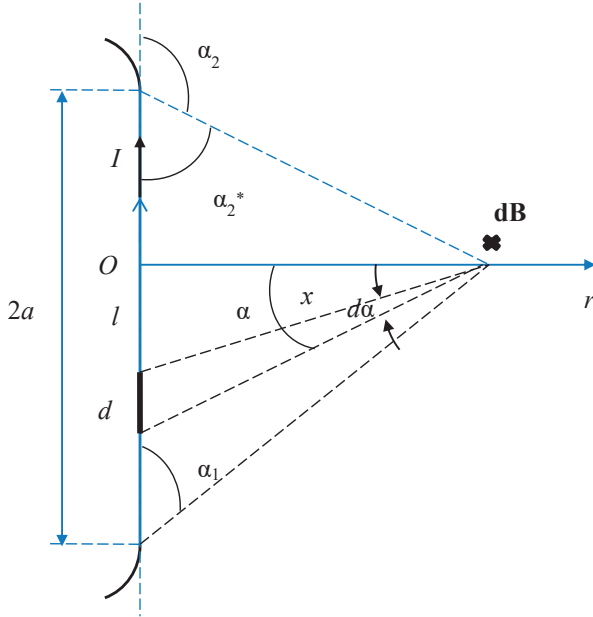


Рис. 1.2

и придем к формуле

$$dB = \frac{\mu_0 I \sin \alpha d\alpha}{4\pi r}.$$

Проведем ее интегрирование и получим ответ:

$$B = \frac{\mu_0 I}{4\pi r} \int_{\alpha_1}^{\alpha_2} \sin \alpha d\alpha = \frac{\mu_0 I}{4\pi r} (\cos \alpha_1 - \cos \alpha_2) = \frac{\mu_0 I}{4\pi r} (\cos \alpha_1 + \cos \alpha_2^*).$$

В этой формуле содержится ряд важных частных случаев.

1. Точка O находится в центре прямолинейного участка:

$$\alpha_2^* = \alpha_1, \quad B = \frac{\mu_0 I}{2\pi r} \cos \alpha_1.$$

2. В случае бесконечно длинного проводника

$$B = \frac{\mu_0 I}{2\pi r}.$$

3. Если проводник полубесконечной длины и точка O находится на его краю, то $\alpha_1 = 0$, $\alpha_2^* = \pi/2$, и тогда

$$B = \frac{\mu_0 I}{4\pi r}.$$

1.3. Контур состоит из n последовательно соединенных тонких прямолинейных проводников равной длины, вписанных в окружность радиусом R и образующих правильный n -угольник. Чему будет равна индукция магнитного поля в центре окружности, если по контуру протекает ток I ?

Решение. Как видно из рис. 1.3,

$$\alpha_1 = \frac{1}{2} \left(\pi - \frac{2\pi}{n} \right) = \frac{\pi}{2} - \frac{\pi}{n},$$

$$r = R \cos \frac{\pi}{n}, \quad a = R \sin \frac{\pi}{n}.$$

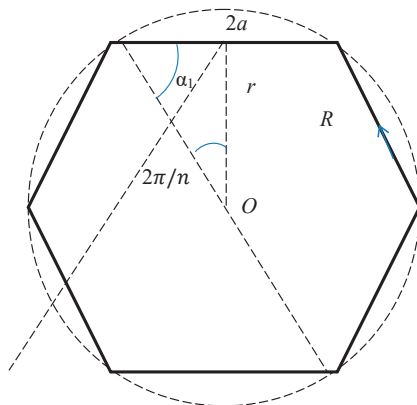


Рис. 1.3

Воспользуемся результатом задачи 1.2:

$$B_1 = \frac{\mu_0 I}{2\pi r} \cos \alpha_1 = \frac{\mu_0 I}{2\pi R \cos \frac{\pi}{n}} \cos \left(\frac{\pi}{2} - \frac{\pi}{n} \right) = \frac{\mu_0 I}{2\pi R} \tan \frac{\pi}{n}.$$

С учетом n проводников получим ответ:

$$B = nB_1 = n \frac{\mu_0 I}{2\pi R} \tan \frac{\pi}{n}.$$

В пределе $n \rightarrow \infty$ эта формула принимает вид

$$B = \frac{\mu_0 I}{2\pi R},$$

то есть превращается в выражение для магнитной индукции поля в центре прямого тока (задача 1.1).

1.4. По прямоугольному контуру с длиной диагоналей $l = 32$ см протекает ток $I = 2,5$ А. Чему равна индукция магнитного поля в точке пересечения его диагоналей, если угол между ними составляет $\varphi = 30^\circ$?

Решение. Индукцию магнитного поля в точке пересечения его диагоналей определим, используя формулу, полученную в задаче 1.2. С учетом обозначений, использованных на рис. 1.4,

$$B = 2B_1 + 2B_2,$$

$$B_1 = \frac{\mu_0 I}{2\pi r} \cos \alpha_1,$$

$$\alpha_1 = \frac{\varphi}{2},$$

$$2a = l \cos \alpha_1,$$

$$r = \frac{l}{2} \sin \alpha_1,$$

$$B_1 = \frac{\mu_0 I}{\pi l} \cot \frac{\varphi}{2}.$$

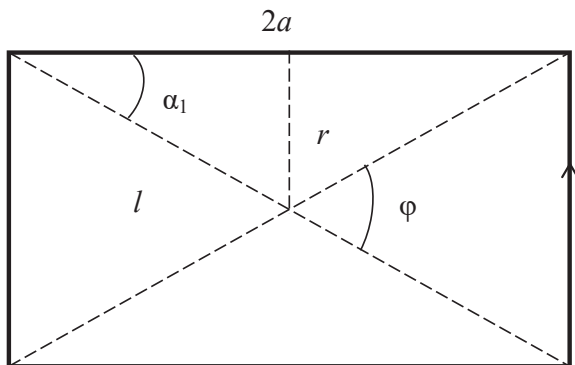


Рис. 1.4

Для магнитной индукции B_2 вид формулы будет таким же, с той лишь разницей, что вместо угла φ следует взять угол $\pi - \varphi$:

$$B_2 = \frac{\mu_0 I}{\pi l} \cot\left(\frac{\pi - \varphi}{2}\right) = \frac{2\mu_0 I}{2\pi l} \tan \frac{\varphi}{2},$$

и тогда

$$\begin{aligned} B &= 2B_1 + 2B_2 = \frac{2\mu_0 I}{\pi l} \left(\cot \frac{\varphi}{2} + \tan \frac{\varphi}{2} \right) = \\ &= \frac{2\mu_0 I}{\pi l} \left(\frac{\cos \varphi / 2}{\sin \varphi / 2} + \frac{\sin \varphi / 2}{\cos \varphi / 2} \right) = \frac{4\mu_0 I}{\pi l \sin \varphi} = 0,1 \text{ мТл.} \end{aligned}$$

1.5. Тонкий проводник состоит из прямолинейного участка, концы которого замкнуты дугой окружности радиусом $R = 60$ мм (рис. 1.5). Чему равна индукция магнитного поля в точке O , если по контуру протекает ток $I = 2,5$ А? Угол $\varphi = 90^\circ$.

Решение. Магнитное поле в точке O создается прямолинейным проводником и элементом дуги окружности радиуса R ,

$$B = B_1 + B_2.$$

Индукцию поля B_1 прямого проводника найдем, воспользовавшись результатом задачи 1.2:

$$B_1 = \frac{\mu_0 I}{2\pi r} \cos \alpha_1,$$

$$\alpha_1 = \varphi / 2, \quad r = T \sin \alpha_1,$$

$$B_1 = \frac{\mu_0 I}{2\pi R} \cot \varphi / 2.$$

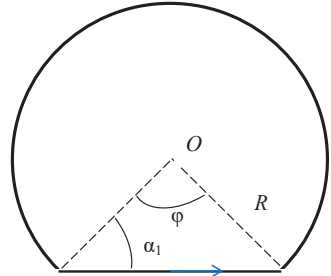


Рис. 1.5

Индукция поля B_2 дуги окружности равна $\frac{3}{4}$ индукции поля кругового тока в точке O (задача 1.1):

$$B_2 = \frac{3}{4} \frac{\mu_0 I}{2R}.$$

Ответ:

$$B_1 + B_2 = \frac{\mu_0 I}{2\pi R} \cot \frac{\varphi}{2} + \frac{3}{4} \frac{\mu_0 I}{2R} = 28 \text{ мкТл}.$$

1.6. Тонкий контур имеет вид, изображенный на рис. 1.6. Чему равна индукция магнитного поля в точке O , если по контуру протекает ток I ?

Решение. Магнитное поле в точке O создается элементами окружностей, имеющими радиусы R_1 и R_2 . Прямолинейные участки не создают поля в этой точке, поскольку она лежит на продолжении соответствующих прямых.

Индукцию поля в точке O получим, воспользовавшись формулами задачи 1.1:

$$B = \frac{3}{4} B_1 + \frac{1}{4} B_2 = \frac{\mu_0 I}{8} \left(\frac{3}{R_1} + \frac{1}{R_2} \right).$$

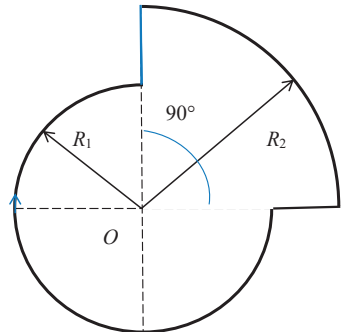


Рис. 1.6

1.7. Тонкий контур имеет вид, изображенный на рис. 1.7. Чему равна индукция магнитного поля в точке O , если по контуру протекает ток I ?

Решение. Магнитное поле в точке O создается током, протекающим по дуге окружности радиусом a , составляющей три четверти ее полной длины, и четырьмя прямолинейными участками, являющимися сторонами квадрата с длиной стороны b , как это показано на рис. 1.7.

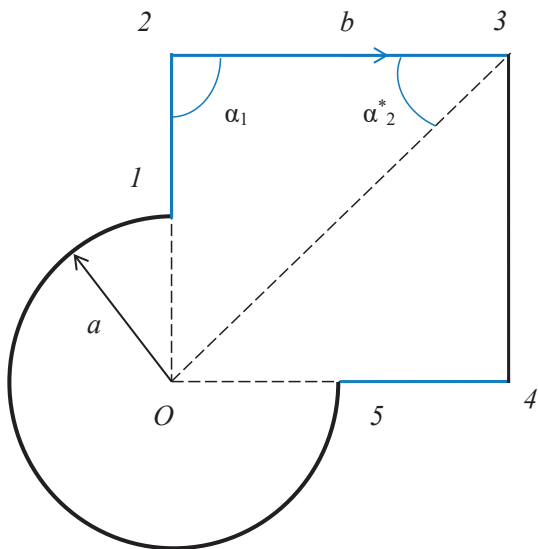


Рис. 1.7

Индукцию поля, созданного в точке O дугой окружности, получим, воспользовавшись формулой задачи 1.1:

$$B_0 = \frac{3}{4} \frac{\mu_0 I}{2a}.$$

Прямолинейные участки $1-2$ и $4-5$ поле в точке O не создают, а для вычисления индукции поля, созданного участками $2-3$ и $3-4$, применим формулу, полученную в задаче 1.2:

$$B_{23} = \frac{\mu_0 I}{4\pi r} (\cos \alpha_1 + \cos \alpha_2^*),$$

в которой $\alpha_1 = \pi/2$, $\alpha_2 = \pi/4$, $r = b$:

$$B_{23} = \frac{\mu_0 I}{8\pi b} \sqrt{2}.$$

Окончательно

$$B = B_0 + 2B_{23} = \frac{\mu_0 I}{4\pi} \left(\frac{3\pi}{2a} + \frac{\sqrt{2}}{b} \right).$$

1.8. Чему равна магнитная индукция поля проводника с током I в точке O , если он имеет форму, изображенную на рис. 1.8, a – $в$?

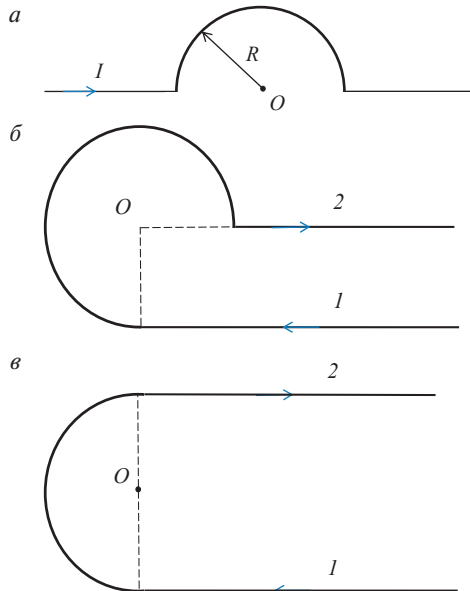


Рис. 1.8

Решение. Магнитное поле в точке O создается током, протекающим по дуге окружности радиусом R и двум прямолинейным участкам достаточно большой длины.

В первом случае (рис. 1.8, *а*) поле в точке O создается лишь током, протекающим по дуге полуокружности, и его индукция равна

$$B = \frac{\mu_0 I}{4R}.$$

Во втором случае (рис. 1.8, *б*) вклад в индукцию вносит поле дуги окружности и поле проводника I :

$$B = \frac{3}{4} \frac{\mu_0 I}{2R} + \frac{\mu_0 I}{4\pi R} = \frac{\mu_0 I}{4\pi R} \left(1 + \frac{3\pi}{2} \right).$$

В третьем случае (рис. 1.8, *в*) вклад в индукцию вносит поле дуги окружности и поля обоих проводников:

$$B = \frac{1}{2} \frac{\mu_0 I}{2R} + 2 \frac{\mu_0 I}{4\pi R} = \frac{\mu_0 I}{4\pi R} (2 + \pi).$$

1.9. В плоскости расположен длинный, согнутый под прямым углом проводник, по которому протекает ток $I = 10$ А. В точке изгиба восстановлен перпендикуляр к этой плоскости (рис. 1.9). Чему равна индукция магнитного поля в точке, лежащей на перпендикуляре на расстоянии $r = 0,70$ м от плоскости?

Решение. Магнитное поле в точке O создается двумя взаимно перпендикулярными токами, и индукция магнитного поля

$$B = B_1 \sqrt{2} = \frac{\mu_0 I}{4\pi R} \sqrt{2}.$$

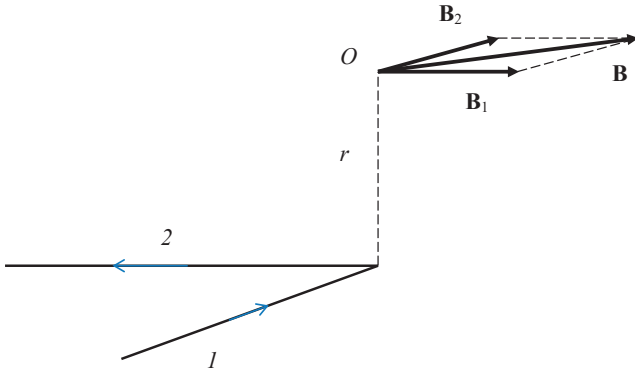


Рис. 1.9

1.10. Проводник, по которому протекает ток $I = 4$ А, представляет собой последовательность двух длинных прямолинейных участков, разделенных проводником в виде полуокружности радиусом $R = 50$ мм (рис. 1.10). Чему равна индукция магнитного поля, создаваемого током в точке O ?

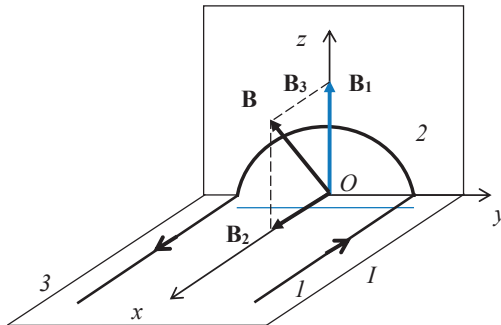


Рис. 1.10

Решение. Магнитное поле в точке O можно представить как векторную сумму трех векторов:

$$\mathbf{B} = \mathbf{B}_1 + \mathbf{B}_2 + \mathbf{B}_3.$$

В скалярном виде

$$B = \sqrt{4B_1^2 + B_3^2}.$$

Используя результаты, полученные в задачах 1.1 и 1.2, получим

$$B_1 = \frac{\mu_0 I}{4\pi R}, \quad B_2 = \frac{1}{2} \frac{\mu_0 I}{2R},$$

$$B = \sqrt{4B_1^2 + B_2^2} = \frac{\mu_0 I}{4\pi R} \sqrt{4 + \pi^2} = 0,30 \text{ мкТл}.$$

1.11. Проводник, по которому протекает ток $I = 4 \text{ А}$, представляет собой последовательность двух длинных прямолинейных участков, разделенных проводником в виде полуокружности радиусом $R = 50 \text{ мм}$ (рис. 1.11). Чему равна индукция магнитного поля, создаваемого током в точке O ?

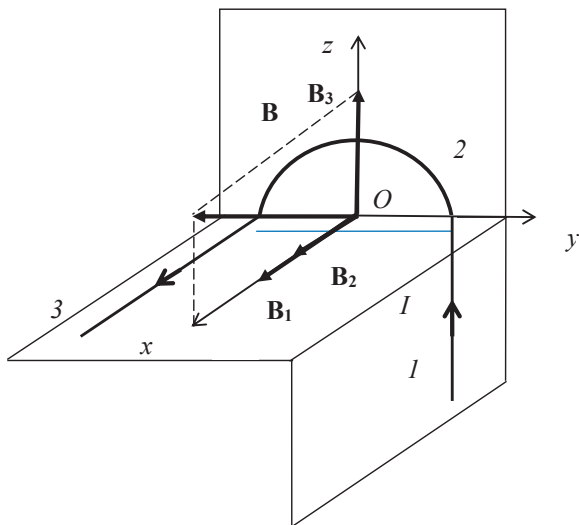


Рис. 1.11

Решение. Магнитное поле в точке O можно представить как векторную сумму трех векторов:

$$\mathbf{B} = \mathbf{B}_1 + \mathbf{B}_2 + \mathbf{B}_3.$$

В скалярном виде

$$B = \sqrt{(B_1 + B_2)^2 + B_3^2},$$

$$B_1 = B_3 = \frac{\mu_0 I}{4\pi R}, \quad B_2 = \frac{\mu_0 I}{4R},$$

$$B = \sqrt{2 + 2\pi + \pi^2} = 0,34 \text{ мкТл}.$$

1.12. Сечение длинного прямого проводника имеет вид тонкого полукольца радиусом R (рис. 1.12). Чему равна индукция магнитного поля на оси полукольца?

Решение. Представим этот проводник в виде множества тонких параллельных проводников, имеющих ширину dl . Каждый из них создает в точке O свое поле. Рассмотрим один из них, указанный на рисунке, и представим вектор $d\mathbf{B}$ поля этого проводника в виде суммы:

$$d\mathbf{B} = d\mathbf{B}_x + d\mathbf{B}_y.$$

Если взять аналогичный проводник, расположенный слева от оси y , поменяв угол $\alpha \rightarrow -\alpha$, то вектор $d\mathbf{B}_x$ останется тем же, а направление вектора $d\mathbf{B}_y$ изменится на противоположное. Понятно, что результирующий вектор магнитного поля будет направлен вдоль оси x .

Индукция поля, созданного длинным проводником, имеющим малую ширину dl , равна

$$dB = \frac{\mu_0 dI}{2\pi R}.$$

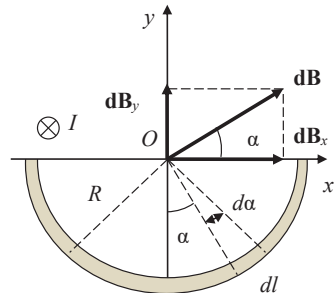


Рис. 1.12

Ток dI найдем из простой пропорции

$$\frac{dI}{I} = \frac{dl}{\pi R}.$$

Учитывая, что $dl = R d\alpha$, получим

$$dB = \frac{\mu_0 I d\alpha}{2\pi^2 R}.$$

Составляющая вектора $d\mathbf{B}$ вдоль оси x

$$dB_x = dB \cos \alpha = \frac{\mu_0 I \cos \alpha d\alpha}{2\pi^2 R},$$

$$B = \int_{-\pi/2}^{\pi/2} \frac{\mu_0 I \cos \alpha d\alpha}{2\pi^2 R} = \frac{\mu_0 I \sin \alpha}{2\pi^2 R} \Big|_{-\pi/2}^{\pi/2} = \frac{\mu_0 I}{\pi^2 R}.$$

1.13. В проводнике, представляющем собой длинную трубу, сделана узкая продольная прорезь, ширина которой l гораздо меньше радиуса R трубы. Чему равна индукция магнитного поля внутри трубы, если по ней протекает ток I ?

Решение. Поле внутри трубы с прорезью можно представить как поле сплошной трубы, по которой протекает ток I , и проводника, «наклеенного» вдоль нее, по которому протекает в обратном направлении ток

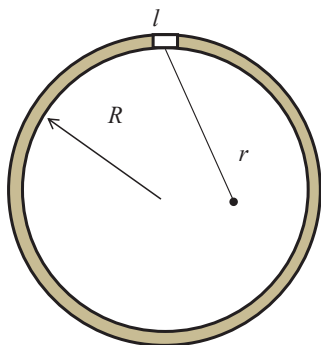


Рис. 1.13

$$I' = I \frac{l}{2\pi R}.$$

В отсутствие прорези поле в трубе отсутствует, поэтому при наличии прорези поле внутри будет определяться током I' (рис. 1.13).

Индукция магнитного поля длинного прямого тока определяется формулой

$$B = \frac{\mu_0 I}{2\pi r} = \frac{\mu_0 I I}{4\pi^2 R r}.$$

1.14. По безграничному плоскому проводнику протекает ток с линейной плотностью i . Чему равна индукция магнитного поля, создаваемая этим током?

Решение. Плоскость с током можно представить в виде множества параллельных токов (рис. 1.14). Их линии магнитной индукции имеют вид перекрывающихся окружностей, и в результате их наложения линии магнитного поля плоского тока будут параллельны плоскости с током.

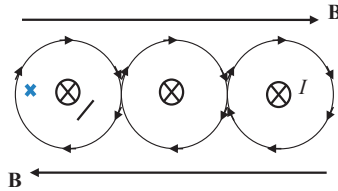


Рис. 1.14

Для вычисления индукции поля воспользуемся теоремой о циркуляции, выбрав в качестве контура прямоугольник, параметры которого указаны на рис. 1.15.

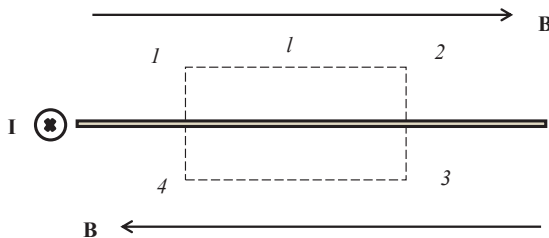


Рис. 1.15

$$\int_L \mathbf{B} d\mathbf{l} = \mu_0 I_\Sigma,$$

$$\int_L \mathbf{B} d\mathbf{l} = \int_{1,2} \mathbf{B} d\mathbf{l} + \int_{2,3} \mathbf{B} d\mathbf{l} + \int_{3,4} \mathbf{B} d\mathbf{l} + \int_{4,1} \mathbf{B} d\mathbf{l} = 2Bl.$$

На участках 2–3 и 4–1 интегралы равны нулю, поскольку $\mathbf{B} \perp d\mathbf{l}$. Ток I_Σ , охватываемый контуром, равен

$$I_\Sigma = il,$$

и поэтому

$$B = \frac{1}{2} \mu_0 i.$$

1.15. По двум параллельным плоскостям протекают равные токи противоположного направления (рис. 1.16). Чему равна индукция магнитного поля, создаваемая этими плоскостями? Линейная плотность токов i .

Решение. Изобразим линии магнитной индукции поля, создаваемого током, текущим от нас, сплошными линиями, а встречного тока — пунктирными (рис. 1.16).



Рис. 1.16

Из рисунка видно, что поле, созданное этими плоскостями, локализовано в пространстве между ними, и его индукция

$$B = \mu_0 i.$$

1.16. По безграничной пластине толщиной $2d$ протекает ток плотности j . Чему равна магнитная индукция поля на расстоянии x от центральной плоскости этой пластины? Пластина немагнитная.

Решение. С учетом рассуждений, приведенных в задаче 1.15, ясно, что линии магнитной индукции поля этой пластины параллельны ее центральной плоскости (рис. 1.17).

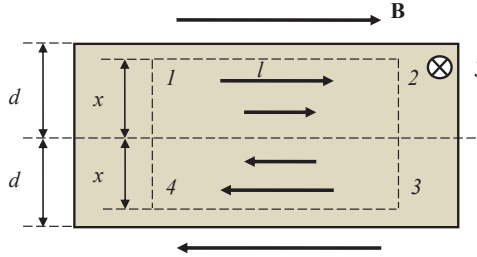


Рис. 1.17

Воспользуемся теоремой о циркуляции вектора $\mathbf{B}$, взяв прямоугольный контур $1-2-3-4$, расположенный симметрично относительно центральной плоскости:

$$\begin{aligned} \int_L \mathbf{B} d\mathbf{l} &= \mu_0 I_\Sigma, \\ \int_L \mathbf{B} d\mathbf{l} &= \int_{1,2} B dl + \int_{2,3} B dl \cos \frac{\pi}{2} + \int_{3,4} B dl + \int_{4,1} B dl \cos \frac{\pi}{2} = 2Bl = \mu_0 I_\Sigma, \\ I_\Sigma &= j l 2x, \\ B &= \mu_0 j x. \end{aligned}$$

Для нахождения магнитной индукции поля вне пластины увеличим вертикальные участки контура так, чтобы их длина была больше d (рис. 1.18). При этом ток I_Σ , охватываемый контуром в данном случае, уже не зависит от x и равен

$$I_\Sigma = j l 2d.$$

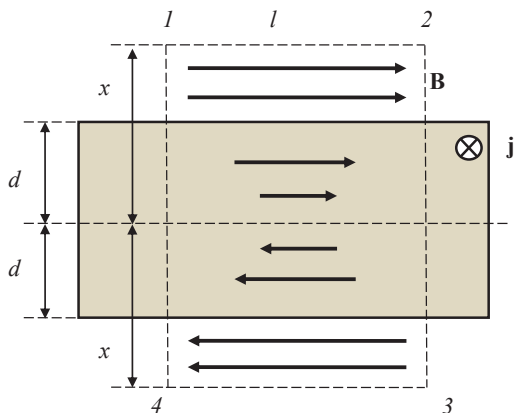


Рис. 1.18

Поэтому

$$2Bl = \mu_0 j l 2d,$$

$$B = \mu_0 j d = \text{const}$$

и является однородным.

График зависимости индукции поля от расстояния x показан на рис. 1.19.

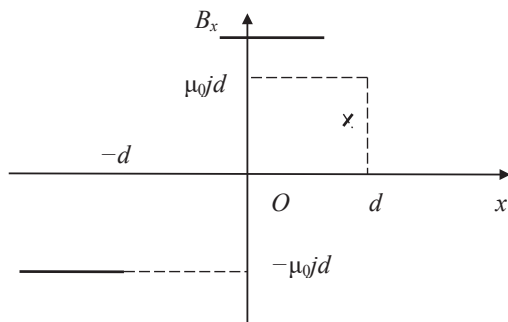


Рис. 1.19

1.17. По круговому витку протекает ток I . Чему будет равен интеграл $\int \mathbf{B} d\mathbf{l}$, если в качестве контура интегрирования взята ось этого витка?

Решение. Магнитная индукция поля, созданного кольцевым током, найдена в задаче 1.1, и тогда

$$\int \mathbf{B} d\mathbf{l} = \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{\mu_0 I R^2 dx}{2(R^2 + x^2)^{3/2}}.$$

Для вычисления интеграла изменим переменную интегрирования в соответствии с рис. 1.20.

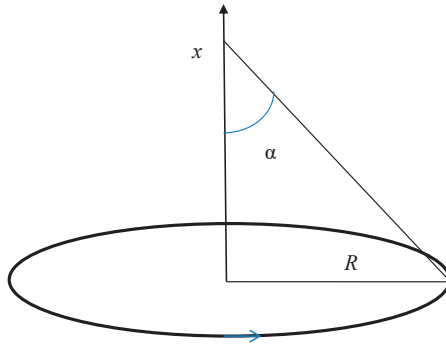


Рис. 1.20

$$x = R \cot \alpha, \quad dx = -\frac{R d\alpha}{\sin^2 \alpha},$$

$$R^2 + x^2 = \frac{R^2}{\sin^2 \alpha},$$

$$\int \mathbf{B} d\mathbf{l} = \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{\mu_0 I R^2 dx}{2(R^2 + x^2)^{3/2}} = -\frac{\mu_0 I}{2} \int_{\pi}^0 \sin \alpha d\alpha = \mu_0 I.$$

Полученный результат можно объяснить, используя теорему о циркуляции вектора $\mathbf{B}$. Если рассмотреть контур в виде

прямой, совпадающей с осью кольцевого тока, концы которой неким образом соединены, то циркуляция вектора $\mathbf{B}$ по этому контуру действительно будет равна $\mu_0 I$.

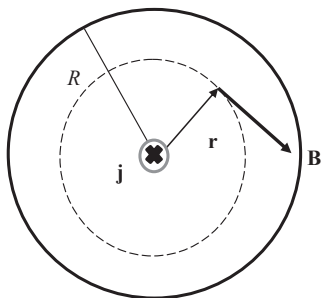


Рис. 1.21

1.18. По прямому проводнику в виде длинного цилиндра радиусом R протекает ток плотности $\mathbf{j}$. Какова индукция магнитного поля, созданного этим током внутри и вне проводника?

Решение. Магнитное поле прямого тока обладает осевой симметрией, и линии магнитной индукции имеют вид концентрических окружностей (рис. 1.21).

Используем теорему о циркуляции вектора $\mathbf{B}$, взяв в качестве замкнутого контура L окружность радиусом r (при этом $r \leq R$):

$$\begin{aligned} \int_L \mathbf{B} d\mathbf{l} &= \mu_0 I_\Sigma, \\ \int_L \mathbf{B} d\mathbf{l} &= \int_L B dl \cos 0 = B 2\pi r, \quad I_\Sigma = jS = j\pi r^2, \\ B &= \frac{1}{2} \mu_0 j r. \end{aligned}$$

В векторном виде эта формула принимает вид

$$\mathbf{B} = \frac{1}{2} \mu_0 |\mathbf{j} \times \mathbf{r}|.$$

При ($r > R$) весь ток, протекающий по сечению проводника, охватывается контуром и не зависит от его радиуса (рис. 1.22), поэтому

$$\begin{aligned} \int_L \mathbf{B} d\mathbf{l} &= B 2\pi r, \quad I_\Sigma = jS = j\pi R^2, \\ B &= \mu_0 j \frac{R^2}{2r}. \end{aligned}$$

В векторном виде эта формула принимает вид

$$\mathbf{B} = \mu_0 |\mathbf{j} \times \mathbf{r}| \frac{R^2}{2r^2}.$$

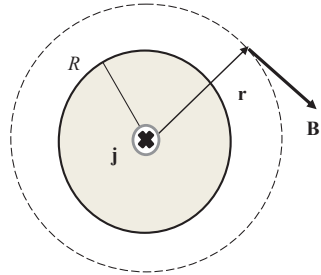


Рис. 1.22

1.19. Внутри проводника круглого сечения цилиндрическая полость, ось которой параллельна оси проводника и смещена относительно нее на расстояние l (рис. 1.23). Чему равна индукция магнитного поля $\mathbf{B}$ внутри этой полости, если по проводнику протекает ток I ?

Решение. Магнитное поле $\mathbf{B}$ в полости можно представить следующим образом:

$$\mathbf{B} = \mathbf{B}_0 - \mathbf{B}'.$$

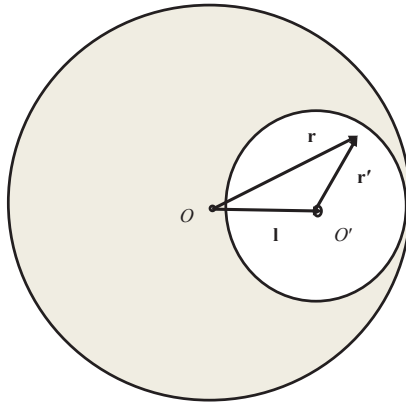


Рис. 1.23

В этом выражении $\mathbf{B}_0$ — индукция поля в данной точке проводника, сечение которого представляет круг без выреза, а $\mathbf{B}'$ — индукция поля, создаваемого в данной точке вырезанной ча-

стью проводника. Воспользуемся результатом, полученным в задаче 1.18:

$$\mathbf{B}_0 = \frac{1}{2} \mu_0 |\mathbf{j} \times \mathbf{r}|, \quad \mathbf{B}' = \frac{1}{2} \mu_0 |\mathbf{j} \times \mathbf{r}'|,$$

$$\mathbf{B} = \frac{1}{2} \mu_0 |\mathbf{j} \times (\mathbf{r} - \mathbf{r}')| = \frac{1}{2} \mu_0 |\mathbf{j} \times \mathbf{l}|.$$

Любопытный результат: поле, существующее в полости, является однородным.

1.20. Поток протонов, летящих вдоль оси x , обладает осевой симметрией, в результате чего в пространстве внутри него возникает магнитное поле, индукция которого определяется формулой $B = B_0 r^\alpha$, в которой $\mathbf{B}_0$ — поле на оси x ; r — расстояние от оси до точки наблюдения; α — параметр. Чему равна плотность j тока на расстоянии r от оси?

Решение. Воспользуемся теоремой о циркуляции и выберем замкнутый контур в виде окружности радиуса r .

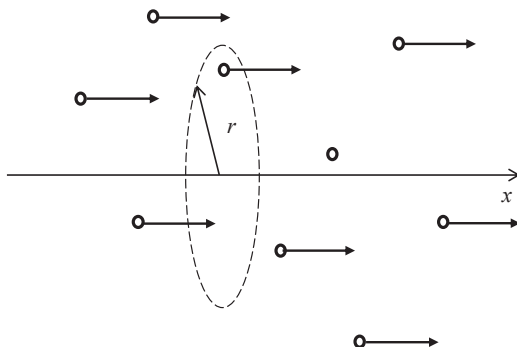


Рис. 1.24

Продифференцируем это равенство:

$$B_0 r^\alpha (\alpha + 1) = \mu_0 j(r) r.$$

Получим ответ:

$$B_0 r^\alpha (\alpha + 1) = \mu_0 j(r) r,$$

$$j(r) = \frac{B_0}{\mu_0} (\alpha + 1) r^{\alpha-1}.$$

1.21. Магнитный поток в центре длинного соленоида, по которому протекает некоторый ток, равен Φ_0 . Чему будет равен магнитный поток через торец соленоида?

Решение. Возьмем второй такой же соленоид и соединим их торцы так, чтобы образовался один длинный соленоид. Магнитное поле внутри длинного соленоида является однородным и не зависит от его длины. Поэтому в месте стыковки соленоидов магнитный поток также будет равен Φ_0 .

С другой стороны, индукция поля в месте стыковки по принципу суперпозиции равна сумме полей, то же можно сказать и о магнитном потоке. Это означает, что магнитный поток через торец соленоида равен $\Phi_0 / 2$.

1.22. Ось катушки длиной l направлена вдоль оси x , ее радиус R . На катушку в один слой намотан провод, по которому протекает ток I . Чему равна магнитная индукция поля в центре катушки, если число витков, приходящееся на единицу ее длины, равно n ?

Решение. Представим катушку в виде множества тонких колец и рассмотрим одно из них, имеющее ширину dx и находящееся на расстоянии x от центра катушки (рис. 1.25). Это кольцо создает в точке O поле с индукцией

$$dB = \frac{\mu_0 dIR^2}{2(R^2 + x^2)^{3/2}} = \frac{\mu_0 n I dx R^2}{2(R^2 + x^2)^{3/2}}.$$

Здесь мы воспользовались результатом, полученным в задаче 1.1.

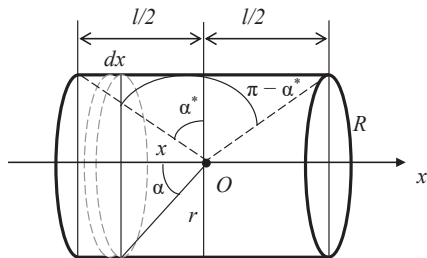


Рис. 1.25

Для того чтобы проинтегрировать это выражение, перейдем к угловой переменной:

$$x = R \cot \alpha, \quad dx = -\frac{R d\alpha}{\sin^2 \alpha},$$

$$R^2 + x^2 = r^2 = \frac{R^2}{\sin^2 \alpha},$$

и тогда

$$B = \int_{-l/2}^{l/2} \frac{\mu_0 n I dx R^2}{2(R^2 + x^2)^{3/2}} = -\frac{1}{2} \mu_0 n I \int_{\alpha^*}^{\pi - \alpha^*} \sin \alpha d\alpha =$$

$$= \mu_0 n I \cos \alpha^* = \mu_0 n I \frac{l/2}{\sqrt{(l/2)^2 + R^2}} = \frac{\mu_0 n I}{\sqrt{1 + \left(\frac{2R}{l}\right)^2}}.$$

Для бесконечно длинного соленоида мы приходим к известной формуле $B = \mu_0 n I$.

1.23. По длинному соленоиду, содержащему n витков на единицу его длины и имеющему сечение радиусом R , протекает ток I . Ось соленоида совпадает с осью x , и его правый край имеет координату $x = 0$. По какому закону индукция магнитного поля B зависит от координаты x ?

Решение. Для решения воспользуемся способом, описанным в предыдущей задаче. Пусть точка O находится теперь справа от торца соленоида на расстоянии x от него (рис. 1.26). Представим катушку в виде множества тонких колец и рассмотрим одно из них, имеющее ширину dz и находящееся на расстоянии z от торца соленоида.

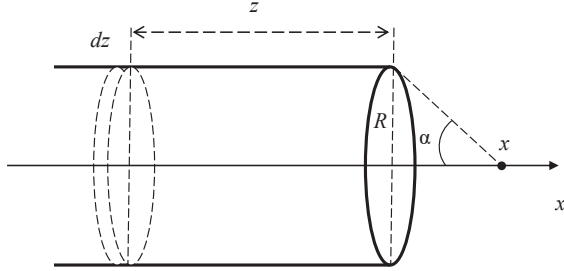


Рис. 1.26

Созданная этим кольцом в точке O индукция поля

$$dB = \frac{\mu_0 n I dz R^2}{2(R^2 + (z+x)^2)^{3/2}}.$$

Проинтегрируем:

$$B = \int_0^{\infty} \frac{\mu_0 n I dz R^2}{2(R^2 + (z+x)^2)^{3/2}} = \int_{-x}^{\infty} \frac{\mu_0 n I dz R^2}{2(R^2 + z^2)^{3/2}}.$$

Перейдем к угловой переменной подобно току, как было сделано в задаче 1.24, и получим

$$\begin{aligned} B &= \int_{-x}^{\infty} \frac{\mu_0 n I dz R^2}{2(R^2 + z^2)^{3/2}} = -\frac{1}{2} \mu_0 n I \int_{\alpha^*}^0 \sin \alpha d\alpha = \\ &= \frac{1}{2} \mu_0 n I (1 - \cos \alpha^*) = \frac{1}{2} \mu_0 n I \left(1 - \frac{x}{\sqrt{x^2 + R^2}} \right). \end{aligned}$$

Легко увидеть, что на торце, где $x=0$, $B = \frac{1}{2}\mu_0 nI$, что составляет половину индукции поля в центре соленоида.

Поле внутри соленоида описывается точно так же, и для этого надо взять $x < 0$:

$$B = \frac{1}{2}\mu_0 nI \left(1 + \frac{x}{\sqrt{x^2 + R^2}} \right).$$

1.24. На длинную прямую трубку круглого сечения радиусом R в один слой практически вплотную, виток к витку, намотана лента шириной h . Чему равна магнитная индукция поля, созданного этой лентой, если по ней протекает ток I ?

Решение. Вектор плотности тока, протекающего в ленте, можно представить в виде суммы

$$\mathbf{j} = \mathbf{j}_\perp + \mathbf{j}_\parallel.$$

Смысл этих векторов понятен из рис. 1.27, *a*, а значение $\sin \alpha$ легко определить из рис. 1.27, *б*:

$$j_\parallel = j \sin \alpha = \frac{I}{h} \frac{h}{2\pi R} = \frac{I}{2\pi R},$$

$$j_\perp = I \cos \alpha = \frac{I}{h} \sqrt{1 - \sin^2 \alpha} = \frac{I}{h} \sqrt{1 - \left(\frac{h}{2\pi R} \right)^2}.$$

Индукция магнитного поля внутри трубки определяется составляющей $j_\perp$:

$$B = \mu_0 j_\perp = \mu_0 \frac{I}{h} \sqrt{1 - \left(\frac{h}{2\pi R} \right)^2}, \quad (r < R),$$

а вне ее

$$B = \mu_0 j_\parallel = \mu_0 \frac{I}{2\pi R}, \quad (r > R).$$

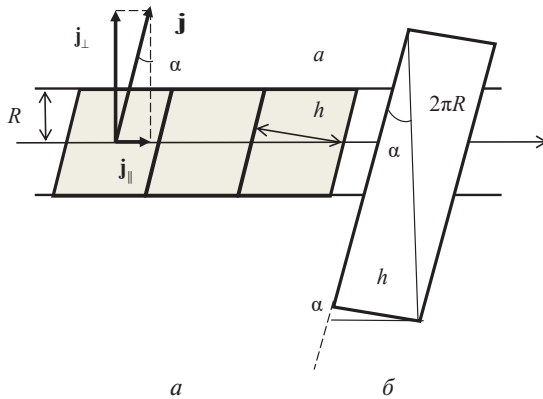


Рис. 1.27

1.25. На рис. 1.28 изображена цепь, состоящая из источника постоянного тока, резистора R и двух длинных проводников круглого сечения, сопротивлением которых можно пренебречь. Радиус их сечения меньше расстояния между ними в $\eta = 20$ раз. При каком значении R сила взаимодействия между проводниками равна нулю?

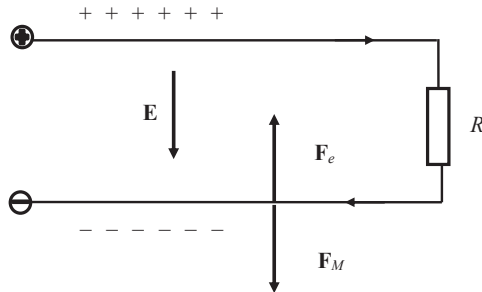


Рис. 1.28

Решение. Между проводниками существует разность потенциалов и избыточные заряды разных знаков с линейной плотностью λ .

Сила их взаимодействия, приходящаяся на единицу длины,

$$F_e = \lambda E = \lambda \frac{\lambda}{2\pi\epsilon_0 l} = \frac{\lambda^2}{2\pi\epsilon_0 l},$$

где l — расстояние между проводниками.

Наряду с электрической, на проводники действует и магнитная сила

$$F_M = IBa = I \frac{\mu_0 I}{2\pi l} a,$$

где a — длина проводника. Таким образом, на единицу его длины действует сила

$$F_M = \frac{\mu_0 I^2}{2\pi l}.$$

Их отношение

$$\frac{F_M}{F_e} = \epsilon_0 \mu_0 \left(\frac{I}{\lambda} \right)^2.$$

Оказывается, величины I и λ можно связать друг с другом — для этого воспользуемся решением вспомогательной задачи [1, задача 4.10]. В ней получена формула для емкости C_1 , приходящейся на единицу длины двух параллельных проводников, радиус сечения которых меньше расстояния между ними в η раз:

$$C_1 = \frac{\pi\epsilon_0}{\ln \eta}.$$

Тогда

$$\lambda = C_1 U = \frac{\pi\epsilon_0}{\ln \eta} U = \frac{\pi\epsilon_0}{\ln \eta} IR,$$

$$\frac{I}{\lambda} = \frac{\ln \eta}{\pi\epsilon_0 R}, \quad \frac{F_M}{F_e} = \epsilon_0 \mu_0 \left(\frac{\ln \eta}{\pi\epsilon_0 R} \right)^2.$$

Сила взаимодействия между проводами равна нулю, если

$$\frac{F_M}{F_e} = 1, \quad \varepsilon_0 \mu_0 \left(\frac{\ln \eta}{\pi \varepsilon_0 R} \right)^2 = 1,$$

$$R_0 = \sqrt{\frac{\mu_0}{\varepsilon_0}} \frac{\ln \eta}{\pi} = 300 \text{ Ом.}$$

Мы получили любопытный результат: если $R \succ R_0$, то $\frac{F_M}{F_e} < 1$ и $F_e \succ F_M$, то есть встречные токи не отталкиваются, как это обычно принято считать, а притягиваются!

1.26. По проводу круглого сечения протекает ток I . Чему равен поток магнитного поля через половину осевого сечения провода, как показано на рис. 1.29, в расчете на единицу длины?

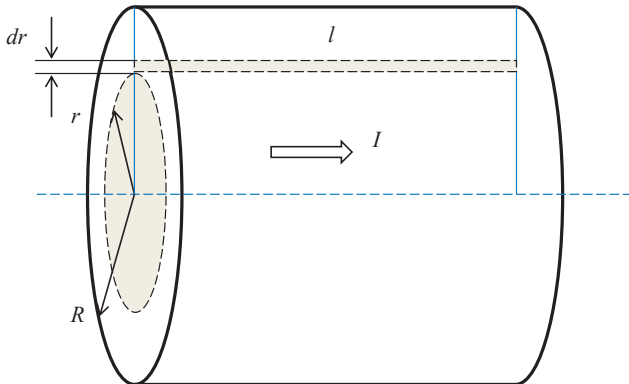


Рис. 1.29

Решение. Введем плотность тока

$$j = \frac{I}{\pi R^2},$$

и, применив теорему о циркуляции, найдем индукцию магнитного поля в проводе как функцию расстояния r от его оси

$$\oint \mathbf{B} d\mathbf{l} = \oint B dl = \mu_0 j \pi r^2,$$

$$B 2\pi r = \mu_0 j \pi r^2,$$

$$B = \frac{1}{2} \mu_0 \frac{I}{\pi R^2} r.$$

Поток магнитного поля через половину осевого сечения провода

$$\begin{aligned} \Phi &= \int \mathbf{B} d\mathbf{S} = \int B dS = \int_0^R \frac{1}{2} \mu_0 \frac{I}{\pi R^2} r l dr = \\ &= \frac{1}{4} \mu_0 \frac{I}{\pi R^2} l R^2 = \mu_0 \frac{I}{4\pi}. \end{aligned}$$

1.27. Во сколько раз магнитный поток через торец длинного соленоида меньше, чем в его центральной области?

Решение. Разделим мысленно длинный соленоид пополам. Суммарный магнитный поток через образовавшиеся торцы совпадает с магнитным потоком в центральной области соленоида:

$$2\Phi = \Phi_0,$$

$$\Phi = \frac{\Phi_0}{2}.$$

1.28. На тороидальный каркас прямоугольного сечения намотано $N = 2 \cdot 10^3$ витков провода (рис. 1.30). По обмотке протекает ток $I = 0,85$ А. Чему равен магнитный поток через сечение тороида, если отношение внешнего и внутреннего диаметров $\eta = 1,6$?

Решение. Для вычисления индукции магнитного поля применим теорему о циркуляции, взяв в качестве контура окружность радиусом r с центром в точке O :

$$\int_{(L)} \mathbf{B} d\mathbf{L} = \int_{(L)} B dL = B 2\pi r = \mu_0 NI,$$

$$B = \frac{\mu_0 NI}{2\pi r}.$$

Магнитный поток через сечение тороида найдем по формуле

$$\begin{aligned} \Phi &= \int_{(L)} \mathbf{B} d\mathbf{S} = \int_{(L)} B dS = \int_a^b \frac{\mu_0 NI}{2\pi r} h dr = \\ &= \frac{\mu_0 NI}{2\pi} h \ln \eta = 8 \text{ мкВб}. \end{aligned}$$

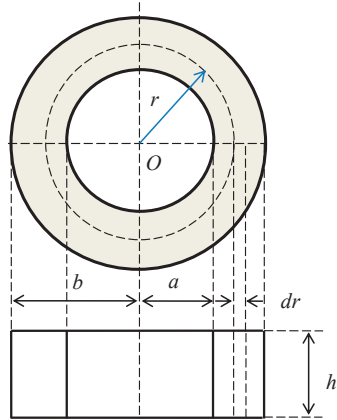


Рис. 1.30

1.29. Круговой ток радиусом $R = 50$ мм создает в центре витка поле с индукцией $B = 24$ мкТл. Чему равен магнитный момент этого тока?

Решение. Поле в центре кольцевого тока

$$B = \frac{\mu_0 I}{2R}.$$

Магнитный момент кольцевого тока определяется формулой

$$p_m = IS = I\pi R^2 = \frac{2RB}{\mu_0} \pi R^2 = \frac{2\pi R^3 B}{\mu_0} = 15 \text{ мА} \cdot \text{м}^2.$$

1.30. Провод намотан виток к витку на половину тора, имеющего круглое сечение диаметром $d = 5$ см (рис. 1.31). Число витков $N = 500$. Чему равен магнитный момент этой системы, если по проводу протекает ток $I = 0,8$ А?

Решение. Представим тороид в виде множества тонких колец, одно из которых изображено на рис. 1.31. Магнитный мо-

мент $d\mathbf{p}_m$ этого кольца направлен по нормали к нему. Глядя на рисунок, нетрудно сообразить, что результирующий вектор магнитного момента этой системы будет направлен вдоль оси x .

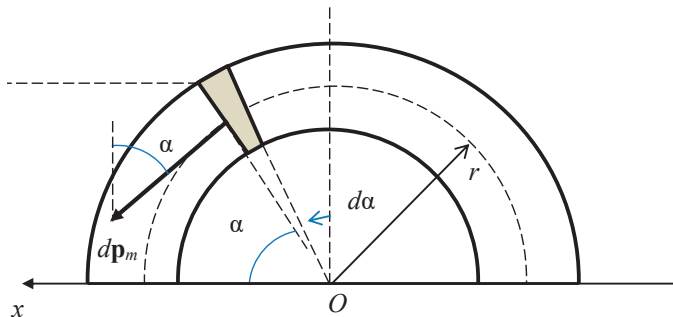


Рис. 1.31

Введем параметр

$$n = \frac{N}{\pi},$$

означающий число витков, которые находятся на длине осевой линии тороида, соответствующей единичному углу, проведенному из точки O .

Магнитный момент этого кольца

$$dp_m = dIS = dI \frac{\pi d^2}{4} = nId\alpha \frac{\pi d^2}{4} = Id\alpha \frac{Nd^2}{4},$$

и его проекция на ось x

$$dp_{mx} = dp_m \sin \alpha = \frac{INd^2}{4} \sin \alpha d\alpha.$$

Проинтегрируем и получим ответ:

$$p_m = \int_0^\pi \frac{INd^2}{4} \sin \alpha d\alpha = \frac{INd^2}{2} = 0,5 \text{ А} \cdot \text{м}^2.$$

1.31. Плоская спираль, содержащая $N = 100$ витков, образована тонким изолированным проводом, плотно намотанным виток к витку (рис. 1.32). Ее внутренний размер $a = 50$ мм, внешний $b = 100$ мм. Вычислить магнитную индукцию в центре спирали и ее магнитный момент, если по спирали протекает ток $I = 8$ А.

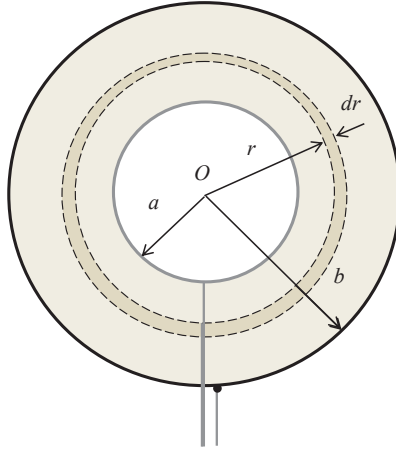


Рис. 1.32

Решение. Выделим на спирали тонкое кольцо радиусом r и толщиной dr . Ток dI , протекающий по нему, можно представить в виде

$$dI = \frac{NI}{b-a} dr.$$

Этот кольцевой ток создает в центре спирали магнитное поле

$$dB = \frac{\mu_0}{2r} \frac{NI}{b-a} dr,$$

а его магнитный момент dp_m можно записать в виде

$$dp_m = dI \pi r^2 = \frac{NI}{b-a} \pi r^2 dr.$$

Проведя интегрирование, получим ответы:

$$B = \int_a^b \frac{\mu_0 NI}{2(b-a)} \frac{dr}{r} = \frac{\mu_0 NI}{2(b-a)} \ln \frac{b}{a} = 7 \text{ мкТл},$$

$$p_m = \int_a^b \frac{NI}{b-a} \pi r^2 dr = \frac{NI}{3(b-a)} \pi (b^3 - a^3) =$$

$$= \frac{\pi}{3} NI (b^2 + ab + a^2) = 15 \text{ МА} \cdot \text{м}^2.$$

1.32. Тонкий диск радиусом R , вырезанный из диэлектрика, приведен во вращение вокруг своей оси. На одну из его плоскостей нанесли заряд, поверхностная плотность которого равна σ . Вычислить магнитную индукцию в центре диска и его магнитный момент, если угловая скорость вращения равна ω .

Решение. Выделим на диске тонкое кольцо радиусом r и толщиной dr (рис. 1.33). Заряд, находящийся на нем, равен

$$dq = \sigma dS = \sigma 2\pi r dr.$$

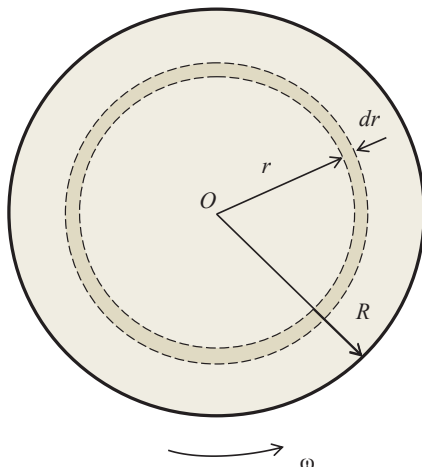


Рис. 1.33

Вращение диска приводит к тому, что в этом кольце возникает ток

$$dI = dq \cdot v = dq \frac{\omega}{2\pi} = \sigma \omega r dr.$$

Индукция поля в центре этого кольцевого тока

$$dB = \frac{\mu_0 dI}{2r} = \frac{\mu_0 \sigma \omega r dr}{2r} = \frac{1}{2} \mu_0 \sigma \omega dr,$$

а его магнитный момент

$$dp_m = dI \pi r^2 = \sigma \omega \pi r^3 dr.$$

Проведя интегрирование, получим ответы:

$$B = \int_0^R \frac{1}{2} \mu_0 \sigma \omega dr = \frac{1}{2} \mu_0 \sigma \omega R,$$

$$p_m = \int_0^R \sigma \omega \pi r^3 dr = \frac{1}{4} \mu_0 \sigma \pi \omega R^4.$$

1.33. На поверхности тонкой диэлектрической сферы радиусом R находится заряд с поверхностной плотностью σ . Сферу привели во вращение с угловой скоростью ω вокруг ее оси (рис. 1.34). Чему равна индукция магнитного поля в центре сферы?

Решение. Представим поверхность сферы в виде множества тонких колец и рассмотрим одно из них, изображенное на рис. 1.34.

Заряд, находящийся на нем,

$$dq = \sigma dS = \sigma 2\pi r dl = \sigma 2\pi R \sin \alpha dl = \sigma 2\pi R \sin \alpha R d\alpha.$$

При вращении сферы по кольцу протекает ток

$$dI = dqv = \sigma \omega R \sin \alpha R d\alpha.$$

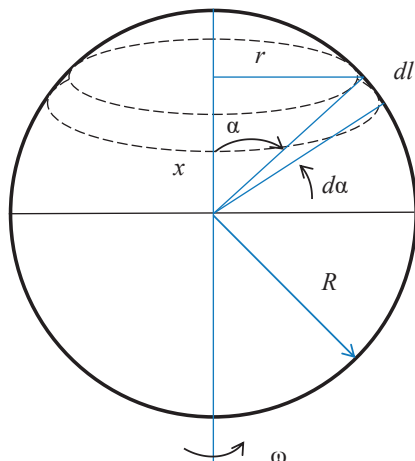


Рис. 1.34

Индукция поля на оси кольцевого тока описывается следующей формулой (см. задачу 1.1):

$$dB = \frac{\mu_0 dI r^2}{2(r^2 + x^2)^{3/2}} = \frac{\mu_0 dI r^2}{2R^3} = \frac{1}{2} \mu_0 \sigma \omega R d\alpha \sin^3 \alpha.$$

Окончательно получим

$$B = \int_0^\pi \frac{1}{2} \mu_0 \sigma \omega R \sin^3 \alpha d\alpha = -\frac{1}{2} \mu_0 \sigma \omega R \int_0^\pi (1 - \cos^2 \alpha) d \cos \alpha = \frac{2}{3} \mu_0 \sigma \omega R.$$

1.34. Непроводящий шар радиусом R и массой m вращается с угловой скоростью ω вокруг своей оси. По шару равномерно распределен заряд q . Чему равен магнитный момент шара? Как он связан с моментом его импульса?

Решение. Представим шар в виде множества тонких цилиндров, оси которых совпадают с осью вращения, и рассмотрим один из них (рис. 1.35). Объемная плотность заряда ρ_E одинакова во всех частях шара, поэтому заряд dq , сосредоточен-

ный в объеме dV в пределах тонкого цилиндрического слоя ($r, r + dr$), можно представить как

$$dq = \rho_E dV.$$

При вращении с угловой скоростью ω этот заряд создает кольцевой ток

$$dI = dqv = \rho_E dV \frac{\omega}{2\pi},$$

магнитный момент которого

$$dp_m = dIS = \rho_E dV \frac{\omega}{2\pi} \pi r^2 = \frac{1}{2} \rho_E \omega r^2 dV.$$

Магнитный момент шара, таким образом, можно записать как

$$p_m = \int_V \frac{1}{2} \rho_E \omega r^2 dV = \frac{1}{2} \rho_E \omega \int_V r^2 dV.$$

Момент импульса тела L , вращающегося относительно закрепленной оси z , равен

$$L = I_z \omega,$$

где I_z — момент инерции тела относительно этой оси, определяемый формулой

$$I_z = \int_V dm r^2 = \rho \int_V dV r^2,$$

при этом ρ — плотность вещества. И тогда

$$L = \rho \omega \int_V dV r^2.$$

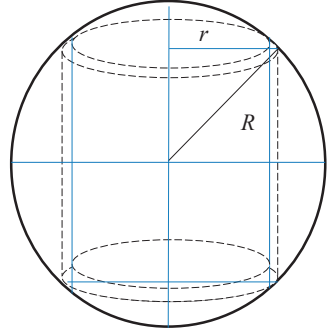


Рис. 1.35

Связь между магнитным моментом и моментом импульса:

$$\frac{p_m}{L} = \frac{\rho_E}{2\rho} \frac{V}{V} = \frac{q}{2m}, \quad p_m = \frac{q}{2m} L.$$

Для шара

$$I_z = \frac{2}{5} mR^2, \quad L = \frac{2}{5} mR^2 \omega,$$

$$p_m = \frac{q}{2m} \frac{2}{5} mR^2 \omega = \frac{1}{5} qR^2 \omega.$$

1.35. Длинный цилиндр радиусом R вырезан из однородного диэлектрика с проницаемостью ϵ . Диэлектрик поляризован статически так, что вектор $\mathbf{P} = \alpha \mathbf{r}$, где α — постоянная величина, а вектор $\mathbf{r}$ лежит в плоскости, перпендикулярной оси цилиндра, направлен радиально и по модулю равен расстоянию от оси до точки наблюдения. Цилиндр вращается вокруг своей оси с угловой скоростью ω . Чему равна магнитная индукция поля на его оси?

Решение. Представим цилиндр в виде множества тонких цилиндров, оси которых совпадают с осью вращения, и рассмотрим один из них (рис. 1.36).

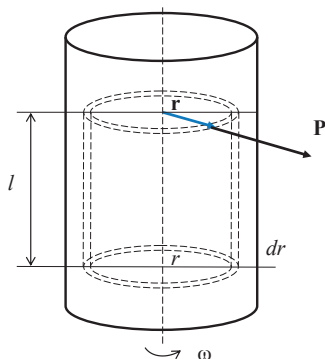


Рис. 1.36

Он имеет высоту l , радиус r и толщину стенок dr . В этом цилиндрическом слое локализован связанный заряд

$$dq' = \rho'(r) dV = \rho'(r) 2\pi r l dr,$$

где $\rho'(r)$ — объемная плотность связанных зарядов в диэлектрике, которая определяется его поляризованностью [2]:

$$\rho'(r) = -\nabla \mathbf{P} = -\alpha \nabla \mathbf{r} = -2\alpha.$$

При вращении с угловой скоростью ω этот заряд создает кольцевой ток

$$dI = dq'v = \rho'(r)2\pi r l dr \frac{\omega}{2\pi} = -2\alpha r l \omega dr.$$

Вращающийся цилиндр создает поле подобно соленоиду, индукция поля которого определяется формулой $B = \mu_0 In$, где n — число витков, приходящееся на единицу его длины.

По аналогии магнитное поле, создаваемое током длинного цилиндрического слоя, можно записать в виде

$$dB = \mu_0 \left| \frac{dI}{l} \right| = \mu_0 2\alpha r \omega dr,$$

и тогда магнитная индукция поля на оси цилиндра

$$B = \int_0^R \mu_0 2\alpha r \omega dr = \mu_0 \alpha R^2 \omega.$$

1.36. Контур с током имеет вид, изображенный на рис. 1.37. Чему равна сила Ампера, действующая на единичный отрезок провода вблизи точки O , если по контуру протекает ток $I = 4$ А? Радиус полуокружности $R = 50$ мм.

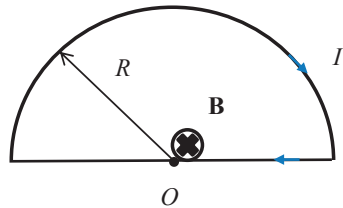


Рис. 1.37

Решение. Магнитное поле в точке O создается током, протекающим по дуге полуокружности, и его индукция равна

$$B = \frac{\mu_0 I}{4R}.$$

Согласно закону Ампера

$$F = IBl, \quad \frac{F}{l} = \frac{\mu_0 I^2}{4R} = 0,10 \text{ мН/м}.$$

1.37. Контур с током имеет вид, изображенный на рис. 1.38. Чему равна сила Ампера, действующая на единичный отрезок провода вблизи точки O , если по контуру протекает ток $I = 16$ А? Длина перемычки $a = 40$ см.

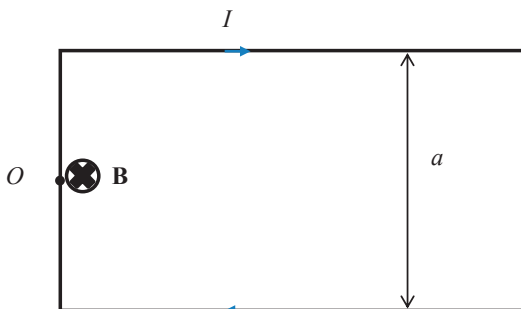


Рис. 1.38

Решение. Магнитное поле в точке O создается током, протекающим по двум длинным параллельным проводникам. Как показано в задаче 1.2, индукция поля в точке O определяется формулой

$$B = \frac{\mu_0 I}{4\pi r} = \frac{\mu_0 I}{2\pi a}.$$

Сила Ампера, действующая на единичный отрезок провода вблизи точки O , будет равна

$$F = IBl, \quad \frac{F}{l} = \frac{\mu_0 I^2}{\pi a} = 0,26 \text{ мН/м}.$$

1.38. Два проводника, лежащих в параллельных плоскостях, перпендикулярны друг другу (рис. 1.39). Расстояние между плоскостями равно a . Чему равно наибольшее значение силы, действующей на единичный участок длины одного проводника со стороны другого? В проводниках протекают одинаковые токи I .

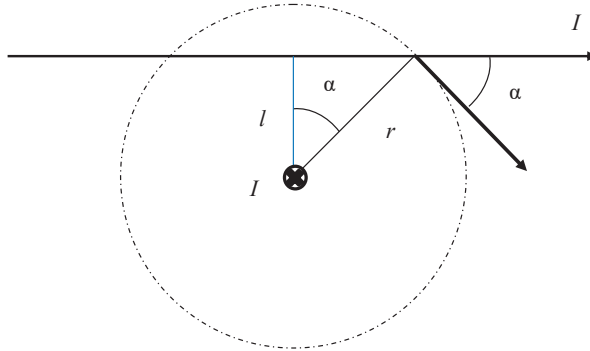


Рис. 1.39

Решение. Будем считать, что источником поля является проводник с током, ориентированный перпендикулярно плоскости чертежа.

Второй проводник находится в поле этого проводника, и на него действует сила Ампера. Выделим на нем малый участок длины dl , находящийся на расстоянии r от первого проводника:

$$\begin{aligned} dF = IBdl \sin \alpha &= \frac{\mu_0 I^2}{2r} dl \sin \alpha = \frac{\mu_0 I^2 \cos \alpha}{2a} dl \sin \alpha = \\ &= \frac{\mu_0 I^2}{4a} dl \sin 2\alpha. \end{aligned}$$

На единицу длины действует сила

$$\frac{dF}{dl} = \frac{\mu_0 I^2}{4a} \sin 2\alpha,$$

и ее максимальное значение

$$\frac{dF}{dl} = \frac{\mu_0 I^2}{4a}.$$

1.39. Прямоугольная П-образная рамка с одинаковой длиной сторон подвешена на металлических кронштейнах так, что может свободно вращаться относительно горизонтальной оси (рис. 1.40). По рамке протекает ток $I = 8$ А. При включении магнитного поля, направленного вертикально вверх, рамка отклонилась на угол $\theta = 20^\circ$ от вертикали. Чему равна индукция магнитного поля? Материал рамки — медь, площадь сечения провода $S = 2,5$ мм².

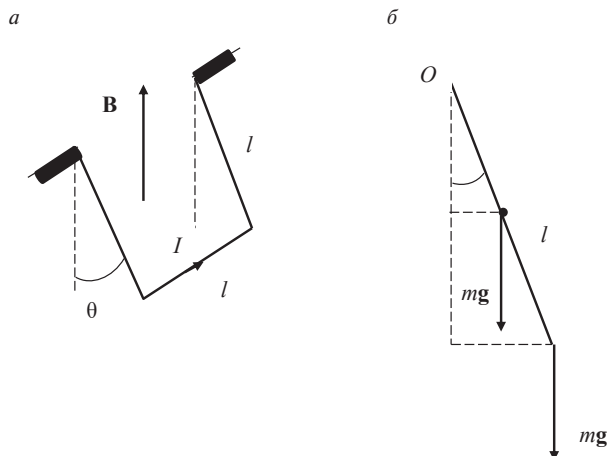


Рис. 1.40

Решение. Будем считать, что длина каждой из сторон равна l и их масса $m = \rho Sl$, где ρ — плотность меди. На рамку действуют силы тяжести и Ампера, и в состоянии равновесия моменты этих сил относительно оси вращения O уравниваются друг друга:

$$M_T = M_A,$$

$$2mg \frac{l}{2} \sin \theta + mgl \sin \theta = IBl \cdot l \cos \theta,$$

$$2mgl \sin \theta = IBl^2 \cos \theta,$$

$$B = \frac{2\rho g S}{I} \tan \theta = 20 \text{ мТл}.$$

1.40. По контуру, параметры которого указаны на рис. 1.41, протекает ток I . Контур находится в поле, создаваемом прямым током I_0 , направление которого перпендикулярно плоскости контура. Чему равен момент сил, действующих на контур?

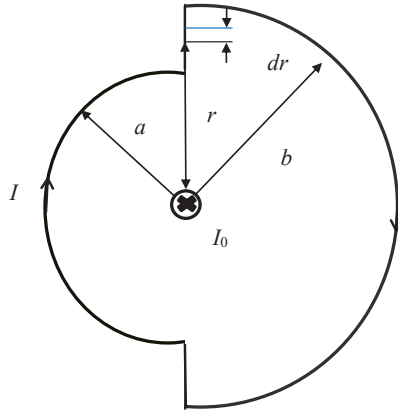


Рис. 1.41

Решение. Линии магнитной индукции поля, создаваемого током I_0 , имеют вид концентрических окружностей, центр которых совпадает с центрами окружностей, образующих данный контур, и сила Ампера на них не действует.

Эта сила действует только на два вертикальных участка, длина которых равна $b - a$. Эти силы параллельны, и для того чтобы найти момент этой пары сил, выделим на вертикальных участках контура малые элементы dr , находящиеся на расстоянии r от прямого тока. На каждый элемент действует момент силы

$$dM = dFr = IBdr = \frac{\mu_0 I_0 I}{2\pi r} r dr = \frac{\mu_0 I_0 I}{2\pi} dr.$$

Результирующий момент пары сил

$$M = \int_a^b \frac{\mu_0 I_0 I}{2\pi} dr = \frac{\mu_0 I_0 I}{\pi} (b - a).$$

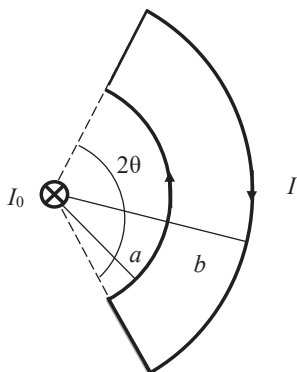


Рис. 1.42

1.41. По контуру, параметры которого указаны на рис. 1.42, протекает ток I . Контур находится в поле, создаваемом прямым током I_0 , направление которого перпендикулярно плоскости контура. Чему равен момент сил, действующих на контур?

Решение. Как отмечалось в предыдущей задаче, линии магнитной индукции поля, создаваемого током I_0 , имеют вид концентрических окружностей, центр которых совпадает с центрами окружностей, образующих данный контур, и сила Ампера на них не действует.

Эта сила действует только на два радиально направленных участка, длина которых равна $b - a$. Для вычисления момента этой пары сил воспользуемся расчетами, приведенными в предыдущей задаче, но учтем, что плечо пары сил теперь будет иным:

$$M = \int_{2a \sin \theta}^{2b \sin \theta} \frac{\mu_0 I_0 I}{2\pi} dr = \frac{\mu_0 I_0 I}{\pi} (b - a) \sin \theta.$$

1.42. На правом коромысле весов расположена катушка, помещенная между полюсами электромагнита (рис. 1.43). Слева, на расстоянии $l = 60$ см от точки O , к коромыслу подвешен груз, масса которого подобрана таким образом, что весы находятся в равновесии. После включения тока $I = 44$ мА через катушку баланс нарушился и восстановился после того, как на чашку добавили перегрузок $\Delta m = 60$ мг. Чему равна индукция магнитного поля в месте расположения катушки, если сечение катушки имеет площадь $S = 1$ см²?

Решение. При протекании тока катушка приобретает магнитный момент $p_m = INS$, направленный вдоль оси катушки.

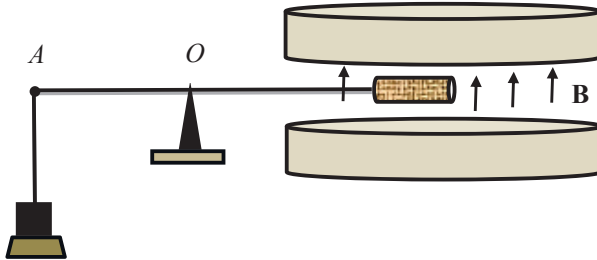


Рис. 1.43

Он приводит к возникновению момента силы

$$M = p_m B \sin 90^\circ = INSB,$$

для компенсации которого и используется дополнительный груз Δm :

$$INSB = \Delta mgl,$$

$$B = \frac{\Delta mgl}{INS} = 0,4 \text{ Тл.}$$

1.43. Плоская квадратная рамка с током $I = 1,8 \text{ А}$ имеет ось вращения, проходящую через середины ее противоположных сторон, имеющих длину $a = 8 \text{ см}$. В плоскости рамки находится длинный проводник с током $I_0 = 5 \text{ А}$, направление которого параллельно оси рамки, и расстояние между ними составляет $l = 1,5a$ (рис. 1.44). Какую работу совершают сторонние силы при повороте рамки вокруг оси на 180° ?

Решение. Работа, совершаемая сторонними силами при повороте контура с током I в магнитном поле, определяется формулой

$$A = I(\Phi_1 - \Phi_2),$$

где Φ_1 и Φ_2 — магнитные потоки, пронизывающие контур до и после поворота.

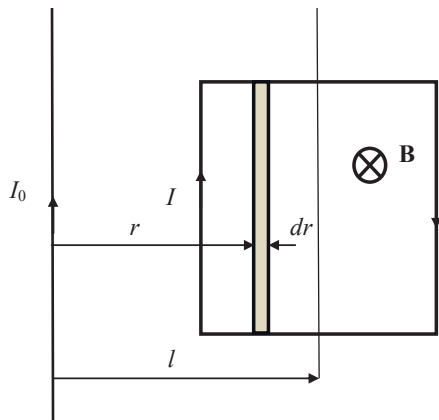


Рис. 1.44

Магнитный поток Φ_1 вычислим по формуле

$$\Phi_1 = \int_S \mathbf{B} d\mathbf{S} = \int_S B dS \cos 0^\circ = \int_{a/2}^{3a/2} \frac{\mu_0 I_0}{2\pi r} a dr = \frac{\mu_0 I_0}{2\pi} a \ln 3.$$

Учитывая, что $\Phi_2 = -\Phi_1$, получим ответ:

$$A = 2\Phi_1 = \frac{\mu_0 I_0}{\pi} a \ln 3 = 0,2 \text{ мкТл}.$$

1.44. По двум параллельным проводникам протекают токи одного направления $I_1 = I_2 = 3 \text{ А}$ (рис. 1.45). Под действием внешней силы F расстояние между проводниками увеличилось в $\eta = 2$ раза. Чему равна работа, совершенная силой Ампера, в расчете на единицу длины проводников?

Решение. Сила f_A , действующая на единицу длины второго проводника в поле, созданном первым током

$$dF_2 = I_2 B dl \sin 90^\circ, \quad f_A = \frac{dF_2}{dl} = I_2 B = \frac{\mu_0 I_2 I_1}{2\pi r}.$$

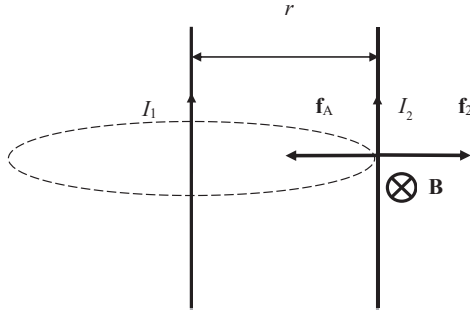


Рис. 1.45

Работа, совершаемая внешними силами, при удалении проводника с током I_2 в магнитном поле проводника с током I_1 в расчете на единицу длины определяется формулой

$$A_{\text{внеш}} = \int_r^{\eta r} f_2 dr,$$

$$f_2 = f_A \frac{dF_2}{dl} = I_2 B = \frac{\mu_0 I_2 I_1}{2\pi r},$$

$$A_{\text{внеш}} = \int_r^{\eta r} \frac{\mu_0 I_2 I_1}{2\pi r} dr = \frac{\mu_0 I_2 I_1}{2\pi} \ln \eta = 1,25 \text{ мкДж/м}.$$

Работа силы Ампера имеет обратный знак:

$$A_{\text{Амп}} = -1,25 \text{ мкДж/м}.$$

1.45. Две параллельные плоскости отстоят друг от друга на расстояние a . В них расположены длинные прямые проводники, по которым протекают одинаковые токи I . Проводники перпендикулярны друг другу (рис. 1.46). Какова максимальная сила взаимодействия, приходящаяся на единицу их длины?

Решение. Пусть проводник 1 (он перпендикулярен плоскости чертежа) создает в окружающем пространстве магнитное поле, в котором находится проводник 2 (рис. 1.46).

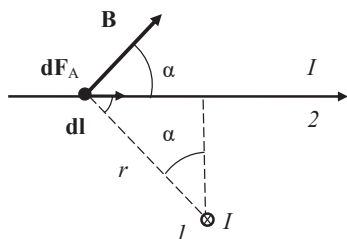


Рис. 1.46

Выделим на нем малый элемент dl . Сила Ампера dF_A , действующая на него, направлена к нам и равна по величине

$$dF_A = IBdl \sin \alpha.$$

Сила f , приходящаяся на единицу длины проводника, будет равна

$$\begin{aligned} f &= \frac{dF_A}{dl} = IB \sin \alpha = \frac{\mu_0 I^2 \sin \alpha}{2\pi r} = \\ &= \frac{\mu_0 I^2 \sin \alpha \cos \alpha}{2\pi a} = \frac{\mu_0 I^2 \sin 2\alpha}{4\pi a}. \end{aligned}$$

Это выражение принимает максимальное значение при $\alpha = 45^\circ$:

$$f_{\max} = \frac{\mu_0 I^2}{4\pi a}.$$

1.46. Электрическая цепь состоит из двух параллельных проводников. Один из них представляет собой половину цилиндра, вырезанного вдоль оси, а второй, тонкий, совпадает с осью этого цилиндра (рис. 1.47). По цепи протекает ток $I = 14$ А, радиус цилиндра $R = 50$ мм. Какова сила взаимодействия проводников, приходящаяся на единицу их длины?

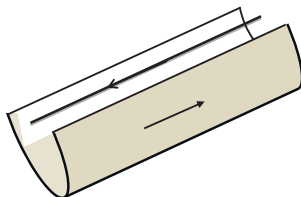


Рис. 1.47

Решение. Как показано в задаче 1.12, поле внешнего проводника на оси цилиндра определяется выражением

$$B = \frac{\mu_0 I}{\pi^2 R}.$$

Выделим на втором проводнике малый элемент $d\mathbf{l}$. Сила Ампера $d\mathbf{F}_A$, действующая на него, направлена вдоль оси y (рис. 1.48) и равна по величине

$$dF_A = IBdl.$$

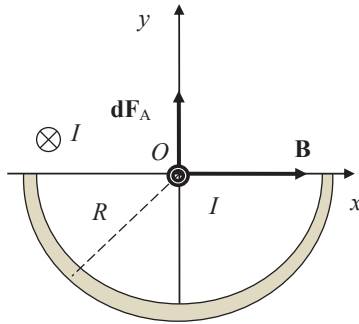


Рис. 1.48

Тогда сила f , приходящаяся на единицу длины этого проводника, будет равна

$$f = \frac{dF_A}{dl} = IB = \frac{\mu_0 I^2}{\pi^2 R} = 0,5 \text{ мН/м}.$$

1.47. В плоскости расположены два параллельных проводника, по которым протекают токи I_1 и I_2 . Один из них — тонкий провод, а второй представляет собой тонкую ленту. Их размеры указаны на рис. 1.49. Чему равна сила взаимодействия между ними, приходящаяся на единицу длины этих проводников?

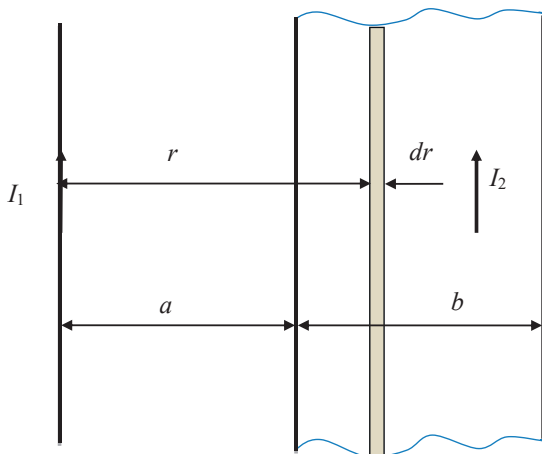


Рис. 1.49

Решение. Будем считать, что источником поля служит проводник с током I_1 . Представим ленту в виде тонких полос и рассмотрим одну из них, имеющую ширину dr и находящуюся на расстоянии r от тонкого провода.

По этой полоске протекает ток

$$dI_2 = \frac{I_2}{b} dr,$$

и на единицу ее длины действует сила Ампера

$$dF = dI_2 B = dI_2 \frac{\mu_0 I_1}{2\pi r} = \frac{\mu_0 I_1 I_2}{2\pi b r} dr.$$

Для того чтобы получить ответ, проинтегрируем это выражение:

$$dF = dI_2 B = dI_2 \frac{\mu_0 I_1}{2\pi r} = \frac{\mu_0 I_1 I_2}{2\pi b r} dr.$$

$$A = \int_a^{a+b} \frac{\mu_0 I_1 I_2}{2\pi b r} dr = \frac{\mu_0 I_1 I_2}{2\pi b} \ln \frac{a+b}{a}.$$

1.48. Система состоит из двух параллельных проводящих плоскостей, по которым протекает ток (рис. 1.50). Индукция магнитного поля в объеме между ними равна B , тогда как в окружающем пространстве поле отсутствует. Чему равна сила их магнитного взаимодействия в расчете на элемент поверхности единичной площади этих плоскостей?

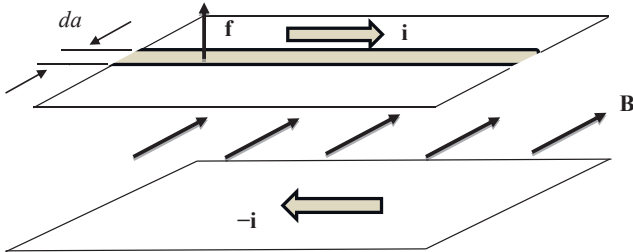


Рис. 1.50

Решение. Как показано в задаче 1.14, магнитное поле плоскости, по которой протекает ток с линейной плотностью i , является однородным, его индукция

$$B = \frac{1}{2} \mu_0 i.$$

Из условия задачи следует, что поле вне этой системы отсутствует, а это значит, что токи в плоскостях текут в противоположных направлениях и имеют одинаковую линейную плотность i .

Выделим на верхней плоскости тонкую полоску шириной da , по которой протекает ток

$$dI = ida.$$

На единицу длины этой полоски действует сила

$$dF = BdI = Bida = \frac{1}{2} \mu_0 i^2 da.$$

Если полоска имеет единичную ширину, то

$$f = \frac{dF}{da} = \frac{1}{2} \mu_0 i^2.$$

Это и есть ответ.

1.49. В однородное магнитное поле с индукцией $\mathbf{B}$ внесли плоскую пластину с током, имеющим линейную плотность i . Конфигурация линий магнитной индукции результирующего поля изображена на рис. 1.51. Каково направление тока, протекающего по пластине? Чему равна магнитная сила, действующая на элемент поверхности единичной площади пластины?

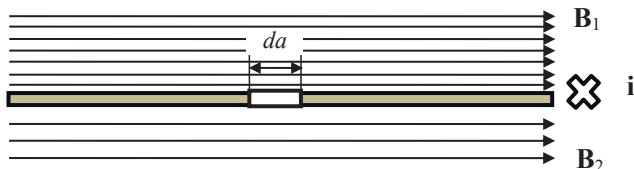


Рис. 1.51

Решение. Как видно из приведенного рисунка, линии магнитной индукции поля $\mathbf{B}_s$ пластины в верхнем полупространстве направлены вправо, в направлении внешнего поля, а в нижнем — влево, ослабляя его. Это возможно в том случае, когда ток в пластине направлен перпендикулярно плоскости чертежа от нас (предполагаем, что $B_s < B$).

Таким образом,

$$B + B_s = B_1,$$

$$B - B_s = B_2.$$

$$B = \frac{1}{2} (B_1 + B_2),$$

$$B_s = \frac{1}{2} (B_1 - B_2).$$

Линейную плотность тока i в плоскости найдем из формулы

$$B_s = \frac{1}{2} \mu_0 i,$$

$$i = \frac{2B_s}{\mu_0} = \frac{B_1 - B_2}{\mu_0}.$$

Выделим в пластинке тонкую полоску шириной da , по которой протекает ток

$$dI = ida.$$

На единицу длины этой полоски действует сила

$$dF = BdI = \frac{1}{2} (B_1 + B_2) \frac{B_1 - B_2}{\mu_0} da = \frac{1}{2\mu_0} (B_1^2 - B_2^2) da.$$

Если полоска имеет единичную ширину, то

$$f = \frac{dF}{da} = \frac{1}{2\mu_0} (B_1^2 - B_2^2).$$

Это и есть ответ.

1.50. Решить предыдущую задачу в случае, когда линии магнитной индукции имеют вид, изображенный на рис. 1.52.

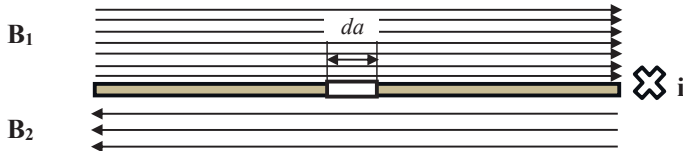


Рис. 1.52

Решение. Как видно из рисунка, линии магнитной индукции результирующего поля над пластиной направлены вправо,

а под ней — влево. Это означает, что индукция поля $\mathbf{B}_s$ по величине превышает индукцию внешнего поля $\mathbf{B}$.

Ход решения совпадает с представленным в задаче 1.47 и приводит к тому же результату:

$$f = \frac{dF}{da} = \frac{1}{2\mu_0} (B_1^2 - B_2^2).$$

1.51. В металлургическом производстве при работе с расплавленным металлом используют электромагнитные насосы, позволяющие перекачивать жидкий металл в процессе технологической обработки. Через участок трубопровода, помещенный в вертикальное магнитное поле $\mathbf{B}$, в горизонтальном направлении перпендикулярно течению металла пропускают ток I постоянной по сечению плотности (рис. 1.53). Чему равно избыточное давление, возникающее при этом в потоке металла? Параметры насоса: сила тока $I = 100$ А; $a = 2,0$ см; $B = 0,10$ Тл.

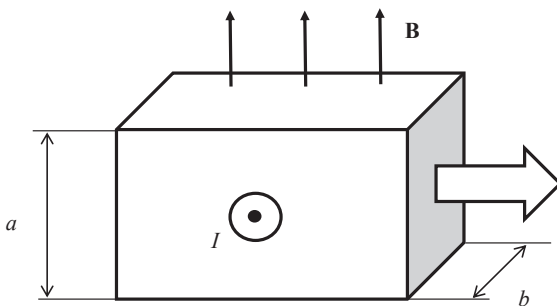


Рис. 1.53

Решение. Силу Ампера, действующую на металл со стороны магнитного поля, можно описать формулой

$$F = IBb.$$

Эта сила и создает избыточное давление в расплаве, величина которого

$$\Delta p = \frac{F}{ab} = \frac{IB}{a} = 0,5 \text{ кПа.}$$

1.52. По длинному прямому проводнику протекает ток I . Проводник представляет собой полый цилиндр, толщина стенок которого мала по сравнению с его радиусом R . Чему равно давление, которое испытывают стенки цилиндра?

Решение. Задача имеет осевую симметрию, и линии магнитной индукции представляют собой окружности с центрами на оси проводника. Как следует из теоремы о циркуляции вектора $\mathbf{B}$, поле внутри цилиндра отсутствует. Оно резко возрастает в пределах толщины стенок от нуля до B практически по линейному закону (рис. 1.54). Оценим величину магнитной индукции вблизи поверхности цилиндра с использованием теоремы о циркуляции:

$$\oint \mathbf{B} d\mathbf{l} = \mu_0 I,$$

$$B 2\pi R = \mu_0 I,$$

$$B = \frac{\mu_0 I}{2\pi R}.$$

Выделим малый элемент боковой поверхности длиной dl и шириной da . По нему протекает ток

$$dI = \frac{I}{2\pi R} da,$$

и на него действует сила Ампера, направленная согласно правилу правого винта к оси цилиндра:

$$dF = dI \langle B \rangle dl = dI \frac{1}{2} B dl = \frac{I}{2\pi R} da \cdot \frac{1}{2} \frac{\mu_0 I}{2\pi R} dl = \frac{\mu_0 I^2}{8\pi^2 R^2} dS,$$

$$dS = da \cdot dl.$$

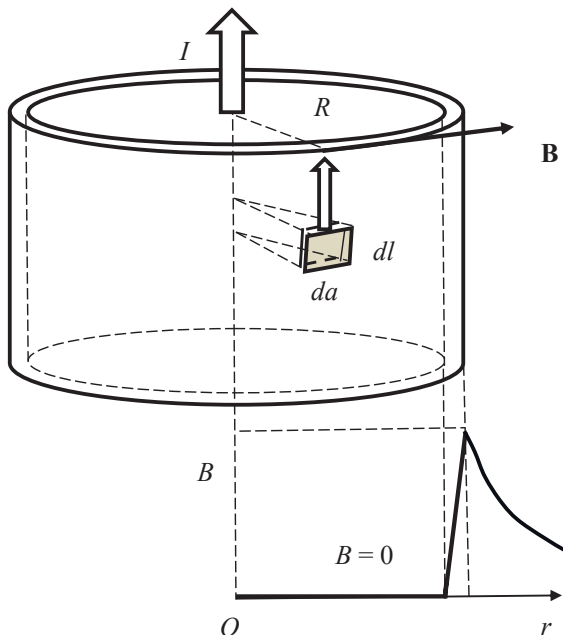


Рис. 1.54

Таким образом, давление, которое испытывают стенки цилиндра со стороны магнитного поля, равно

$$p = \frac{dF}{dS} = \frac{\mu_0 I^2}{8\pi^2 R^2},$$

и оно оказывает на стенки цилиндра сжимающее действие.

1.53. На длинную катушку круглого сечения радиусом R в один слой виток к витку намотан провод, диаметр которого позволяет получить n витков на единицу ее длины. При включении тока I в катушке возникают силы, действующие на провод, образующий ее обмотку. Чему равно давление, которое испытывает обмотка катушки?

Решение. Выделим на боковой поверхности катушки малый участок, линейные размеры которого указаны на рис. 1.55.

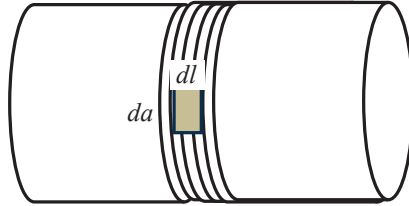


Рис. 1.55

Действующая на него в магнитном поле сила Ампера

$$dF = Ida \cdot (ndl) \langle B \rangle.$$

Как уже отмечалось в предыдущей задаче,

$$\langle B \rangle = \frac{1}{2} B = \frac{1}{2} \mu_0 n I,$$

и тогда

$$dF = Ida \cdot (ndl) \frac{1}{2} \mu_0 n I = \frac{1}{2} \mu_0 n^2 I^2 da dl.$$

Давление, которое испытывает обмотка катушки, найдем по формуле

$$p = \frac{dF}{dS} = \frac{1}{2al} \mu_0 n^2 I^2 da dl = \frac{1}{2} \mu_0 n^2 I^2.$$

1.54. В ламинарный поток электролита, имеющего удельное сопротивление ρ , внесли две пластины, плоскости которых параллельны друг другу и направлению этого потока (рис. 1.56). Пластины находятся на расстоянии d друг от друга и имеют площадь S каждая. Систему поместили в магнитное поле $\mathbf{B}$, линии индукции которого перпендикулярны направлению потока

и параллельны пластинам. Пластины соединили между собой изолированным проводом, имеющим сопротивление R . Чему равна выделяемая в нем мощность, если скорость потока равна v ? Необходимо оценить ее максимальное значение в зависимости от величины сопротивления R .

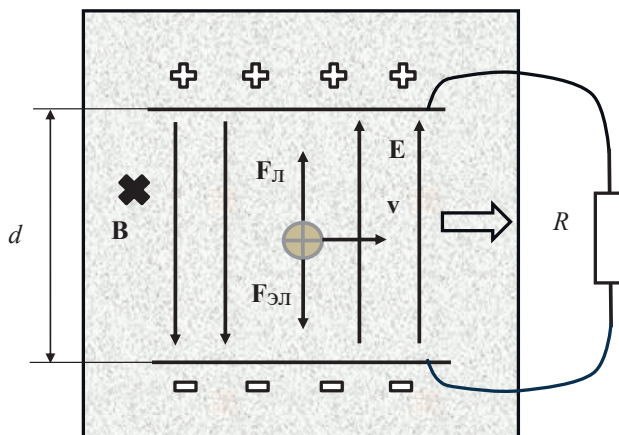


Рис. 1.56

Решение. Задача напоминает эффект Холла: на движущиеся в магнитном поле заряды действует сила Лоренца, что приводит к появлению нескомпенсированных зарядов разного знака на пластинах. Величина установившейся на них разности потенциалов определяется из условия

$$\begin{aligned} F_{\text{эл}} &= F_{\text{л}}, \\ qE &= qvB, \\ U = Ed &= vBd. \end{aligned}$$

По закону Ома

$$I = \frac{U}{R + R_{\text{жидк}}} = \frac{U}{R + \frac{\rho d}{S}}.$$

Выделяемая в проводе мощность

$$P = I^2 R = \left(\frac{U}{R + \frac{\rho d}{S}} \right)^2 R = \left(\frac{v B d}{R + \frac{\rho d}{S}} \right)^2 R.$$

Для определения максимальной мощности исследуем полученное выражение на экстремум:

$$\frac{dP}{dR} = 0,$$

$$\frac{d}{dR} \left(\frac{R}{\left(R + \frac{\rho d}{S} \right)^2} \right) = 0,$$

$$R = \frac{\rho d}{S}, \quad P_{\max} = \frac{(v B)^2 S d}{4 \rho}.$$

1.55. По алюминиевому проводу цилиндрического сечения радиуса $R = 1$ мм пропускают ток $I = 10$ А. Чему равна разность потенциалов, возникающая при этом между точками, лежащими на поверхности и на оси этого провода? Концентрация свободных электронов у алюминия $n = 0,6 \cdot 10^{29} \text{ м}^{-3}$.

Решение. На рис. 1.57 изображено сечение этого проводника.

При протекании тока в направлении *к нам* линии магнитной индукции представляют собой окружности. Носителями тока в металле являются электроны, и направление их движения противоположно. На электрон в магнитном поле действует сила Лоренца $\mathbf{F}_\text{л}$, под действием которой он будет смещаться к поверхности провода (рис. 1.57). При этом вблизи его осевой

линии появляются нескомпенсированные положительные заряды, в плоскости сечения проводника появляется поперечное электрическое поле $\mathbf{E}$ и, соответственно, электрическая сила $\mathbf{F}_{\text{эл}}$, действующая на электрон. Перераспределение зарядов будет происходить до тех пор, пока эти силы не станут равны:

$$\mathbf{F}_{\text{л}} = \mathbf{F}_{\text{эл}},$$

$$evB = eE,$$

$$E = vB.$$

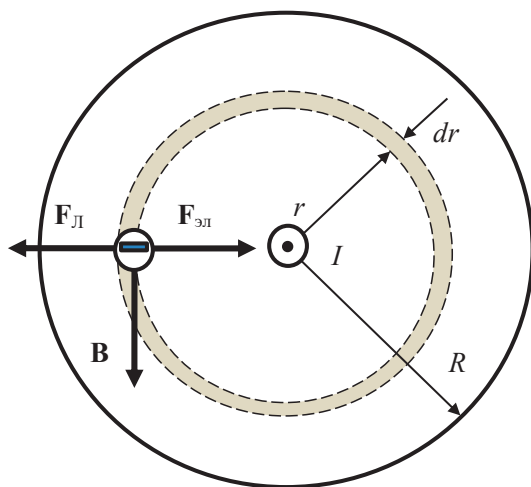


Рис. 1.57

Для оценки величины магнитного поля воспользуемся теоремой о циркуляции:

$$\oint \mathbf{B} d\mathbf{l} = \mu_0 I_{\Sigma},$$

$$B(r) 2\pi r = \mu_0 j \pi r^2,$$

$$B(r) = \mu_0 \frac{I}{2\pi R^2} r.$$

Скорость v носителей тока найдем из формулы

$$j = env,$$

$$v = \frac{j}{en} = \frac{1}{en} \frac{I}{\pi R^2}.$$

Тогда

$$E(r) = vB = \frac{1}{en} \frac{I}{\pi R^2} \mu_0 \frac{I}{2\pi R^2} r = \frac{\mu_0}{2en} \left(\frac{I}{\pi R^2} \right)^2 r.$$

Разность потенциалов связана с напряженностью электрического поля

$$E(r) = -\frac{d\varphi}{dr},$$

$$d\varphi = -E(r)dr,$$

$$|\Delta\varphi| = \int_0^R E(r)dr = \int_0^R \frac{\mu_0}{2en} \left(\frac{I}{\pi R^2} \right)^2 r dr =$$

$$= \frac{\mu_0}{4en} \left(\frac{I}{\pi R^2} \right)^2 R^2 = \frac{\mu_0}{4en} \left(\frac{I}{\pi R} \right)^2 = 2 \text{ пВ}.$$

1.56. Рассмотрим ситуацию, описанную в предыдущей задаче, и поменяем условия. Ток, имеющий плотность $j = 200 \text{ А/см}$, создает магнитное поле, индукция которого $B = 1 \text{ Тл}$. При этом напряженность поперечного электрического поля $E = 5 \text{ мкВ/см}$. Чему равна концентрация n электронов проводимости в металле?

Решение. Воспользуемся условием предыдущей задачи:

$$\mathbf{F}_\text{л} = \mathbf{F}_\text{эл}, \quad E = vB,$$

$$j = env, \quad v = \frac{j}{en}, \quad E = \frac{j}{en} B,$$

$$n = \frac{jB}{eE} = 2,5 \cdot 10^{28} \text{ м}^{-3}.$$

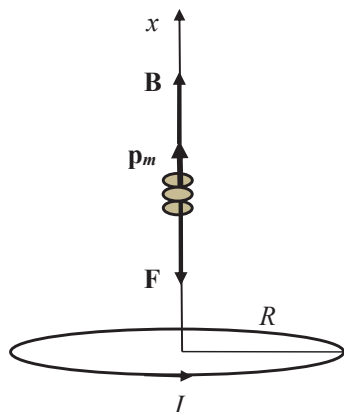


Рис. 1.58

1.57. На оси кольцевого тока I , на расстоянии x от него расположен диполь с магнитным моментом $\mathbf{p}_m$, направление которого совпадает с этой осью (рис. 1.58). Чему равна сила их взаимодействия? Радиус кольца R .

Решение. Диполь находится в поле кольцевого тока, индукция которого на оси (см. задачу 1.1):

$$B_x = \frac{\mu_0 I R^2}{2(R^2 + x^2)^{3/2}}.$$

Поле неоднородное, и в нем на диполь действует сила

$$F_x = p_m \frac{dB_x}{dx} \cos 0^\circ.$$

Это и есть сила их взаимодействия,

$$F_x = -\frac{3}{2} p_m \mu_0 I R^2 x (R^2 + x^2)^{-5/2}.$$

Минус в этой формуле указывает на то, что между диполем и кольцевым током действует сила притяжения.

1.58. На одной оси расположены две небольшие катушки, расстояние x между которыми значительно больше их линейных размеров. Токи, протекающие по ним, создают магнитные моменты $\mathbf{p}_{m1}$ и $\mathbf{p}_{m2}$. Какова сила взаимодействия между этими катушками?

Решение. Поле, создаваемое на оси катушки, можно получить, воспользовавшись результатом, полученным в задаче 1.1:

$$B_x = \frac{\mu_0 I R^2}{2(R^2 + x^2)^{3/2}} = \frac{\mu_0 I \pi R^2}{2\pi(R^2 + x^2)^{3/2}} = \frac{\mu_0 p_m}{2\pi(R^2 + x^2)^{3/2}}.$$

Поскольку расстояние x между катушками значительно больше их линейных размеров, эту формулу можно записать в виде

$$B_x = \frac{\mu_0 p_m}{2\pi x^3}.$$

Силу взаимодействия между катушками найдем по формуле

$$F_x = p_{m2} \frac{dB_{x1}}{dx} = -p_{m2} \frac{3\mu_0 p_{m1}}{2\pi x^2} = -\frac{3\mu_0 p_{m1} p_{m2}}{2\pi x^2}.$$

2. Магнитное поле в веществе

2.1. По прямому проводу круглого сечения течет ток I . Чему равны токи намагничивания (поверхностный и объемный)? Провод алюминиевый с проницаемостью μ .

Решение. Вблизи поверхности провода линии магнитной индукции представляют собой окружности, центры которых лежат на оси провода.

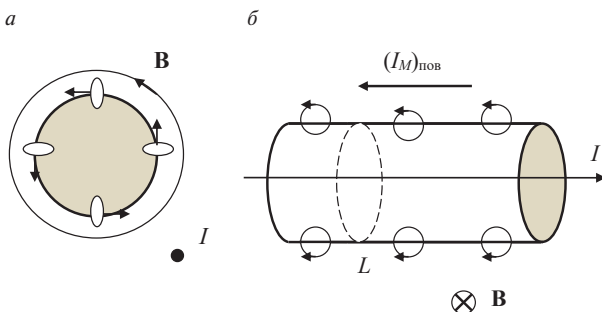


Рис. 2.1

Они ориентируют магнитные моменты поверхностных микротоков так, как это показано на рис. 2.1, *а*. В результате направление поверхностного тока намагничивания будет противоположным направлению тока проводимости (рис. 2.1, *б*). Чтобы его найти, введем контур L , изображенный на рис. 2.1, *б* пунктиром:

$$(I_M)_{\text{пов}} = i_M 2\pi R.$$

В этой формуле i_M — линейная плотность поверхностного тока намагничивания, которая равна намагниченности вещества:

$$i_M = J = \chi H = \chi \frac{B}{\mu_0}.$$

Для прямого провода

$$B = \frac{\mu_0 B}{2\pi R},$$

и тогда

$$(I_M)_{\text{пов}} = \chi I.$$

Учитывая, что в магнетике полный ток намагничивания равен нулю, получим

$$(I_M)_{\text{об}} = -(I_M)_{\text{пов}} = -\chi I.$$

2.2. В однородное магнитное поле с индукцией $\mathbf{B}_0$ внесли парамагнитный шар. Вычислить индукцию поля в объеме шара.

Решение. Напряженность магнитного поля в образце конечных размеров связана с напряженностью внешнего поля соотношением

$$\mathbf{H} = \mathbf{H}_0 - \mathbf{H}_{\text{разм}},$$

где $\mathbf{H}_{\text{разм}}$ — напряженность дополнительного размагничивающего поля. Она определяется формой образца и его намагниченностью:

$$\mathbf{H}_{\text{разм}} = N\mathbf{J},$$

где параметр N называется *размагничивающим фактором*. Для шара $N = 1/3$. Поэтому

$$\mathbf{H} = \mathbf{H}_0 - N\mathbf{J} = \mathbf{H}_0 - N\chi\mathbf{H} = \mathbf{H}_0 - N\left(\frac{1}{4}-1\right)\mathbf{H},$$

$$\mathbf{H} = \frac{\mathbf{H}_0}{1 + N\left(\frac{1}{4}-1\right)}.$$

Учтем, что

$$\mathbf{H} = \frac{\mathbf{B}}{\mu\mu_0}, \quad \mathbf{H}_0 = \frac{\mathbf{B}_0}{\mu_0},$$

и получим

$$\mathbf{B} = \frac{\mu\mathbf{B}_0}{1 + N(\mu - 1)} = \frac{3\mu\mathbf{B}_0}{\mu + 2}.$$

2.3. В магнитное поле, индукция которого равна $\mathbf{B}_0$, внесли парамагнетик с проницаемостью μ , плоская граница которого образует угол α с вектором $\mathbf{B}_0$ (рис. 2.2). Чему равна индукция поля $\mathbf{B}$ в объеме магнетика?

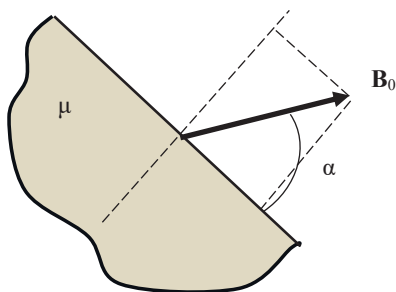


Рис. 2.2

Решение. Магнитные поля в образце и в вакууме вблизи границы их раздела связаны соотношениями

$$B_n = B_{0n}, \quad B_\tau = \mu B_{0\tau}.$$

Как видно из рис. 2.2,

$$\begin{aligned} B_n &= B_{0n} = B_0 \sin \alpha, \\ B_\tau &= \mu B_{0\tau} = \mu B_0 \cos \alpha, \\ B &= \sqrt{B_n^2 + B_\tau^2} = B_0 \sqrt{\sin^2 \alpha + \mu^2 \cos^2 \alpha}. \end{aligned}$$

2.4. Прямой провод с током I направлен перпендикулярно плоской границе, разделяющей парамагнетик с проницаемостью μ и вакуум. Что представляют собой поверхностные токи намагничивания и чему равна их линейная плотность?

Решение. Линии магнитного поля — концентрические окружности с центром на оси провода, и магнитные моменты микроскопических кольцевых токов ориентированы вдоль этих линий (рис. 2.3). При этом, складываясь, микротоки формируют поверхностные токи намагничивания $(I_M)_{\text{пов}}$, направленные радиально относительно тока I .

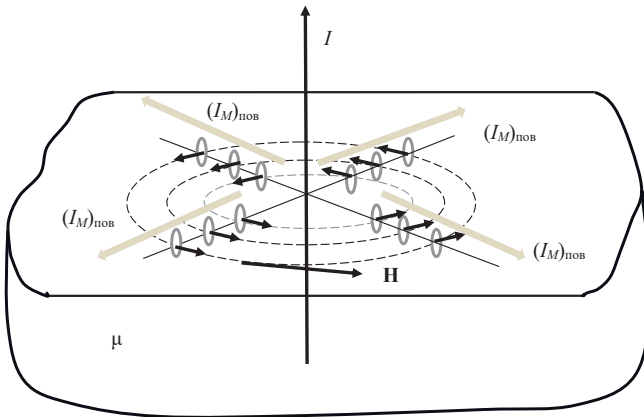


Рис. 2.3

Линейная плотность i_M поверхностного тока связана с намагниченностью J вещества:

$$i_M = J,$$

которая, в свою очередь, выражается через напряженность магнитного поля H :

$$J = \chi H = (\mu - 1) H,$$

поэтому

$$i_M = (\mu - 1) J H = (\mu - 1) \frac{I}{2\pi r}.$$

2.5. Пространство разделено на две части — вакуум и непроводящий парамагнетик с проницаемостью μ , разделенные плоской границей (рис. 2.4). В этой плоскости расположен длинный прямой провод, по которому протекает ток I . Чему равна индукция магнитного поля B в этом пространстве?

Решение. Согласно граничным условиям [3] нормальные составляющие поля $\mathbf{B}$ на границе раздела двух сред совпадают, а это означает, что линии магнитного поля — concentric circles с центром на оси провода (рис. 2.4, а).

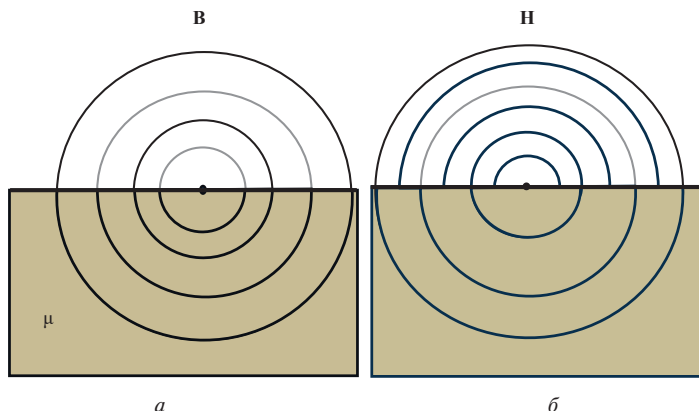


Рис. 2.4

Понятно, что и линии напряженности $\mathbf{H}$ тоже будут окружностями, но с учетом условия [3]

$$H_{0n} = \mu H_n,$$

при переходе границы будет наблюдаться скачок напряженности. Взяв в качестве контура окружность радиусом r , применим теорему о циркуляции для напряженности поля:

$$H_0 \pi r + H \pi r = I,$$

$$(\mu + 1) H \pi r = I,$$

$$H = \frac{I}{(\mu + 1) \pi r},$$

$$B = \mu_0 \mu H = \frac{\mu_0 \mu I}{(\mu + 1) \pi r}.$$

Если убрать среду (то есть взять $\mu = 1$), то приходим к известным формулам:

$$H = \frac{I}{2\pi r}, \quad B = \frac{\mu_0 \mu I}{2\pi r}.$$

2.6. По прямому проводнику, круглое сечение которого имеет радиус R , протекает ток плотности j . Чему равна индукция магнитного поля внутри и вне проводника, а также плотности линейного и объемного токов намагничивания? Проводник сделан из парамагнитного материала с магнитной проницаемостью μ .

Решение. Воспользуемся теоремой о циркуляции вектора $\mathbf{H}$ и выберем контур обхода в виде окружности радиусом r ($r < R$) с центром на оси проводника:

$$\oint_L \mathbf{H} d\mathbf{l} = I,$$

$$H 2\pi r = j \pi r^2,$$

$$H = \frac{1}{2} j r.$$

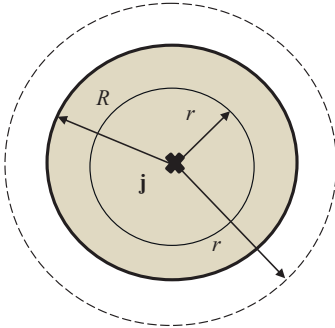


Рис. 2.5

Индукция магнитного поля
внутри проводника

$$B = \mu_0 \mu H = \mu_0 \mu j r.$$

Для того чтобы найти поле вне проводника, используем контур в виде окружности радиусом $r > R$:

$$\oint_L \mathbf{H} d\mathbf{l} = I,$$

$$H 2\pi r = j \pi R^2,$$

$$H = \frac{1}{2r} j R^2.$$

Индукция магнитного поля вне проводника

$$B = \mu_0 \mu H = \frac{\mu_0 \mu}{2r} j R^2.$$

Линейную плотность i_M поверхностного тока намагничивания найдем по формуле

$$i_M = J = \chi H = (\mu - 1) \frac{1}{2} j R.$$

Плотность j_M объемного тока намагничивания найдем по формуле $i_M = J$, полагая, что $\mathbf{J} = (0, 0, J)$.

$$\begin{aligned} \mathbf{j} &= |\nabla \times \mathbf{J}| = \begin{vmatrix} \mathbf{i} & \mathbf{j} & \mathbf{k} \\ \frac{\partial}{\partial x} & \frac{\partial}{\partial y} & \frac{\partial}{\partial z} \\ J_x & J_y & J_z \end{vmatrix} = \\ &= \left(\frac{\partial J_z}{\partial y} - \frac{\partial J_y}{\partial z} \right) \mathbf{i} + \left(\frac{\partial J_x}{\partial z} - \frac{\partial J_z}{\partial x} \right) \mathbf{j} + \left(\frac{\partial J_y}{\partial x} - \frac{\partial J_x}{\partial y} \right) \mathbf{k} = \\ &= \frac{\partial J_z}{\partial y} \mathbf{i} - \frac{\partial J_z}{\partial x} \mathbf{j} = \frac{\partial J_z}{\partial r} \left(\frac{\partial r}{\partial y} \mathbf{i} - \frac{\partial r}{\partial x} \mathbf{j} \right) = \frac{\partial J_z}{\partial r} \frac{1}{r} (y\mathbf{i} - x\mathbf{j}). \end{aligned}$$

В скалярном виде:

$$j_M = \frac{dJ}{dr} = \frac{d(\mu-1)H}{dr} = (\mu-1) \frac{d}{dr} \left(\frac{1}{2r} jR^2 \right) = -(\mu-1) \frac{1}{2r^2} jR^2.$$

2.7. Длинная катушка заполнена парамагнитным материалом, магнитная восприимчивость которого меняется по закону $\chi = ar^2$, где a — постоянная, а r — расстояние от оси катушки. Как зависят напряженность H , индукция магнитного поля B и намагниченность J вещества от расстояния r до оси катушки? На оси катушки индукция магнитного поля равна B_0 .

Решение. Воспользуемся теоремой о циркуляции вектора $\mathbf{H}$ и выберем контур обхода в виде прямоугольника, изображенного на рис. 2.6.

$$\oint_L \mathbf{H} d\mathbf{l} = NI,$$

$$Hl = nI, \quad H = nI,$$

где n — число витков катушки, приходящееся на единицу ее длины. Мы здесь учли, что поле сосредоточено в объеме катушки.

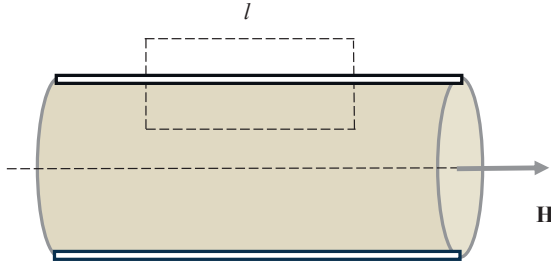


Рис. 2.6

Индукция магнитного поля

$$B = \mu\mu_0 H = (1 + \chi)\mu_0 nI = (1 + ar^2)\mu_0 nI.$$

При $r = 0$

$$B_0 = \mu_0 n I,$$

$$n I = \frac{B_0}{\mu_0},$$

и тогда

$$H = \frac{B_0}{\mu_0},$$

$$B = B_0 (1 + a r^2),$$

$$J = \chi H = \frac{B_0}{\mu_0} a r^2.$$

2.8. Используя условия предыдущей задачи, определить плотности поверхностного и объемного токов намагничивания.

Решение. Линейную плотность i_M поверхностного тока намагничивания найдем по формуле

$$i_M = J = \frac{B_0}{\mu_0} a R^2.$$

Плотность j_M объемного тока намагничивания найдем по формуле $i_M = J$, полагая, что $\mathbf{J} = (0, 0, J)$.

$$\mathbf{j} = |\nabla \times \mathbf{J}| = \begin{vmatrix} \mathbf{i} & \mathbf{j} & \mathbf{k} \\ \frac{\partial}{\partial x} & \frac{\partial}{\partial y} & \frac{\partial}{\partial z} \\ J_x & J_y & J_z \end{vmatrix} =$$

$$= \left(\frac{\partial J_z}{\partial y} - \frac{\partial J_y}{\partial z} \right) \mathbf{i} + \left(\frac{\partial J_x}{\partial z} - \frac{\partial J_z}{\partial x} \right) \mathbf{j} + \left(\frac{\partial J_y}{\partial x} - \frac{\partial J_x}{\partial y} \right) \mathbf{k} =$$

$$= \frac{\partial J_z}{\partial y} \mathbf{i} - \frac{\partial J_z}{\partial x} \mathbf{j} = \frac{\partial J_z}{\partial r} \left(\frac{\partial r}{\partial y} \mathbf{i} - \frac{\partial r}{\partial x} \mathbf{j} \right) = \frac{\partial J_z}{\partial r} \frac{1}{r} (y \mathbf{i} - x \mathbf{j}).$$

Запишем это выражение в скалярном виде:

$$j_M = \frac{dJ}{dr} = \frac{2B_0}{\mu_0} ar.$$

2.9. Постоянный магнит, имеющий форму тонкого диска, толщина которого много меньше его радиуса $R = 1,0$ см, намагничен так, что создает поле, направленное вдоль его оси (рис. 2.7). На расстоянии $x = 10$ см индукция поля составляет $B = 30$ мкТл. Чему равен ток намагничивания, протекающий по его боковой поверхности?

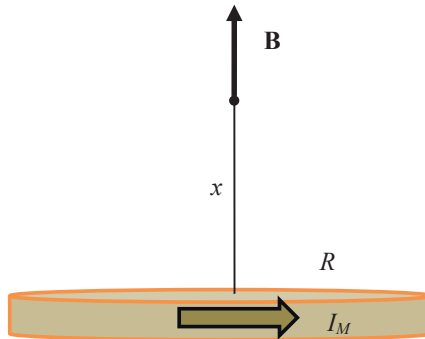


Рис. 2.7

Решение. Магнитное поле постоянного магнита создается токами намагничивания. В данном случае это кольцевой ток, протекающий по боковой поверхности диска. Индукция поля такого тока рассчитана в задаче 1.1 и равна

$$B = \frac{\mu_0 I_M R^2}{2(R^2 + x^2)^{3/2}} \approx \frac{\mu_0 I_M R^2}{2x^3},$$

$$I_M = \frac{2Bx^3}{\mu_0 R^2} = 2 \text{ кА}.$$

2.10. Пространство разделено плоской границей на две области. Одна область — вакуум, а вторая представляет собой парамагнетик с магнитной проницаемостью μ . Вектор $\mathbf{B}_0$ в вакууме вблизи границы раздела образует с ней угол θ . Чему равен модуль вектора $\mathbf{B}$ в веществе вблизи границы раздела?

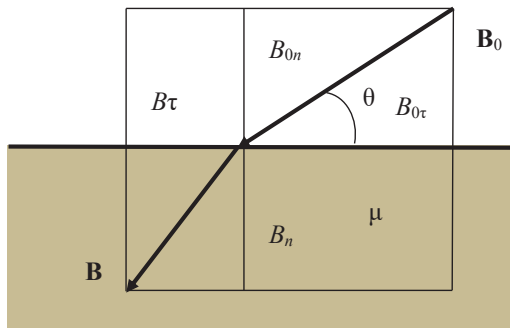


Рис. 2.8

Решение. Воспользуемся условиями, связывающими компоненты векторов $\mathbf{B}_0$ и $\mathbf{B}$ на границе раздела «вакуум — парамагнетик» [3].

$$B_{0n} = B_n, \quad \mu B_{0\tau} = B_\tau,$$

$$B = \sqrt{B_n^2 + B_\tau^2} = \sqrt{B_{0n}^2 + \mu^2 B_{0\tau}^2} = B_0 \sqrt{\sin^2 \theta + \mu^2 \cos^2 \theta}.$$

2.11. Используя условия предыдущей задачи, вычислить поток вектора напряженности через поверхность сферы радиусом R , центр которой находится на границе раздела. Чему равна циркуляция вектора магнитной индукции через прямоугольный контур, изображенный на рис. 2.9? Сторона контура равна l .

Решение. Сферу радиусом R (рис. 2.9) представим в виде комбинации трех элементов: верхней полусферы S_1 , нижней полусферы S_3 и тонкого слоя, разделяющего их вблизи границы раздела толщиной h .

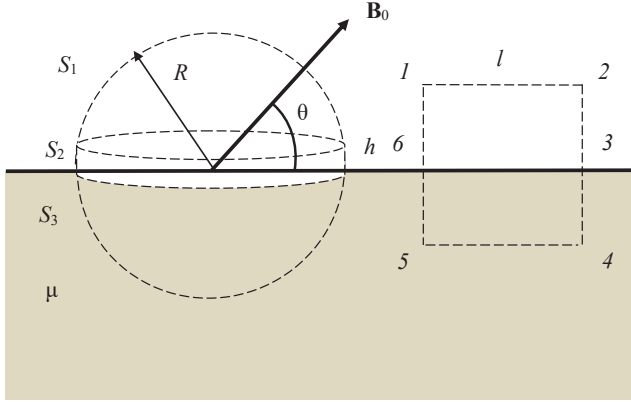


Рис. 2.9

Рассчитаем поток вектора $\mathbf{H}$ через поверхность сферы:

$$\begin{aligned}\oint_S \mathbf{H} d\mathbf{S} &= \oint_{S_1} \mathbf{H}_1 d\mathbf{S} + \oint_{S_2} \mathbf{H} d\mathbf{S} + \oint_{S_3} \mathbf{H}_2 d\mathbf{S} = \\ &= \oint_{S_2} \mathbf{H} d\mathbf{S} = H_{1n} \pi R^2 - H_{2n} \pi R^2 + \langle H_\tau \rangle 2\pi R h.\end{aligned}$$

При $h \rightarrow 0$ последнее слагаемое обращается в нуль:

$$\oint_S \mathbf{H} d\mathbf{S} = H_{1n} \pi R^2 - H_{2n} \pi R^2 = \left(\frac{B_{0n}}{\mu_0} - \frac{B_n}{\mu_0 \mu} \right) \pi R^2.$$

Как следует из условий на границе, $B_n = B_{0n}$, и тогда

$$\oint_S \mathbf{H} d\mathbf{S} = \left(\frac{B_{0n}}{\mu_0} - \frac{B_n}{\mu_0 \mu} \right) \pi R^2 = \frac{B_0 \sin \theta}{\mu_0 \mu} (\mu - 1).$$

Ответим на второй вопрос задачи:

$$\oint_L \mathbf{B} d\mathbf{l} = \int_{1,2} \mathbf{B}_0 d\mathbf{l} + \int_{2,3} \mathbf{B}_0 d\mathbf{l} + \int_{3,4} \mathbf{B} d\mathbf{l} + \int_{4,5} \mathbf{B} d\mathbf{l} + \int_{5,6} \mathbf{B} d\mathbf{l} + \int_{6,1} \mathbf{B}_0 d\mathbf{l}.$$

В этой сумме сокращаются второй и шестой члены, а также третий и пятый, поэтому

$$\oint_L \mathbf{B} d\mathbf{l} = \int_{1,2} \mathbf{B}_0 d\mathbf{l} + \int_{4,5} \mathbf{B} d\mathbf{l} = (B_{0\tau} - B_{\tau})l = \\ = B_{0\tau} (1 - \mu)l = B_0 \cos \theta (1 - \mu)l.$$

2.12. Два парамагнетика, имеющие проницаемости μ_1 и μ_2 , разделены плоской границей. На ней расположен длинный прямой провод, по которому протекает ток I . Чему равна индукция магнитного поля этого тока в окружающем пространстве?

Решение. Воспользуемся теоремой о циркуляции вектора $\mathbf{H}$ и выберем контур обхода в виде окружности радиусом R :

$$\oint_L \mathbf{H} d\mathbf{l} = I.$$

$$\oint_L \mathbf{H} d\mathbf{l} = \int_{L_1} \mathbf{H}_1 d\mathbf{l} + \int_{L_2} \mathbf{H}_2 d\mathbf{l} = \frac{B_{1n}}{\mu_0 \mu_1} \pi R + \frac{B_{2n}}{\mu_0 \mu_2} \pi R = I.$$

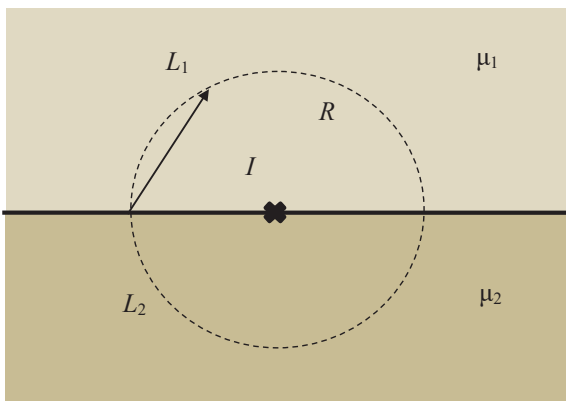


Рис. 2.10

Согласно условиям на границе двух магнетиков $B_{1n} = B_{2n}$, и тогда

$$\frac{B}{\mu_0} \frac{\mu_1 + \mu_2}{\mu_1 \mu_2} \pi R = I,$$

$$B = \frac{\mu_0 \mu_1 \mu_2 I}{(\mu_1 + \mu_2) \pi R}.$$

2.13. Для того чтобы размагнитить постоянный магнит, на него плотно намотали толстый провод. Магнитное поле исчезло, когда ток в катушке достиг $I = 6$ А. Чему равна коэрцитивная сила H_c магнетика? Магнит имеет круглое сечение. Диаметр провода $d = 1,0$ мм.

Решение. Размагничивание происходит тогда, когда напряженность внешнего магнитного поля, направленного противоположно полю магнита, становится равной коэрцитивной силе H_c магнетика:

$$H_c = H = \mu_0 n I = \frac{\mu_0 I}{d} = 6 \text{ кА/м}.$$

2.14. В кольцевом магните диаметром $d = 40$ см сделана прорезь $b = 2$ мм. Чему равна напряженность поля в магнетике, если магнитная индукция поля в прорези равна $B_0 = 80$ мТл?

Решение. Согласно теореме о циркуляции

$$\oint_L \mathbf{H} d\mathbf{l} = \int_{L-b} \mathbf{H} d\mathbf{l} + \int_b \mathbf{H}_0 d\mathbf{l} =$$

$$= (\pi d - b) H_\tau + \frac{b B_0}{\mu_0} = 0,$$

где H_τ — тангенциальная составляющая вектора $\mathbf{H}$ относительно направления обхода контура.

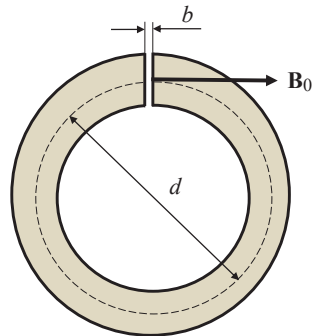


Рис. 2.11

$$H = \left| -\frac{bB_0}{\mu_0(\pi d - b)} \right| \approx \frac{bB_0}{\mu_0\pi d} = 1,0 \text{ кА/м.}$$

Знак минус, возникший в ходе вычислений, связан с тем, что вектор $\mathbf{H}$ в магнетике направлен противоположно вектору $\mathbf{B}_0$.

Обратим внимание на то, что $H \rightarrow 0$ при $b \rightarrow 0$.

2.15. На железный сердечник, длина осевой линии которого равна l , намотано N витков провода. Сердечник имеет узкую прорезь шириной b (рис. 2.12). По катушке протекает ток I . Чему равна индукция B_0 магнитного поля в прорези? Магнитная проницаемость железа равна μ .

Решение. Согласно теореме о циркуляции

$$\begin{aligned} \oint_L \mathbf{H} d\mathbf{l} &= NI, \\ \oint_L \mathbf{H} d\mathbf{l} &= \int_{L-b} H dl + \int_b H_0 dl = H(L-b) + H_0 b = \\ &= \frac{B}{\mu\mu_0}(L-b) + \frac{B_0}{\mu_0}b. \end{aligned}$$

Вектора $\mathbf{B}_0$ и $\mathbf{B}$ (в прорези и сердечнике) имеют лишь нормальные составляющие вблизи границы раздела, и их модули равны:

$$\begin{aligned} \frac{B_0}{\mu_0} \left(\frac{L-b}{\mu} + b \right) &= NI, \\ B_0 &= \frac{\mu_0 NI}{\frac{L-b}{\mu} + b}. \end{aligned}$$

2.16. На ферромагнитный сердечник, длина осевой линии которого равна $l = 1,6$ м, намотано $N = 1000$ витков провода. Сердечник имеет узкую прорезь шириной $b = 1,00$ мм (рис. 2.12).

При протекании по катушке тока $I = 0,85$ А в прорези возникает магнитное поле, индукция которого $B_0 = 0,75$ Тл. Чему равна магнитная проницаемость ферромагнетика?

Решение. Применяя теорему о циркуляции, получим

$$\begin{aligned} \int_{l-b} H dl + \int_b H_0 dl &= H(l-b) + H_0 b = \\ &= \frac{B}{\mu\mu_0}(l-b) + \frac{B_0}{\mu_0} b = NI, \end{aligned}$$

$$\frac{B}{\mu\mu_0}(l-b) = NI - \frac{B_0}{\mu_0} b,$$

$$\mu = \frac{lB_0}{\mu_0 NI - bB} = 3,8 \cdot 10^3 \text{ Тл.}$$

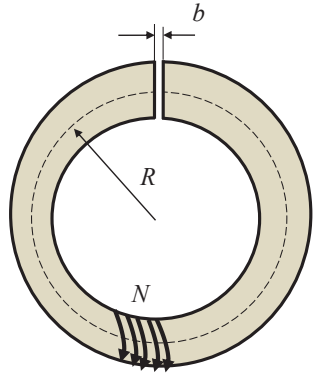


Рис. 2.12

2.17. Ферромагнитное кольцо, средний радиус которого $R = 25$ см, имеет прорезь $b = 2$ мм (рис. 2.12). На кольцо намотано $N = 800$ витков провода, по которому протекает ток силой $I = 3,0$ А. Чему равна магнитная проницаемость ферромагнетика? При расчетах использовать график кривой намагничивания железа, приведенный на рис. 2.13.

Решение. Используем теорему о циркуляции вектора $\mathbf{H}$:

$$\int_{l-b} H dl + \int_b H_0 dl = H(2\pi R - b) + H_0 b =$$

$$= H(2\pi R - b) + \frac{B_0}{\mu_0} b = NI,$$

$$B_0 = B, \quad 2\pi R - b \approx 2\pi R,$$

$$B = \frac{\mu_0 NI}{b} - \frac{\mu_0 2\pi R}{b} H = 1,51 - 0,99 H.$$

Построим график этой линейной зависимости в координатах, изображенных на рис. 2.13.

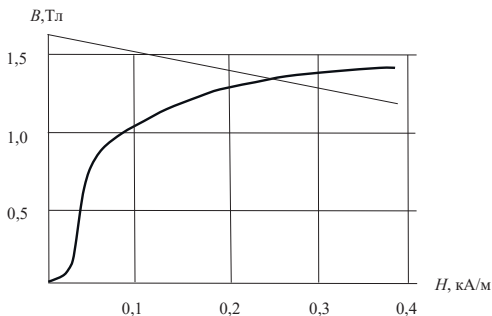


Рис. 2.13

Точка ее пересечения с кривой намагничивания железа, изображенной там же, дает значения $H = 0,26$ кА/м, $B = 1,25$ Тл и, таким образом,

$$\mu = \frac{B}{\mu_0 H} \approx 4 \cdot 10^3.$$

2.18. На оси катушки, по которой протекает ток I , расположен парамагнитный стержень таким образом, что один из его концов находится в области поля с магнитной индукцией B , а второй — на значительном удалении от катушки (рис. 2.14). Чему равна сила, втягивающая стержень в катушку? Магнитная восприимчивость парамагнетика равна χ .

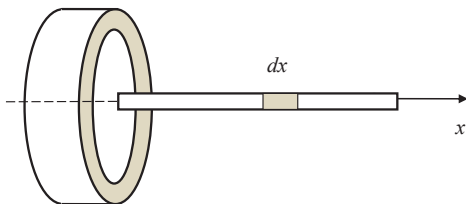


Рис. 2.14

Решение. Выберем на стержне отрезок dx . В магнитном поле он приобретает магнитный момент dp_m , и в поле катушки на него начинает действовать сила

$$dF_x = dp_m \frac{dB}{dx}.$$

Учтем, что

$$dp_m = JdV = JSdx = \chi HSdx = \chi \frac{B}{\mu_0} Sdx,$$

и тогда

$$dF_x = \chi \frac{B}{\mu_0} SdB.$$

Проинтегрировав это выражение, мы получим ответ:

$$F_x = \int_B^0 \chi \frac{B}{\mu_0} SdB = -\frac{\chi SB^2}{2\mu_0}.$$

Знак минус в этом выражении говорит о том, что стержень втягивается в катушку.

2.19. Парамагнитный образец, имеющий объем V , находится в магнитном поле B . Какую работу необходимо совершить, удалив этот образец в область, где $B = 0$? Магнитная восприимчивость парамагнетика равна χ .

Решение. Работа в неоднородном магнитном поле при перемещении dx

$$\begin{aligned} dA &= F_x dx = p_m \frac{dB}{dx} dx = \\ &= JVdB = \chi HVdB = \chi \frac{B}{\mu_0} VdB. \end{aligned}$$

Работа этой силы на конечном перемещении

$$A = \int_B^0 \chi V \frac{B}{\mu_0} dB = -\chi V \frac{B^2}{2\mu_0},$$

$$A_{\text{внеш}} = -A = \chi V \frac{B^2}{2\mu_0}.$$

2.20. Для изучения магнитной восприимчивости веществ используют устройство, изображенное на рис. 2.15. Будучи помещен в сильное неоднородное магнитное поле, образец приобретает магнитный момент, и на него начинает действовать сила, втягивающая его в область более сильного поля. Эта сила пропорциональна магнитной восприимчивости χ образца. Для создания такого поля используют электромагнит. Индукцию поля вблизи его полюса можно описать формулой

$$B = B_0 \exp(-ax^2),$$

где $B = 1,50$ Тл; $a = 100 \text{ м}^{-2}$. Чему равна сила, притягивающая образец к полюсу электромагнита? На каком расстоянии x_m эта сила принимает наибольшее значение? Чему равна магнитная восприимчивость парамагнетика, если $F_m = 320 \text{ мкН}$? Объем образца $V = 20 \text{ мм}^3$.

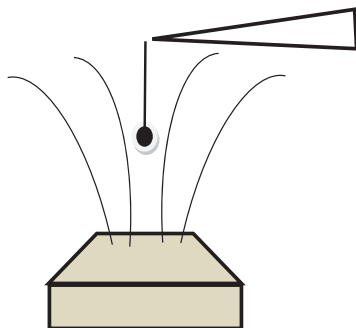


Рис. 2.15

Решение. Сила, действующая на образец в неоднородном поле,

$$\begin{aligned} F_x &= p_m \frac{dB}{dx} = JV \frac{d}{dx} (B_0 e^{-ax^2}) = \chi \frac{B}{\mu_0} V \frac{dB}{dx} = \\ &= \chi \frac{B_0 e^{-ax^2}}{\mu_0} V \frac{d}{dx} (B_0 e^{-ax^2}) = -2\chi \frac{B_0^2}{\mu_0} V a x e^{-2ax^2}. \end{aligned}$$

Для ответа на второй вопрос исследуем на экстремум полу-
ченное выражение:

$$\begin{aligned} \frac{d|F_x|}{dt} &= 0, \\ e^{-2ax^2} + x(-4ax)e^{-2ax^2} &= 0, \\ 4ax^2 - 1 &= 0, \\ x_m &= \frac{1}{2\sqrt{a}}. \end{aligned}$$

Магнитная восприимчивость парамагнетика будет равна

$$\begin{aligned} F_m &= 2\chi \frac{B_0^2}{\mu_0} V a \frac{1}{2\sqrt{a}} e^{-1/2} = \chi \frac{B_0^2}{\mu_0} V a^{1/2} e^{-1/2}, \\ \chi &= \frac{\mu_0 F_m}{B_0^2 V} \sqrt{\frac{e}{a}} = 1,44 \cdot 10^{-3}. \end{aligned}$$

3. Движение заряженных частиц в электрическом и магнитном полях

3.1. С поверхности катода вылетает электрон со скоростью, близкой к нулю. Анодное напряжение возрастает по закону $U = \alpha t$, где $\alpha = 10^2$ В/м. Найти скорость электрона при его попадании на анод.

Решение. Сила, действующая на электрон в электрическом поле,

$$F = eE = \frac{eU}{l} = \frac{e\alpha t}{l}.$$

Под действием этой силы электрон движется с ускорением

$$a = \frac{F}{m} = \frac{e\alpha t}{ml}.$$

Скорость электрона возрастает как

$$v = \int_0^t a dt = \int_0^t \frac{e\alpha t}{ml} dt = \frac{e\alpha t^2}{2ml},$$

а пройденный путь зависит от времени по закону

$$x = \int_0^t v dt = \int_0^t \frac{e\alpha t^2}{2ml} dt = \frac{e\alpha t^3}{6ml}.$$

Время пролета электрона определим из условия $x = l$:

$$l = \frac{e\alpha t^3}{6ml}, \quad t = \left(\frac{6ml}{e\alpha} \right)^{1/3}.$$

Тогда

$$v = \frac{e\alpha t^2}{2ml} = \frac{e\alpha}{2ml} \left(\frac{6ml}{e\alpha} \right)^{2/3} = \left(\frac{9\alpha ml}{2m} \right)^{1/3} = 16 \text{ км/с}.$$

3.2. Заряженная частица начинает движение в электрическое поле, напряженность которого меняется со временем по закону $E = E_0 - \alpha x$, где α — постоянная ($\alpha > 0$). Чему равен путь, пройденный частицей до ее остановки?

Решение. Сила, действующая на частицу в электрическом поле,

$$F = qE = q(E_0 - \alpha x).$$

Ее график изображен на рис. 3.1.

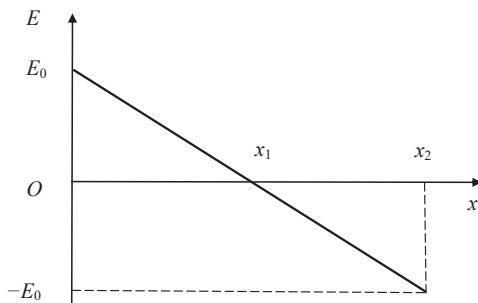


Рис. 3.1

Изменение кинетической энергии частицы равно работе сил электрического поля. Таким образом, частица остановится, когда работа этой силы станет равной нулю. Используя графический метод, легко сообразить, что работа обратится в нуль при $x = x_2$:

$$\begin{aligned} -E_0 &= E_0 - \alpha x_2, \\ x_2 &= \frac{2E_0}{\alpha}. \end{aligned}$$

3.3. Электрон поместили в электрическое поле, напряженность которого $E = 20$ кВ/см. Чему равен промежуток времени, за который его кинетическая энергия достигнет энергии покоя электрона?

Решение. Сила, действующая на электрон в электрическом поле,

$$F = eE.$$

По второму закону Ньютона

$$F = \frac{dp}{dt},$$

$$dp = Fdt,$$

$$p = eEt.$$

Импульс релятивистской частицы связан с ее кинетической энергией следующим соотношением [1]:

$$p = \frac{1}{c} \sqrt{W_k (W_k + 2mc^2)},$$

$$t = \frac{p}{eE} = \frac{1}{ceE} \sqrt{W_k (W_k + 2mc^2)}.$$

По условию $W_k = mc^2$,

$$t = \frac{p}{eE} = \frac{1}{ceE} \sqrt{W_k (W_k + 2mc^2)} = \frac{mc^2 \sqrt{3}}{ceE} = 1,5 \text{ нс}.$$

3.4. Релятивистский протон влетел в поперечное магнитное поле с индукцией $B = 10$ мТл и начал двигаться по окружности радиусом $R = 10$ см. Какова скорость протона и период его обращения по окружности?

Решение. Движение по окружности в магнитном поле происходит под действием силы Лоренца, перпендикулярной на-

правлению движения протона. В этом случае ускорение является нормальным, и, как показано в [1],

$$a_n = \frac{F_{\perp}}{m} \left(1 - \frac{v^2}{c^2} \right)^{1/2}.$$

$$F_{\perp} = qvB, \quad a_n = \frac{v^2}{R},$$

$$qvB = \frac{mv^2}{R \sqrt{1 - \frac{v^2}{c^2}}},$$

$$qB = \frac{p}{R}, \quad p = qBR.$$

Воспользуемся формулой для релятивистского импульса

$$p = \frac{mv}{\sqrt{1 - \frac{v^2}{c^2}}},$$

$$p^2 \left(1 - \frac{v^2}{c^2} \right) = m^2 c^2, \quad p^2 = \frac{v^2}{c^2} (p^2 + m^2 c^2),$$

$$v = \frac{cp}{\sqrt{p^2 + m^2 c^2}} = \frac{c}{\sqrt{1 + \left(\frac{mc}{p} \right)^2}},$$

и тогда

$$v = \frac{c}{\sqrt{1 + \left(\frac{mc}{p} \right)^2}} = \frac{c}{\sqrt{1 + \left(\frac{mc}{qBR} \right)^2}} = 0,51 \text{ с},$$

$$T = \frac{2\pi R}{v} = 4,1 \text{ нс}.$$

3.5. Заряженная частица при своем движении попадает в поперечные скрещенные поля (рис. 3.2). Напряженность электрического поля равна E , индукция магнитного поля — B . При каком значении скорости частица будет двигаться по прямойлинейной траектории?

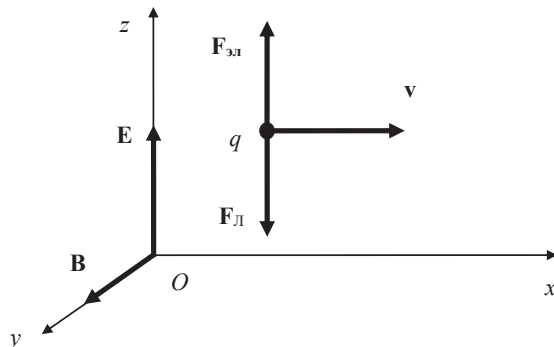


Рис. 3.2

Решение. Силы, действующие на частицу со стороны электрического и магнитного полей, должны быть равны и противоположно направлены:

$$F_{\text{л}} = F_{\text{эл}},$$

$$qvB = qE.$$

Тогда скорость

$$v = \frac{E}{B}$$

и не зависит от массы частицы и ее заряда.

3.6. Частица, имеющая удельный заряд q/m , прошла в электрическом поле разность потенциалов U и влетела в магнитное поле B перпендикулярно его силовым линиям (рис. 3.3). Под каким углом α к первоначальному направлению движения ча-

стица вылетит из него, если линейный размер области поля в направлении первоначального движения частицы равен d ?

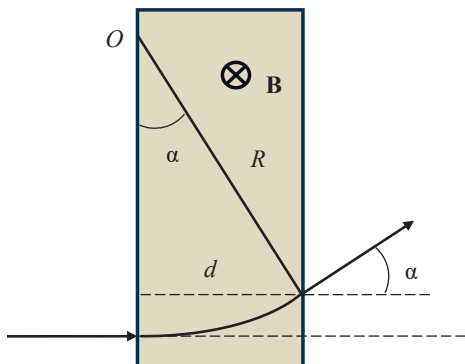


Рис. 3.3

Решение. В магнитном поле частица движется по окружности, радиус которой

$$R = \frac{mv}{qB}.$$

Скорость частицы найдем из условия

$$\begin{aligned} \frac{mv^2}{2} &= qEd, \\ v &= \sqrt{\frac{2qEd}{m}}. \end{aligned}$$

Как видно из рис. 3.3,

$$\begin{aligned} \sin \alpha &= \frac{d}{R} = \frac{qBd}{mv} = dB \sqrt{\frac{q}{2mU}}, \\ \alpha &= \arcsin \left(dB \sqrt{\frac{q}{2mU}} \right). \end{aligned}$$

3.7. Частица с удельным зарядом q/m прошла ускоряющую разность потенциалов U и влетела в однородное магнитное поле B под углом α к линиям магнитной индукции. Чему равен шаг винтовой траектории частицы?

Решение. Вектор скорости $\mathbf{v}$ разложим на две составляющие (рис. 3.4):

$$\mathbf{v} = \mathbf{v}_{\perp} + \mathbf{v}_{\parallel}.$$

Поперечная составляющая скорости $v_{\perp} = v \sin \alpha$ формирует движение частицы по окружности радиусом

$$R = \frac{mv \sin \alpha}{qB},$$

и период ее обращения равен

$$T = \frac{2\pi R}{v \sin \alpha} = \frac{mv}{qB}.$$

За это время частица сместится в направлении поля на расстояние

$$h = v_{\parallel} T = \frac{mv}{qB} v \cos \alpha.$$

Это и есть шаг спирали.

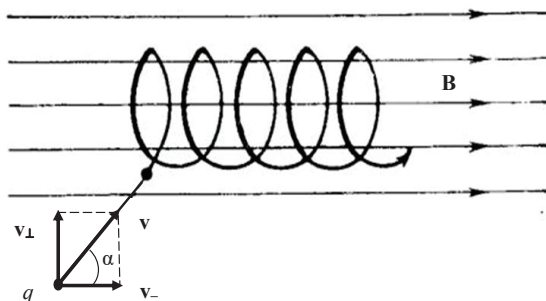


Рис. 3.4

3.8. В пространстве созданы взаимно перпендикулярные электрическое ($E = 60$ кВ/м) и магнитное ($B = 25$ мТл) поля. В эту область влетает поток протонов, скорость которых перпендикулярна векторам $\mathbf{E}$ и $\mathbf{B}$. Двигаясь по прямой траектории, протоны достигают мишени, создавая ток $I = 0,80$ мА. Какова сила давления, действующая при этом на мишень?

Решение. Результат, полученный в задаче 3.5, указывает на то, что прямолинейное движение протонов в скрещенных полях возможно лишь в случае, когда их скорость равна

$$v = \frac{E}{B}.$$

При этом импульс протона

$$p = mv = \frac{mE}{B}.$$

Количество протонов, попадающих на мишень за время Δt ,

$$\Delta N = \frac{I \Delta t}{q},$$

где q — заряд протона.

Воспользуемся вторым законом Ньютона:

$$F = \frac{p \Delta N}{\Delta t} = \frac{mIE}{qB} = 20 \text{ мкН}.$$

3.9. Траектория движения протона в циклотроне представляет собой раскручивающуюся спираль. При какой величине U ускоряющего напряжения между дуантами расстояние между соседними спиралями, радиусы которых близки к $r = 0,75$ м, составляет $\Delta r = 0,67$ см? Генератор циклотрона имеет частоту $\nu = 10$ МГц.

Решение. При движении частицы в магнитном поле

$$\frac{mv^2}{r} = qvB,$$

$$mv = qBr, \quad m\omega r = qBr, \quad \omega = \frac{qB}{m},$$

$$W = \frac{1}{2}mv^2 = \frac{1}{2}m\omega^2 r^2 = 2m\pi^2 v^2 r^2,$$

$$\Delta W \approx 4m\pi^2 v^2 r \Delta r.$$

За один оборот протон дважды проходит зазор между дуантами, каждый раз получая энергию qU , поэтому

$$2qU = 4m\pi^2 v^2 r \Delta r,$$

$$U = 4 = 2m\pi^2 v^2 r \Delta r / q = 10^5 \text{ В}.$$

3.10. При ускорении заряженных частиц в циклотроне их траектория имеет вид спирали, радиус которой увеличивается с ростом энергии частиц. Индукция магнитного поля в циклотроне $B = 0,50$ Тл, наибольший радиус спирали равен $R = 100$ см. Чему равна энергия, которую приобретут протоны в результате ускорения? При какой частоте электрического поля в промежутке между дуантами эта энергия станет равной $W_k = 20$ МэВ?

Решение. Радиус круговой траектории протона в магнитном поле найдем из условия

$$\frac{mv^2}{R} = qvB,$$

$$R = \frac{mv}{qB},$$

поэтому

$$v = \frac{qBR}{m},$$

$$W_{\max} = \frac{mv^2}{2} = \frac{(qBR)^2}{2m} = 12 \text{ МэВ}.$$

С другой стороны,

$$W_k = \frac{mv^2}{2} = \frac{1}{2} m (\omega R)^2 = \frac{1}{2} m (2\pi v R)^2 = 2m\pi^2 v^2 R^2,$$

$$v = \frac{1}{\pi R} \sqrt{\frac{W_k}{2m}} = 20 \text{ МГц}.$$

3.11. В основу работы циклотрона положено постоянство периода обращения заряженной частицы в процессе ее ускорения, и это предполагает, что масса частицы не меняется при увеличении ее скорости. При скоростях, сопоставимых со скоростью света, необходимо учитывать зависимость от скорости частицы ее релятивистской массы. Чтобы добиться этого, можно уменьшать (модулировать) по определенному закону частоту $\omega(t)$ переменного напряжения генератора, таким образом синхронизируя ее с частотой вращения частицы. Этот метод применяется в *фазотронах*. По какому закону должна изменяться частота генератора фазотрона, чтобы частица, имеющая заряд q , увеличивала свою энергию на величину ΔW за каждый оборот?

Решение. Период обращения заряженной релятивистской частицы в магнитном поле

$$T = \frac{2\pi m}{qB} = \frac{2\pi m_0}{qB\sqrt{1-v^2/c^2}}.$$

Ее кинетическая энергия

$$W_k = m_0 c^2 \left(\frac{1}{\sqrt{1-v^2/c^2}} - 1 \right),$$

и скорость ее изменения

$$\frac{dW_k}{dt} = m_0 v (1-v^2/c^2)^{-3/2} \frac{dv}{dt}.$$

По условию

$$\begin{aligned}\frac{dW_k}{dt} &= \frac{\Delta W}{T}, \\ \frac{\Delta W}{T} &= m_0 v \left(1 - v^2/c^2\right)^{-3/2} \frac{dv}{dt}, \\ \frac{\Delta W q B}{2\pi m_0} \left(1 - v^2/c^2\right)^{1/2} &= m_0 v \left(1 - v^2/c^2\right)^{-3/2} \frac{dv}{dt}, \\ \frac{\Delta W q B}{2\pi m_0} dt &= \frac{1}{2} m_0 v \left(1 - v^2/c^2\right)^{-2} dv^2.\end{aligned}$$

Проинтегрировав это выражение и совершив ряд преобразований, получим

$$\begin{aligned}\int_0^t \frac{\Delta W q B}{\pi m_0} dt &= \int_0^v m_0 v \left(1 - v^2/c^2\right)^{-2} dv^2, \\ \frac{\Delta W q B}{\pi m_0^2} t &= c^2 \left(\left(1 - v^2/c^2\right)^{-1} - 1 \right), \\ \frac{\Delta W q B}{\pi m_0^2 c^2} t + 1 &= \frac{1}{1 - v^2/c^2}, \\ \sqrt{1 - v^2/c^2} &= \frac{1}{\sqrt{1 + \frac{\Delta W q B}{\pi m_0^2 c^2} t}}.\end{aligned}$$

Интересующий нас закон изменения частоты имеет вид

$$\omega(t) = \frac{2\pi}{T} = \frac{qB}{m_0} \sqrt{1 - v^2/c^2} = \frac{qB}{m_0} \frac{1}{\sqrt{1 + \frac{\Delta W q B}{\pi m_0^2 c^2} t}}.$$

Для упрощения записи обычно используют обозначения

$$\omega_0 = \frac{qB}{m_0}, \quad \alpha = \frac{\Delta W q B}{\pi m_0^2 c^2}.$$

Тогда

$$\omega(t) = \frac{\omega_0}{\sqrt{1 + \alpha t}}.$$

3.12. Применять циклотрон для получения электронов высоких энергий не представляется эффективным, поскольку они, обладая малой массой, очень быстро приобретают высокую скорость, что приводит к возникновению релятивистских эффектов, нарушающих работу циклотрона. Для генерации релятивистских электронов высоких энергий применяются микротроны (рис. 3.5).

Частота переменного напряжения, генерируемая в этом устройстве, подобрана таким образом, что период этих колебаний равен изменению ΔT периода обращения электронов в магнитном поле. Пусть индукция магнитного поля $B = 107$ мТл, генератор переменного напряжения имеет частоту $\nu = 3,00$ ГГц. Приращение периода обращения электронов $\Delta T = T_0$.

Чему равно число оборотов N , совершенных электроном, если его конечная энергия $W_k = 4,6$ МэВ?

Решение. Воспользуемся результатами задачи 3.10:

$$T = \frac{2\pi m}{qB} = \frac{2\pi m_0}{qB\sqrt{1 - v^2/c^2}},$$

$$W_k = m_0 c^2 \left(\frac{1}{\sqrt{1 - v^2/c^2}} - 1 \right),$$

$$\frac{m_0}{\sqrt{1 - v^2/c^2}} = \frac{W_k}{c^2} + m_0,$$

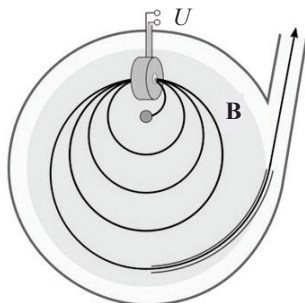


Рис. 3.5

и тогда

$$T = \frac{2\pi m_0}{qB\sqrt{1-v^2/c^2}} = \frac{2\pi}{qB} \left(\frac{W_k}{c^2} + m_0 \right),$$

$$\Delta T = T_n - T_{n-1} = \frac{2\pi}{qB} \frac{W_{kn} - W_{k(n-1)}}{c^2} = \frac{2\pi \Delta W_k}{qBc^2},$$

$$\Delta W_k = \frac{qBc^2}{2\pi} \Delta T = \frac{qBc^2}{2\pi} T_0 = \frac{qBc^2}{2\pi v}.$$

Найдем число оборотов:

$$N = \frac{W_k}{\Delta W_k} = \frac{2\pi v W_k}{qBc^2} = 9.$$

3.13. С поверхности металлической трубки с радиусом сечения a вылетает электрон, начальная скорость которого v_0 перпендикулярна поверхности трубки. По трубке протекает ток I . Под действием силы Лоренца электрон совершает движение по криволинейной траектории (рис. 3.6). Найти максимальное удаление r_m электрона от оси трубки.

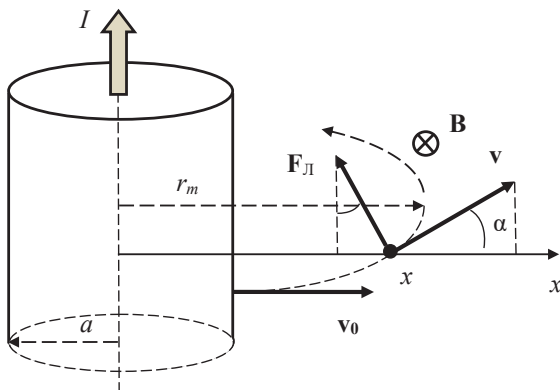


Рис. 3.6

Решение. В магнитном поле $\mathbf{B}$ на электрон действует сила Лоренца $\mathbf{F}_\text{Л}$:

$$\begin{aligned}\mathbf{F}_\text{Л} &= m\mathbf{a}, \\ F_x &= ma_x, \\ F_x &= m \frac{dv_x}{dt} = m \frac{dv_x}{dx} \frac{dx}{dt} = m \frac{dv_x}{dx} v_x.\end{aligned}$$

Имея в виду, что

$$\begin{aligned}v &= v_0, \quad v_x = v \cos \alpha, \quad dv_x = -v \sin \alpha d\alpha, \\ F_x &= -F_\text{Л} \sin \alpha = -evB \sin \alpha = -ev \frac{\mu_0 I}{2\pi x} \sin \alpha,\end{aligned}$$

получим

$$\begin{aligned}-ev \frac{\mu_0 I}{2\pi x} \sin \alpha &= -m \frac{v \sin \alpha d\alpha}{dx} v \cos \alpha, \\ \int_a^{r_m} \frac{dx}{x} &= \frac{2\pi m v_0}{\mu_0 I e} \int_0^{\pi/2} \cos \alpha d\alpha, \\ \ln \frac{r_m}{a} &= \frac{2\pi m v_0}{\mu_0 I e}, \\ r_m &= a \exp \frac{v_0}{b}, \quad \text{где } b = \frac{\mu_0 I e}{2\pi m}.\end{aligned}$$

3.14. Частица влетает в цилиндрический конденсатор, входясь в плоскости, перпендикулярной его оси, так, как это показано на рис. 3.7. Разность потенциалов между его обкладками равна U . Скорость частицы подобрана таким образом, что внутри конденсатора она движется по дуге окружности. Вылетев из конденсатора, частица попадает в поперечное магнитное поле B , в котором она движется по круговой траектории радиусом r . Чему равен удельный заряд частицы q/m и ее скорость?

Решение. При движении частицы в поле конденсатора модуль ее скорости не меняется:

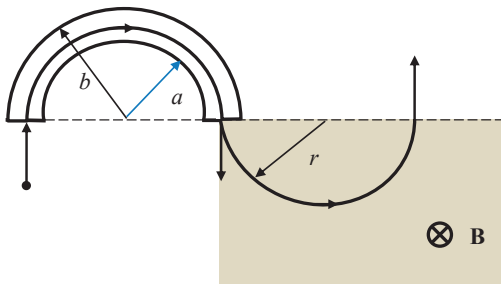


Рис. 3.7

$$\frac{mv^2}{r} = qE = q \frac{\lambda}{4\pi\epsilon_0 r},$$

$$mv^2 = q \frac{\lambda}{4\pi\epsilon_0},$$

где λ имеет смысл заряда, приходящегося на единицу длины цилиндрического конденсатора.

Для того чтобы найти его, воспользуемся соотношением

$$d\varphi = -E dr,$$

$$d\varphi = -\frac{\lambda}{4\pi\epsilon_0 r} dr,$$

$$U = \int_a^b \frac{\lambda}{4\pi\epsilon_0 r} dr = \frac{\lambda}{4\pi\epsilon_0} \ln \frac{b}{a},$$

$$\frac{\lambda}{4\pi\epsilon_0} = \frac{U}{\ln \frac{b}{a}}.$$

Тогда

$$v = \sqrt{\frac{q}{m} \frac{\lambda}{4\pi\epsilon_0}} = \sqrt{\frac{qU}{m \ln b/a}}.$$

В магнитном поле **B** скорость частицы связана с радиусом окружности r формулой

$$r = \frac{mv}{qB} = \frac{m}{qB} \sqrt{\frac{qU}{m \ln b/a}},$$

$$r^2 = \frac{m}{qB^2} \frac{U}{\ln b/a},$$

$$\frac{q}{m} = \frac{U}{r^2 B^2 \ln b/a}.$$

Подставим это выражение в формулу для скорости и получим

$$v = \frac{U}{rB \ln b/a}.$$

3.15. Частица с удельным зарядом q/m и скоростью v_0 влетает в пространство, в котором существуют однородные электрическое E и магнитное B поля, направление которых совпадает с осью y (рис. 3.8). В точке O скорость частицы направлена вдоль оси x . Каковы координаты y_n точек, в которых частица будет пересекать ось y при своем движении? Чему равен угол, который образует вектор скорости v с осью y в этих точках?

Решение. Движение частицы в этом пространстве происходит по спирали постоянного радиуса

$$R = \frac{mv_0}{qB},$$

и период ее обращения также будет постоянен:

$$T = \frac{2\pi R}{v_0} = \frac{2\pi m}{qB}.$$

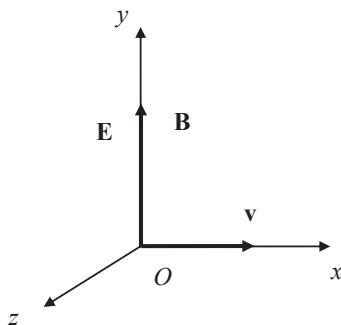


Рис. 3.8

Координата y частицы зависит от времени по закону

$$y = \frac{a_y t^2}{2} = \frac{1}{2} \frac{qE}{m} t^2,$$

и координата точки, совершившей n оборотов, будет равна

$$y_n = \frac{1}{2} \frac{qE}{m} (nT)^2 = \frac{1}{2} \frac{qE}{m} \left(n \frac{2\pi m}{qB} \right)^2 = \frac{2\pi^2 m E}{q B^2} n^2.$$

Угол, который образует вектор скорости v с осью y в этих точках, находится из равенства

$$\tan \alpha = \frac{v_y}{v_0} = \frac{a_y t}{v_0} = \frac{qE}{m v_0} n T = \frac{qE}{m v_0} n \frac{2\pi m}{qB} = \frac{2\pi E n}{v_0 B}.$$

3.16. Частица массой m , имеющая заряд q , движется прямолинейно в пространстве, в котором существуют скрещенные электрическое E и магнитное B поля, их направления совпадают с осями y и z (рис. 3.9). Когда частица оказывается в точке O , ее вектор скорости лежит в плоскости xu и составляет угол α с осью x . В этот момент происходит отключение электрического поля.

Чему равен шаг спирали, по которой будет двигаться частица?

Решение. Для того чтобы движение частицы в скрещенных полях было прямолинейным, необходимо выполнение условия

$$F_{\text{л}} = F_k,$$

$$qvB \sin(\pi/2 - \alpha) = qE,$$

$$v = \frac{E}{B \cos \alpha}.$$

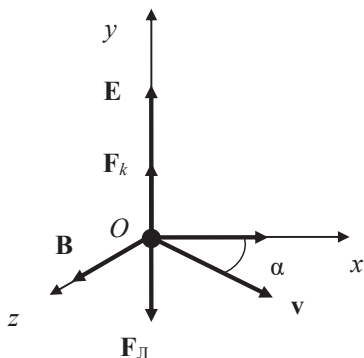


Рис. 3.9

После выключения электрического поля частица начинает двигаться по спирали, ось которой совпадает с направлением вектора $\mathbf{B}$. Шаг определяется формулой

$$h = v_z T = v \cos(\pi/2 - \alpha) \frac{2\pi m}{qB} = \\ = \frac{E}{B \cos \alpha} \sin \alpha \frac{2\pi m}{qB} = \frac{2\pi E}{B^2} \frac{q}{m} \tan \alpha.$$

3.17. Между обкладками конденсатора длиной l создано электрическое поле с напряженностью E . Конденсатор помещен в поперечное магнитное поле B (рис. 3.10). Поток ионов, прямолинейно распространяющийся в нем параллельно обкладкам, образует след в точке O на фотопластинке, расположенной на расстоянии b от пластин конденсатора. При выключении поля B этот след смещается относительно точки O на расстояние Δy . Чему равен удельный заряд иона?

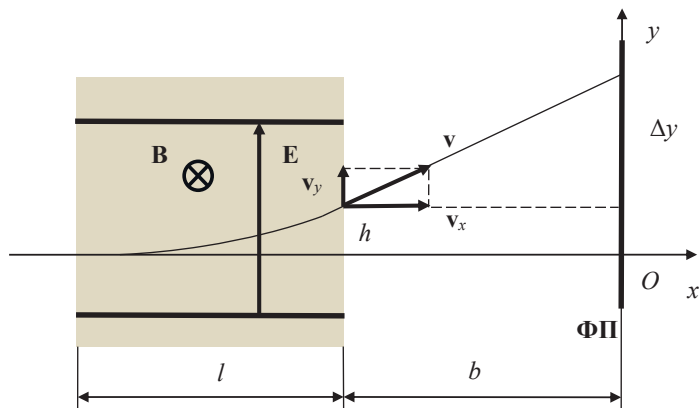


Рис. 3.10

Решение. Поскольку траектории ионов являются прямолинейными, силы, действующие на них со стороны электри-

ческого и магнитного полей, должны быть равны и противоположно направлены:

$$F_{\text{л}} = F_{\text{эл}}, \quad qv_x B = qE,$$

$$v_x = \frac{E}{B},$$

Расстояние в конденсаторе ион пролетает за время

$$\tau = \frac{l}{v_x} = \frac{lB}{E}.$$

При выключении магнитного поля ион начинает двигаться с ускорением, направленным вдоль оси y и равным

$$ma = qE, \quad a = \frac{qE}{m},$$

при этом траектория иона становится параболой, за время пролета конденсатора он сместится вверх на расстояние h и приобретет вертикальную составляющую скорости v_y (рис. 3.10):

$$\Delta y = h + v_y \frac{b}{v_x} = \frac{ql^2 B^2}{2mE} + \frac{qlB^2 b}{mE} = \frac{qlB^2}{2mE} (l + 2b).$$

Тогда

$$\frac{q}{m} = \frac{2E\Delta y}{lB^2(l + 2b)}.$$

3.18. В пространстве существуют взаимно перпендикулярные электрическое E и магнитное B поля (рис. 3.11). В точку O поместили частицу, обладающую удельным зарядом q/m , ее начальная скорость равна нулю. Как будут изменяться со временем ее координаты $x(t)$ и $y(t)$? По какой траектории будет двигаться частица?

Решение. Уравнение движения частицы можно записать в виде

$$m \frac{d^2 \mathbf{r}}{dt^2} = q(\mathbf{E} + [\mathbf{v}\mathbf{B}]).$$

Учтем, что

$$[\mathbf{v}\mathbf{B}] = \begin{vmatrix} \mathbf{i} & \mathbf{j} & \mathbf{k} \\ v_x & v_y & v_z \\ 0 & 0 & B \end{vmatrix} = \mathbf{i}Bv_y - \mathbf{j}Bv_x,$$

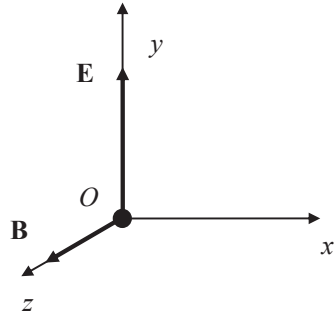


Рис. 3.11

и тогда

$$\begin{aligned} \frac{dv_x}{dt} &= \frac{qB}{m} v_y = \omega v_y, & \omega &= \frac{qB}{m}, \\ \frac{dv_y}{dt} &= \frac{qE}{m} - \frac{qB}{m} v_x = \frac{qE}{m} - \omega v_x, \\ \frac{dv_z}{dt} &= 0, & v_z &= \text{const} = 0, \end{aligned}$$

потому что первоначально частица покоилась. Движение, таким образом, происходит в плоскости $xу$.

Умножим второе уравнение на мнимую единицу i , сложим первое и второе уравнения и введем комплексную переменную

$$\xi = v_x + iv_y.$$

Мы пришли к уравнению

$$\frac{d\xi}{dt} = i \frac{qE}{m} - i\omega \xi = i\omega \frac{E}{B} - i\omega \xi.$$

Умножим его левую и правую части на экспоненту $e^{i\omega t}$ и преобразуем к виду, удобному для интегрирования:

$$\frac{d\xi}{dt} e^{i\omega t} = i\omega \frac{E}{B} e^{i\omega t} - i\omega \xi e^{i\omega t},$$

$$\frac{d\xi}{dt} e^{i\omega t} + i\omega \xi e^{i\omega t} = i\omega \frac{E}{B} e^{i\omega t},$$

$$\frac{d(\xi e^{i\omega t})}{dt} = i\omega \frac{E}{B} e^{i\omega t},$$

$$d(\xi e^{i\omega t}) = i\omega \frac{E}{B} e^{i\omega t} dt.$$

Проинтегрируем это выражение:

$$\xi e^{i\omega t} = \frac{E}{B} e^{i\omega t} + C e^{-i\alpha},$$

$$\xi = \frac{E}{B} + C e^{-i(\omega t + \alpha)},$$

где C и α — постоянные интегрирования.

$$v_x = \operatorname{Re} \xi = \frac{E}{B} + C \cos(\omega t + \alpha),$$

$$v_y = \operatorname{Im} \xi = -C \sin(\omega t + \alpha).$$

Учтем начальные условия:

$$\text{при } t=0 \quad v_y = -C \sin(\omega t + \alpha) = 0, \text{ следовательно, } \alpha = 0,$$

$$\text{при } t=0 \quad v_x = \frac{E}{B} + C \cos(\omega t + \alpha) = \frac{E}{B} + C, \quad C = -\frac{E}{B},$$

и тогда

$$v_x = \frac{E}{B} (1 + \cos \omega t),$$

$$v_y = -\frac{E}{B} \sin \omega t.$$

Еще раз проинтегрируем эти выражения и с учетом начальных условий получим

$$x(t) = \frac{E}{B} \left(t + \frac{\sin \omega t}{\omega} \right),$$

$$y(t) = -\frac{E}{\omega B} (1 - \cos \omega t).$$

Это уравнение циклоиды.

3.19. Решить предыдущую задачу в случае, когда напряженность электрического поля зависит от времени по закону $E = E_m \cos \omega t$, где $\omega = qB / m$.

Решение. Уравнение движения частицы

$$m \frac{d^2 \mathbf{r}}{dt^2} = q (\mathbf{E} + [\mathbf{v} \mathbf{B}]),$$

и тогда

$$\frac{dv_x}{dt} = \frac{qB}{m} v_y = \omega v_y, \quad \omega = \frac{qB}{m},$$

$$\frac{dv_y}{dt} = \frac{qE_m}{m} \cos \omega t - \frac{qB}{m} v_x = \frac{qE_m}{m} \cos \omega t - \omega v_x,$$

$$\frac{dv_z}{dt} = 0, \quad v_z = \text{const} = 0.$$

Введем комплексную переменную

$$\xi = v_x + i v_y.$$

Мы пришли к уравнению

$$\frac{d\xi}{dt} = i \frac{E_m}{B} \omega \cos \omega t - i \omega \xi.$$

Умножим его левую и правую части на экспоненту $e^{i\omega t}$ и преобразуем к виду, удобному для интегрирования:

$$\begin{aligned}\frac{d\xi}{dt} &= i\omega \frac{E_m}{2B} (e^{2i\omega t} + 1), \\ d(\xi e^{i\omega t}) &= i\omega \frac{E_m}{2B} (e^{2i\omega t} + 1) dt, \\ \xi e^{i\omega t} &= \frac{E_m}{4B} e^{2i\omega t} + i\omega t \frac{E_m}{2B} + C, \\ \xi &= \frac{E_m}{4B} (e^{i\omega t} + 2i\omega t e^{-i\omega t}) + C e^{-i\omega t}.\end{aligned}$$

С учетом начального условия $t = 0 \quad \xi = 0$, получим $C = -\frac{E_m}{4B}$,

а с учетом формулы Эйлера

$$\xi = i \frac{E_m}{2B} \sin \omega t + i \frac{E_m}{2B} \omega t e^{i\omega t},$$

и тогда

$$\begin{aligned}\xi &= i \frac{E_m}{2B} \sin \omega t + i \frac{E_m}{2B} \omega t e^{i\omega t}, \\ v_x &= \frac{E_m}{2B} \omega t \sin \omega t, \\ v_y &= \frac{E_m}{2B} \sin \omega t + \frac{E_m}{2B} \omega t \cos \omega t.\end{aligned}$$

Проведя повторное интегрирование, получим ответ:

$$\begin{aligned}x &= \frac{a}{2\omega^2} (\sin \omega t - \omega t \cos \omega t), \\ y &= \frac{a}{2\omega} t \sin \omega t.\end{aligned}$$

В этих формулах использовано обозначение $a = qE_m / m$. Траектория представляет собой раскручивающуюся спираль.

3.20. Система представляет собой два коаксиальных цилиндра, по оси которых расположен проводник. По нему протекает ток I , достаточный для возникновения термоэлектронной эмиссии с поверхности внутреннего цилиндра, играющего роль катода (рис. 3.12). Между катодом и анодом (внешний цилиндр) существует разность потенциалов U . При каком минимальном значении U в цепи начнет протекать ток?

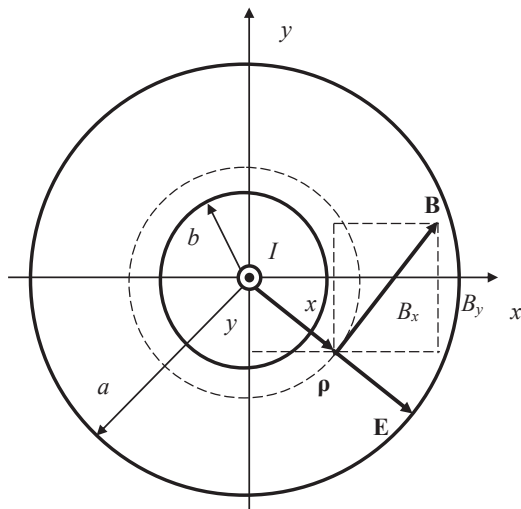


Рис. 3.12

Решение. Вектор $\mathbf{B}$ направлен по касательной к силовой линии и в точке с координатами (x, y) имеет модуль

$$B = \frac{\mu_0 I}{2\pi\rho}, \quad \rho^2 = x^2 + y^2,$$

и проекции

$$B_x = \frac{\mu_0 I y}{2\pi\rho^2}, \quad B_y = \frac{\mu_0 I x}{2\pi\rho^2}, \quad B_z = 0.$$

Электрическое поле в этой точке имеет потенциал φ [1],

$$\varphi = \frac{\ln \rho / b}{\ln a / b} U,$$

и проекции вектора напряженности электрического поля

$$E_x = \frac{Ux}{\rho^2 \ln a / b}, \quad E_y = -\frac{Uy}{\rho^2 \ln a / b}, \quad E_z = 0.$$

Уравнение движения частицы запишем в виде

$$m \frac{d^2 \mathbf{r}}{dt^2} = e(\mathbf{E} + [\mathbf{vB}]).$$

Учтем, что

$$[\mathbf{vB}] = \begin{vmatrix} \mathbf{i} & \mathbf{j} & \mathbf{k} \\ v_x & v_y & v_z \\ B_x & B_y & 0 \end{vmatrix} = -\mathbf{i}B_y v_z + \mathbf{j}B_x v_z + \mathbf{k}(B_y v_x - B_x v_y),$$

и тогда

$$\begin{aligned} m \frac{dv_x}{dt} &= eB_y v_z + eE_x = e \frac{\mu_0 Ix}{2\pi\rho^2} \dot{z} + e \frac{Ux}{\rho^2 \ln a / b}, \\ m \frac{dv_y}{dt} &= eE_y - eB_x v_z = e \frac{\mu_0 Iy}{2\pi\rho^2} + e \frac{\mu_0 Ix}{2\pi\rho^2} \dot{z}, \\ m \frac{dv_z}{dt} &= B_y v_x - B_x v_y = -\frac{\mu_0 eIx}{2\pi\rho^2} v_x - \frac{\mu_0 eIy}{2\pi\rho^2} v_y = \\ &= -e \frac{\mu_0 I}{2\pi\rho^2} (x\dot{x} + y\dot{y}) = -e \frac{\mu_0 I}{2\pi} \frac{d}{dt} \ln \rho. \end{aligned}$$

Проинтегрируем последнее уравнение, учитывая, что $v_z = 0$ при $\rho = a$:

$$mv_z = -e \frac{\mu_0 I}{2\pi} \frac{\ln \rho}{a} = m\dot{z}.$$

Подставим это выражение в первые два уравнения и преобразуем их:

$$\begin{aligned} \frac{d}{dt} \left(\frac{mv_x^2}{2} + \frac{mv_y^2}{2} \right) &= \left(\frac{eU}{\ln a/b} - \frac{e^2}{m} \left(\frac{\mu_0 I}{2\pi} \right)^2 \ln \frac{\rho}{b} \right) \frac{x\dot{x} + y\dot{y}}{\rho^2} = \\ &= \left(\frac{eU}{\ln a/b} - \frac{e^2}{m} \left(\frac{\mu_0 I}{2\pi} \right)^2 \ln \frac{\rho}{b} \right) \frac{1}{2\rho^2} \frac{d}{dt} \rho^2 = \\ &= \left(\frac{eU}{\ln a/b} - \frac{e^2}{m} \left(\frac{\mu_0 I}{2\pi} \right)^2 \ln \frac{\rho}{b} \right) \frac{d}{dx} \ln \frac{\rho}{b}. \end{aligned}$$

Нам осталось проинтегрировать это выражение с учетом того, что $v^2 = v_x^2 + v_y^2 = 0$ при $\rho = b$:

$$\frac{mv^2}{2} = \frac{eU}{\ln a/b} \ln \frac{\rho}{b} - \frac{e^2}{2m} \left(\frac{\mu_0 I}{2\pi} \right)^2 \ln \frac{\rho}{b}.$$

Левая часть этого равенства — величина положительная при любых значениях ρ в диапазоне $a > \rho > b$, и это выполняется при

$$U \geq \frac{e}{2m} \left(\frac{\mu_0 I}{2\pi} \right)^2 \ln \frac{a}{b}.$$

3.21. На оси металлического цилиндра радиусом a , играющего роль анода, расположен проводник, имеющий радиус b , по которому протекает ток I , достаточный для возникновения термоэлектронной эмиссии с поверхности этого проводника. Между проводником и цилиндром приложено напряжение U . Система помещена в однородное магнитное поле, направленное вдоль ее оси. Каково наибольшее зна-

чение индукции магнитного поля, при котором электроны, имеющие при вылете скорость, близкую к нулю, будут еще достигать анода?

Решение. Воспользуемся результатами предыдущей задачи с учетом того, что в данном случае $B_x = B_y = 0$, $B_z = B$.

Запишем уравнения движения для электрона:

$$\frac{d}{dt}mv_x = \frac{eUx}{\rho^2 \ln \frac{a}{b}} - eB\dot{y},$$

$$\frac{d}{dt}mv_y = \frac{eUy}{\rho^2 \ln \frac{a}{b}} - eB\dot{x},$$

$$\frac{d}{dt}mv_z = 0,$$

и с учетом начального условия $v_z = 0$.

Движение, таким образом, происходит в плоскости $xу$. Преобразуем первые два уравнения:

$$\frac{d}{dt}\left(\frac{1}{2}mv^2\right) = eU \frac{\ln \rho / b}{\ln a / b} \frac{x\dot{x} + y\dot{y}}{\rho^2}$$

или

$$\frac{1}{2}mv^2 = eU \frac{\ln \rho / b}{\ln a / b}.$$

Таким образом, при $\rho = a$

$$v = \sqrt{\frac{2eU}{m}}.$$

С другой стороны, если исключить U ,

$$\frac{d}{dt}m(xv_y - yv_x) = eB(x\dot{x} + y\dot{y}).$$

Иначе говоря,

$$xv_y - yv_x = \frac{eB}{2m} \rho^2 + \text{const.}$$

Эту постоянную определим из начального условия, $v = 0$ при $\rho = b$,

$$xv_y - yv_x = \frac{eB}{2m} (\rho^2 - b^2) \geq 0,$$

при $\rho = a$

$$xv_y - yv_x \leq va,$$

то есть

$$va \geq \frac{eB}{2m} (a^2 - b^2).$$

Таким образом,

$$va \geq \frac{eB}{2m} (a^2 - b^2),$$

$$B \leq \frac{2ma}{a^2 - b^2} \sqrt{\frac{2eU}{m}} \frac{1}{e} = \frac{2a}{a^2 - b^2} \sqrt{\frac{2mU}{e}}.$$

3.22. Внутри катушки на расстоянии ρ от ее оси находится электрон. По обмотке катушки пропустили ток, в результате чего внутри нее скачком возникло магнитное поле B . Какую скорость приобрел при этом электрон? Чему равен радиус r окружности, по которой он будет двигаться?

Решение. Изменяющееся магнитное поле порождает в объеме катушки вихревое электрическое поле, линии которого замкнуты и лежат в плоскости, перпендикулярной оси катушки (рис. 3.13).

Для того чтобы найти напряженность этого поля, воспользуемся уравнением Максвелла:

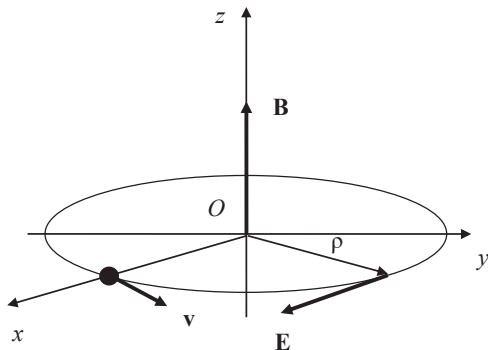


Рис. 3.13

$$\oint_L \mathbf{E} d\mathbf{l} = -\frac{d}{dt} \int_S \mathbf{B} d\mathbf{S},$$

$$2\pi\rho E = -\pi\rho^2 \frac{dB}{dt},$$

$$E = -\frac{\rho}{2} \frac{dB}{dt}.$$

По второму закону Ньютона

$$m \frac{dv}{dt} = |-eE| = \frac{1}{2} e \frac{dB}{dt} \rho,$$

$$v = \frac{eB\rho}{2m}.$$

Радиус окружности, по которой будет вращаться электрон,

$$r = \frac{mv}{eB} = \frac{\rho}{2},$$

$$v = \frac{eB\rho}{2m}.$$

3.23. Для ускорения электронов применяют устройство, называемое *бетатроном*. Оно представляет собой тороидальную камеру, помещенную между полюсами электромагнита, по обмотке которого протекает переменный ток. Создаваемое этим током переменное магнитное поле порождает вихревое электрическое поле, а также формирует стационарную круговую траекторию электронов. Будем считать, что в процессе ускорения электронов магнитный поток в пределах их круговой траектории радиусом $r = 0,25$ м растет по линейному закону со скоростью $\dot{\Phi} = 6,0$ Вб/с. Конечная энергия, приобретенная электронами, $W = 30$ МэВ. Чему равно число оборотов электронов в процессе ускорения, а также длина их траектории движения?

Решение. Изменяющееся магнитное поле создает вихревое электрическое поле, напряженность которого найдем, используя уравнение Максвелла:

$$\oint_L \mathbf{E} d\mathbf{l} = -\frac{d}{dt} \int_S \mathbf{B} d\mathbf{S} = -\frac{d\Phi}{dt} = -\dot{\Phi},$$

$$2\pi r E = |-\dot{\Phi}|,$$

$$E = \frac{\dot{\Phi}}{2\pi r}.$$

За один оборот электрон приобретает энергию

$$W_1 = F 2\pi r = e E 2\pi r = e \dot{\Phi},$$

и число оборотов N электронов в процессе ускорения

$$N = \frac{W}{W_1} = \frac{W}{e \dot{\Phi}} = 5 \cdot 10^6.$$

Длина траектории движения электронов

$$s = 2\pi r N = 2\pi r \frac{W}{e \dot{\Phi}} = 8 \cdot 10^6 \text{ м.}$$

3.24. Индукция магнитного поля на стационарной орбите ($r = 20$ см) электронов в бетатроне изменяется по закону, близкому к линейному, от нуля до $B = 0,8$ Тл за время $\Delta t = 1,0$ мс. Чему равно приращение энергии электрона за один оборот?

Решение. В предыдущей задаче мы увидели, что за один оборот приращение энергии электрона

$$\begin{aligned} W_1 &= e\dot{\Phi} = e\pi r_0^2 \langle \dot{B} \rangle = 2e\pi r_0^2 \dot{B}(r_0) \approx \\ &\approx 2e\pi r_0^2 \frac{B}{\Delta t} = 0,20 \text{ кэВ}. \end{aligned}$$

При решении задачи мы воспользовались бетатронным условием, рассмотренным в задаче 3.25.

3.25. Для движения электронов по стационарной орбите при их ускорении в бетатроне необходимо выполнение *бетатронного условия*: индукция магнитного поля на этой орбите должна быть в два раза меньше ее среднего значения, рассчитанного по площади, ограниченной стационарной орбитой электронов. Необходимо доказать справедливость этого утверждения.

Решение. Воспользуемся вторым законом Ньютона:

$$\frac{dp}{dt} = F = eE.$$

Как показано в задаче 3.22,

$$\begin{aligned} \oint_L \mathbf{E} d\mathbf{l} &= -\frac{d}{dt} \int_S \mathbf{B} d\mathbf{S}, \\ 2\pi r E &= -\pi r^2 \frac{d\langle B \rangle}{dt}, \\ E &= \left| -\frac{r}{2} \frac{d\langle B \rangle}{dt} \right|. \end{aligned}$$

Таким образом,

$$\frac{dp}{dt} = eE = \frac{er}{2} \frac{d\langle B \rangle}{dt},$$

$$p = \frac{er}{2} \langle B \rangle.$$

С другой стороны,

$$\frac{mv^2}{r} = F_{\text{л}} = evB(r),$$

$$mv = erB(r),$$

$$p = erB(r),$$

и мы получаем бетатронное условие

$$B(r) = \frac{1}{2} \langle B \rangle.$$

3.26. Поле, создаваемое в бетатроне между полюсами электромагнита, можно описать формулой $B(r) = B_0 - ar^2$, где r — расстояние от центра поля, B_0 и a — постоянные. Чему равен радиус r_0 стационарной орбиты электрона?

Решение. Воспользуемся бетатронным условием:

$$B(r) = \frac{1}{2} \langle B \rangle,$$

$$B_0 - ar_0^2 = \frac{1}{2\pi r_0^2} \int_0^{r_0} (B_0 - ar^2) 2\pi r dr =$$

$$= \frac{1}{r_0^2} \left(\frac{1}{2} B_0 r_0^2 - \frac{1}{4} ar_0^4 \right) = \frac{1}{4} (2B_0 - ar_0^2),$$

$$2B_0 - 3ar_0^2 = 0,$$

$$r_0 = \sqrt{\frac{2B_0}{3a}}.$$

4. Электромагнитная индукция

4.1. Контур состоит из неподвижной рамки и дуги полуокружности радиусом R , которая может вращаться так, как это показано на рис. 4.1. Контур помещен в магнитное поле B . Найти закон, по которому ЭДС индукции, возникающая в контуре, зависит от времени. Дуга вращается вокруг оси с угловой скоростью ω , и при $t = 0$ магнитный поток принимает максимальное значение.

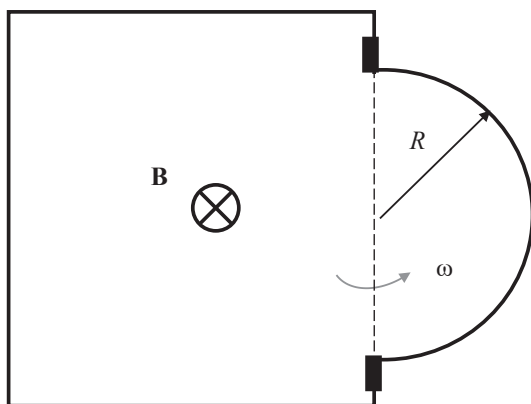


Рис. 4.1

Решение. Магнитный поток, пронизывающий контур, можно представить в виде двух слагаемых — постоянной Φ_1 и переменной Φ_2 части:

$$\Phi = \Phi_1 + \Phi_2 = \Phi_1 + \Phi_0 \cos \omega t.$$

ЭДС индукции, возникающая в контуре,

$$\varepsilon_i = -\frac{d\Phi}{dt} = -\frac{d\Phi_2}{dt} = \frac{1}{2} \pi R^2 B \omega \sin \omega t.$$

4.2. В горизонтальной плоскости xy расположен проводник, имеющий форму параболы $y = kx^2$. На нем находится перемычка в виде стержня, параллельного оси x (рис. 4.2). Однородное магнитное поле B направлено вдоль оси z . При $t = 0$ стержень пришел в движение со скоростью v . Как ЭДС индукции, возникающая в стержне, зависит от его координаты y ?

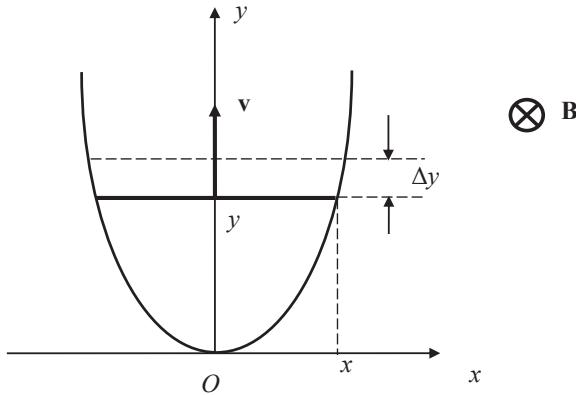


Рис. 4.2

Решение. Изменение магнитного потока $d\Phi$ за время dt

$$d\Phi = 2Bx dy,$$

$$y = kx^2, \quad x = \sqrt{y/k},$$

$$d\Phi = 2B\sqrt{y/k} dy.$$

Таким образом,

$$\varepsilon_i = -\frac{d\Phi}{dt} = \frac{2B\sqrt{y/k} dy}{dt} = 2Bv\sqrt{y/k}.$$

4.3. В горизонтальной плоскости расположен проводник, имеющий П-образную форму, его средняя часть длиной l параллельна прямому проводу с током I (рис. 4.3). По проводнику перемещается перемычка со скоростью v . Чему равна ЭДС индукции, возникающая в образовавшемся контуре?

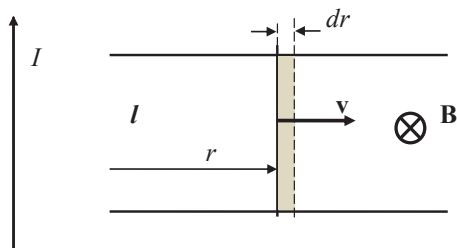


Рис. 4.3

Решение. Изменение магнитного потока $d\Phi$ за время dt связано с увеличением площади контура:

$$\varepsilon_i = \frac{d\Phi}{dt} = B \frac{dS}{dt} = \frac{\mu_0 I}{2\pi r} \frac{ldr}{dt} = \frac{\mu_0 I l}{2\pi r} v.$$

4.4. В горизонтальной плоскости расположены проводник с током I и квадратный контур со стороной a , удаляющийся от проводника со скоростью v (рис. 4.4). Как зависит ЭДС индукции, возникающая в контуре, от скорости?

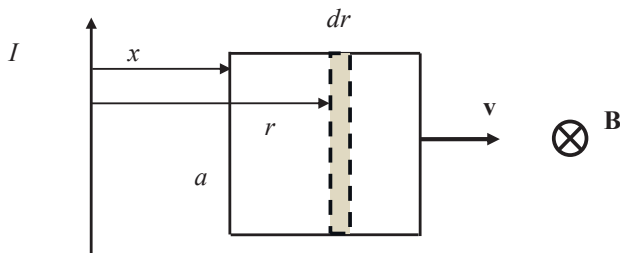


Рис. 4.4

Решение. Изменение магнитного потока $d\Phi$, пронизывающего контур за время dt , связано с уменьшением индукции магнитного поля в пределах контура при его удалении от проводника с током. Вычислим магнитный поток через площадь контура:

$$\Phi = \int_x^{x+a} B dS = \int_x^{x+a} \frac{\mu_0 I}{2\pi r} a dr = \frac{\mu_0 I a}{2\pi} \ln \frac{x+a}{x}.$$

Найдем ЭДС индукции:

$$\begin{aligned} \varepsilon_i &= -\frac{d\Phi}{dt} = -\frac{\mu_0 I a}{2\pi} \frac{d}{dt} \left(\ln \frac{x+a}{x} \right) = \\ &= -\frac{\mu_0 I a}{2\pi} \frac{d}{dx} \left(\ln \frac{x+a}{x} \right) \frac{dx}{dt} = \frac{\mu_0 I a^2 v}{2\pi x(x+a)}. \end{aligned}$$

4.5. Объяснить, почему при вращении проводящего диска возникает разность потенциалов между точками, лежащими на оси вращения диска, и точками, находящимися на расстоянии r от этой оси. Считать, что диск вращается с угловой скоростью $\omega = 130$ рад/с, $r = 0,25$ м.

Решение. Рассмотрим ситуацию в системе отсчета K' , вращающейся вокруг выбранной оси с угловой скоростью ω . Эта система является неинерциальной, и на свободные электроны действует центробежная сила инерции (рис. 4.5), под действием которой свободные электроны смещаются в сторону периферии диска.

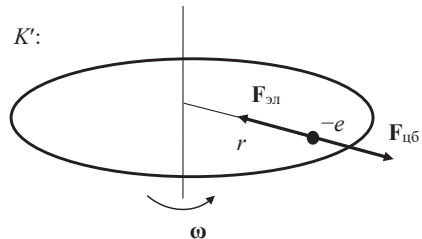


Рис. 4.5

В результате такого перераспределения на периферии появляются избыточные отрицательные заряды, а в центре — избыточные положительные. Возникает электрическое поле,

и на электроны начинает действовать электрическая сила, компенсирующая силу центробежную:

$$\mathbf{F}_{\text{эл}} + \mathbf{F}_{\text{цб}} = 0,$$

$$eE = m\omega^2 r, \quad E = \frac{m\omega^2 r}{e}.$$

Разность потенциалов найдем по формуле

$$E = -\frac{d\varphi}{dr},$$

$$\Delta\varphi = -\int_0^r E dr = -\int_0^r \frac{m\omega^2 r}{e} dr = -\frac{m\omega^2 r^2}{2e} = -3,0 \text{ пВ}.$$

4.6. Решить предыдущую задачу, если диск помещен в магнитное поле $B = 5,0 \text{ мТл}$.

Решение. Наличие магнитного поля приводит к появлению силы Лоренца (рис. 4.7), и уравнение принимает вид

$$\mathbf{F}_{\text{эл}} + \mathbf{F}_{\text{цб}} + \mathbf{F}_{\text{лб}} = 0,$$

$$eE = m\omega^2 r + evB = m\omega^2 r + e\omega r B,$$

$$E = \left(\frac{m\omega^2}{e} + \omega B \right) r.$$

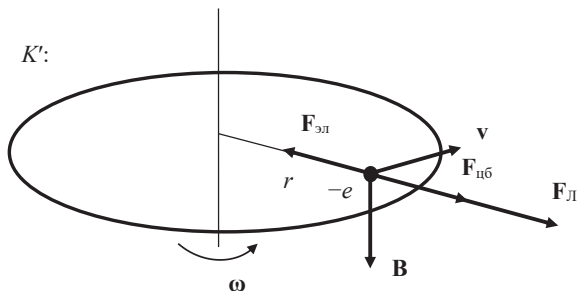


Рис. 4.6

Найдем искомую разность потенциалов:

$$\begin{aligned}\Delta\varphi &= -\int_0^r E dr = -\int_0^r \left(\frac{m\omega^2}{e} + \omega B \right) dr = \\ &= -\left(\frac{m\omega^2}{e} + \omega B \right) \frac{r^2}{2} \approx -\frac{\omega B r^2}{2} = -20 \text{ мВ}.\end{aligned}$$

4.7. Контур в виде дуги полуокружности, концы которой соединены прямым проводом, имеет ось вращения O , лежащую в плоскости, разделяющей пространство на две области, в одной из которых существует однородное магнитное поле B (рис. 4.7). При $t=0$ контур приводят во вращение с постоянным угловым ускорением β . Найти закон, по которому будет зависеть от времени ЭДС индукции, возникающая в контуре.

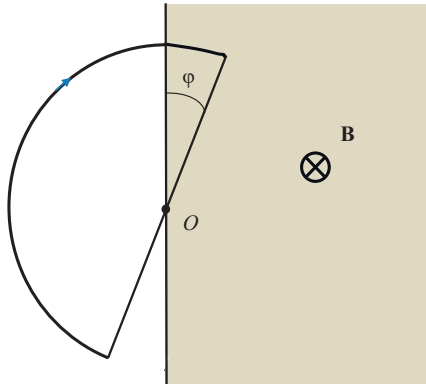


Рис. 4.7

Решение. Формулу для ЭДС индукции запишем в виде

$$\begin{aligned}|\varepsilon_i| &= B \frac{dS}{dt}, \\ S &= \frac{\pi R^2}{2\pi} \varphi = \frac{1}{2} R^2 \varphi = \frac{1}{2} R^2 \frac{1}{2} \beta t^2 = \frac{1}{4} R^2 \beta t^2,\end{aligned}$$

$$\frac{dS}{dt} = \frac{1}{2} R^2 \beta t,$$

$$|\varepsilon_i| = \frac{1}{2} B R^2 \beta t.$$

Разберемся со знаками у ЭДС индукции:

$$\varepsilon_i < 0, \text{ когда } 2n \frac{T}{2} < t < (2n+1) \frac{T}{2},$$

$$t_{2n} < t < t_{2n+1},$$

$$\varepsilon_i > 0, \text{ когда } 2n+1 \frac{T}{2} < t < (2n+2) \frac{T}{2},$$

$$t_{2n+1} < t < t_{2n+2}.$$

Время t_n найдем из условия

$$\varphi_n = \pi n, \quad \frac{\beta t_n^2}{2} = \pi n, \quad t_n = \sqrt{\frac{2\pi n}{\beta}},$$

и тогда

$$\varepsilon_i = (-1)^n \frac{1}{2} B R^2 \beta t.$$

Графически это выглядит следующим образом (рис. 4.8).

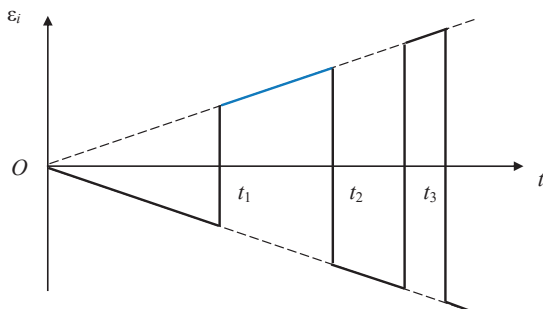


Рис. 4.8

4.8. Контур состоит из неподвижной рамки с сопротивлением R и дуги полуокружности радиусом a , которая может вращаться так, как это показано на рис. 4.9. Контур помещен в магнитное поле B . Дуга вращается вокруг оси с угловой скоростью ω , и при $t = 0$ магнитный поток принимает максимальное значение. Найти среднюю мощность, выделяемую в контуре.

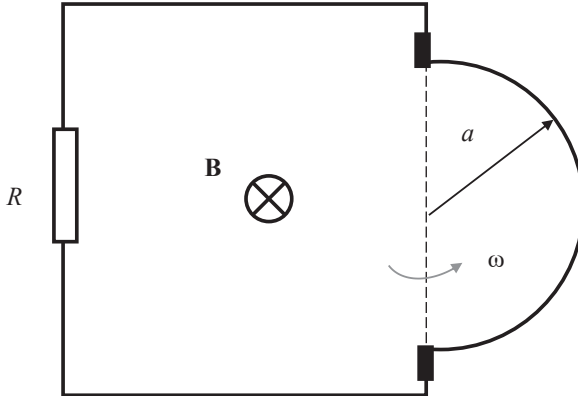


Рис. 4.9

Решение. Магнитный поток, пронизывающий контур, можно представить в виде двух слагаемых — постоянной Φ_1 и переменной Φ_2 части:

$$\Phi = \Phi_1 + \Phi_2 = \Phi_1 + \Phi_0 \cos \omega t.$$

ЭДС индукции, возникающая в контуре,

$$\varepsilon_i = -\frac{d\Phi}{dt} = -\frac{d\Phi_2}{dt} = \frac{1}{2}\pi a^2 B \omega \sin \omega t.$$

Индукционный ток

$$I = \frac{\varepsilon_i}{R} = \frac{1}{2R}\pi a^2 B \omega \sin \omega t.$$

Среднюю мощность, выделяемую в контуре, найдем так:

$$\begin{aligned}\langle P \rangle &= \frac{1}{T} \int_0^T \varepsilon_i I dt = \frac{\omega}{2\pi} \frac{1}{4R^2} \pi^2 a^4 B^2 \omega^2 \int_0^{2\pi/\omega} \sin^2 \omega t dt = \\ &= \frac{1}{8R^2} \pi a^4 B^2 \omega^3 \frac{1}{2} = \frac{\pi a^4 B^2 \omega^3}{16R^2}.\end{aligned}$$

4.9. В горизонтальной плоскости расположен длинный прямой провод, по которому протекает постоянный ток. В этой же плоскости находится квадратный контур, одна из сторон которого служит осью вращения OO' (рис. 4.10). При повороте контура на угол 180° относительно этой оси по нему прошел заряд q . Чему равна сила тока I в проводе? Все размеры указаны на рисунке.

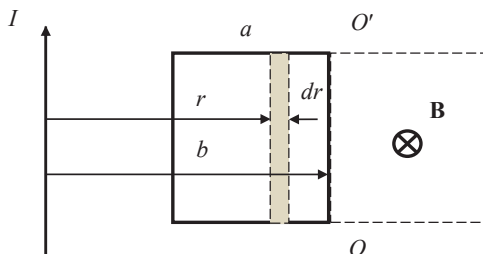


Рис. 4.10

Решение. В процессе поворота контура возникает явление электромагнитной индукции и начинает протекать индукционный ток

$$\begin{aligned}IR &= \varepsilon_i, \\ \frac{dq}{dt} &= -\frac{1}{R} \frac{d\Phi}{dt}, \\ q &= -\frac{1}{R} \int_{\Phi_1}^{\Phi_2} d\Phi = -\frac{1}{R} (-|\Phi_2| - \Phi_1) = \frac{1}{R} (|\Phi_2| + \Phi_1),\end{aligned}$$

$$\Phi_1 = \int_{b-a}^b \frac{\mu_0 I}{2\pi r} a dr = \frac{\mu_0 I}{2\pi} a \ln \frac{b}{b-a},$$

$$|\Phi_2| = \int_b^{b+a} \frac{\mu_0 I}{2\pi r} a dr = \frac{\mu_0 I}{2\pi} a \ln \frac{b+a}{b},$$

$$|\Phi_2| + \Phi_1 = \frac{\mu_0 I}{2\pi} a \ln \frac{b+a}{b-a}.$$

Тогда

$$q = \frac{1}{R} (|\Phi_2| + \Phi_1) = \frac{\mu_0 I}{2\pi R} a \ln \frac{b+a}{b-a},$$

$$I = \frac{2\pi R q}{\mu_0 a \ln \frac{b+a}{b-a}}.$$

4.10. В горизонтальной плоскости расположен длинный прямой провод, по которому протекает постоянный ток I_0 . В этой же плоскости параллельно проводу на расстояниях a и b от него лежат две проводящие шины, по которым со скоростью v движется перемычка (рис. 4.11). Слева шины соединены сопротивлением R . Чему равен индукционный ток, протекающий в этом контуре, и как он направлен? Чему равна сила, приложенная к перемычке и поддерживающая постоянной ее скорость?

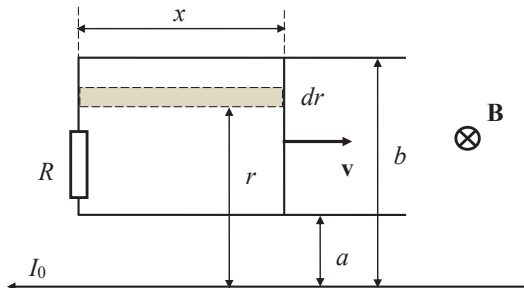


Рис. 4.11

Решение. Вычислим магнитный поток через контур в момент, когда перемычка находится на расстоянии x от его левого края:

$$\Phi = \int_a^b \frac{\mu_0 I_0}{2\pi r} x dr = \frac{\mu_0 I_0}{2\pi} x \ln \frac{b}{a}.$$

ЭДС индукции, возникающая в контуре при движении перемычки,

$$\varepsilon_i = -\frac{d\Phi}{dt} = -\frac{d}{dt} \left(\frac{\mu_0 I_0}{2\pi} x \ln \frac{b}{a} \right) = \frac{\mu_0 I_0}{2\pi} v \ln \frac{b}{a},$$

и индукционный ток

$$I = \frac{\varepsilon_i}{R} = \frac{\mu_0 I_0}{2\pi R} v \ln \frac{b}{a}.$$

По правилу Ленца этот ток будет направлен против часовой стрелки.

Сила, приложенная к перемычке и поддерживающая ее скорость постоянной, направлена вправо и по величине равна силе Ампера:

$$\begin{aligned} F &= \int_a^b IB dr = \int_a^b \frac{\mu_0 I_0}{2\pi R} v \ln \frac{b}{a} \cdot \frac{\mu_0 I_0}{2\pi r} dr = \\ &= \frac{\mu_0 I_0}{2\pi R} v \ln \frac{b}{a} \cdot \frac{\mu_0 I_0}{2\pi} \ln \frac{b}{a} = \left(\frac{\mu_0 I_0}{2\pi} \ln \frac{b}{a} \right)^2 \frac{v}{R}. \end{aligned}$$

4.11. В горизонтальной плоскости расположены две параллельные шины, соединенные слева сопротивлением R (рис. 4.12). Перемычке массой m , лежащей на шинах, сообщили направленную вправо начальную скорость v_0 и включили вертикальное магнитное поле B . Трение отсутствует, и явлении-

ем самоиндукции можно пренебречь. Чему равно расстояние, пройденное перемычкой до ее остановки?

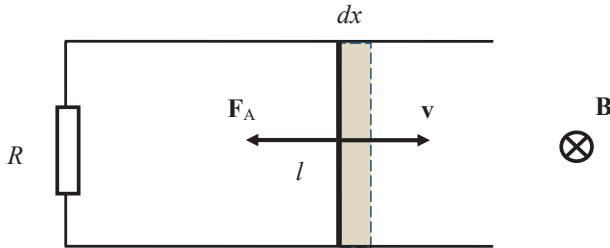


Рис. 4.12

Решение. При движении перемычки в контуре возникает ЭДС индукции и начинает протекать индукционный ток:

$$|\varepsilon_i| = \frac{d\Phi}{dt} = \frac{BdS}{dt} = \frac{Bldx}{dt} = Blv,$$

$$I = \frac{|\varepsilon_i|}{R} = \frac{Blv}{R}.$$

При этом на перемычку начинает действовать сила Ампера, тормозящая ее движение:

$$F_A = IBl = \frac{B^2 l^2 v}{R},$$

и по второму закону Ньютона

$$ma = -F_A,$$

$$m \frac{dv}{dt} = -\frac{B^2 l^2 v}{R},$$

$$\frac{dv}{v} = -\frac{B^2 l^2}{mR} dt.$$

Проинтегрируем это равенство:

$$\int_{v_0}^v \frac{dv}{v} = -\frac{B^2 l^2}{mR} \int_0^t dt,$$

$$\ln \frac{v}{v_0} = -\frac{B^2 l^2}{mR} t, \quad \alpha = \frac{B^2 l^2}{mR},$$

$$v = v_0 e^{-\alpha t}.$$

Расстояние, пройденное перемычкой до ее остановки, найдем так:

$$s = \int_0^\infty v dt = \int_0^\infty v_0 e^{-\alpha t} dt = \frac{v_0}{\alpha} = \frac{mRv_0}{B^2 l^2}.$$

4.12. В горизонтальной плоскости расположены две параллельные шины, соединенные слева проводником (рис. 4.13). К перемычке массой m и длиной l , имеющей сопротивление R и лежащей на шинах, приложили направленную вправо постоянную силу F и включили вертикальное магнитное поле B . По какому закону будет зависеть от времени скорость перемычки?

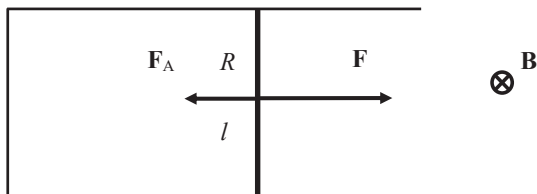


Рис. 4.13

Решение. При движении перемычки в контуре возникает ЭДС индукции и начинает протекать индукционный ток. Как показано в предыдущей задаче,

$$|\varepsilon_i| = \frac{d\Phi}{dt} = \frac{BdS}{dt} = \frac{Bldx}{dt} = Blv,$$

$$I = \frac{|\mathcal{E}_i|}{R} = \frac{Blv}{R}.$$

При этом на перемычку начинает действовать сила Ампера, тормозящая ее движение:

$$F_A = IBl = \frac{B^2 l^2 v}{R},$$

и по второму закону Ньютона

$$\begin{aligned} ma &= F - F_A, \\ m \frac{dv}{dt} &= F - \frac{B^2 l^2 v}{R}, \\ \frac{dv}{dt} &= \frac{B^2 l^2}{mR} \left(\frac{FR}{B^2 l^2} - v \right), \\ \frac{dv}{\frac{FR}{B^2 l^2} - v} &= \frac{B^2 l^2}{mR} dt. \end{aligned}$$

Проинтегрируем это равенство и получим ответ:

$$\begin{aligned} \int_0^v \frac{dv}{\frac{FR}{B^2 l^2} - v} &= \frac{B^2 l^2}{mR} \int_0^t dt, \\ -\ln \frac{\frac{FR}{B^2 l^2} - v}{\frac{FR}{B^2 l^2}} &= \frac{B^2 l^2}{mR} t, \\ \alpha = \frac{B^2 l^2}{mR}, \quad \beta = \frac{FR}{B^2 l^2}, \\ \beta - v &= \beta e^{-\alpha t}, \\ v &= \beta (1 - e^{-\alpha t}). \end{aligned}$$

4.13. В горизонтальной плоскости расположены две параллельные шины, соединенные слева прямым проводником (рис. 4.14). Перемычка, имеющая длину l , лежит на шинах так, что первоначально ее положение совпадает с положением проводника. При $t = 0$ включается вертикальное магнитное поле, линейно возрастающее со скоростью $\dot{B}$. Одновременно перемычка начинает равноускоренное движение с ускорением a . Чему равна ЭДС индукции, генерируемая в контуре в момент времени t ?

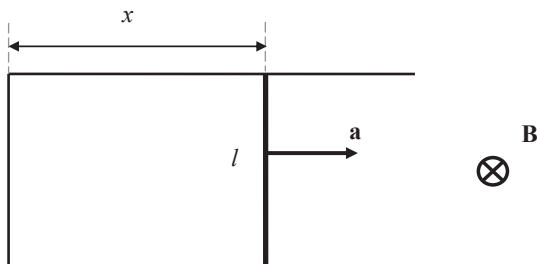


Рис. 4.14

Решение. Положение перемычки и индукция магнитного поля меняются со временем по законам

$$x = \frac{at^2}{2}, \quad B = \dot{B}t.$$

Поэтому индуцированная в контуре в момент времени t ЭДС индукции

$$|\varepsilon_i| = \frac{d}{dt}(BS) = \frac{d}{dt} \left(\dot{B}tl \frac{at^2}{2} \right) = \frac{3}{2} Blat^2.$$

4.14. В горизонтальной плоскости расположен контур, представляющий собой два квадрата, соединенных так, как это показано на рис. 4.15. При включении переменного вертикального магнитного поля $B = B_0 \sin \omega t$ в контуре возникает ЭДС

индукции и начинает протекать индукционный ток. Чему равна его амплитуда? Числовые значения: длина сторон квадратов $a = 20$ см и $b = 10$ см, $B_0 = 10$ мТл, $\omega = 100$ с⁻¹, линейное сопротивление проводов $\rho = 50$ мОм/м.

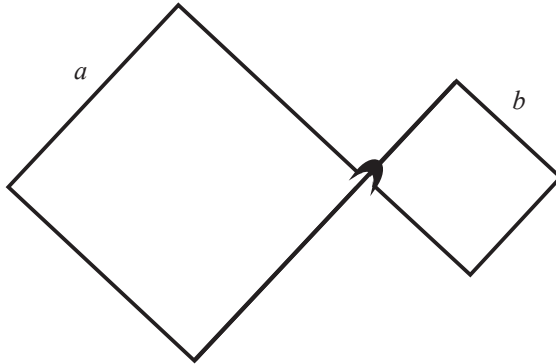


Рис. 4.15

Решение. В переменном магнитном поле в контуре возникает явление ЭМИ. С учетом правила Ленца

$$\begin{aligned}\varepsilon_i &= \varepsilon_{i1} - \varepsilon_{i2} = (a^2 - b^2) \frac{dB}{dt} = (a^2 - b^2) B_0 \omega \cos \omega t, \\ I &= \frac{\varepsilon_i}{R} = \frac{(a^2 - b^2)}{4\rho(a+b)} B_0 \omega \cos \omega t = \frac{(a-b)}{4\rho} B_0 \omega \cos \omega t, \\ I_m &= \frac{(a-b)}{4\rho} B_0 \omega = 0,5 \text{ А}.\end{aligned}$$

4.15. В горизонтальной плоскости расположена спираль, образованная N витками тонкого провода, намотанными виток к витку (рис. 4.16). При включении переменного вертикального магнитного поля $B = B_0 \sin \omega t$ в спирали возникает ЭДС индукции и начинает протекать индукционный ток. Чему равна его амплитуда? Внешний радиус спирали равен a .

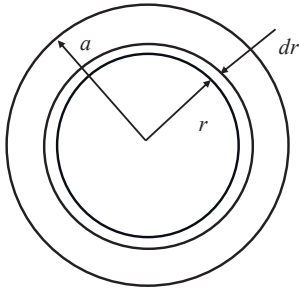


Рис. 4.16

Решение. Выделим в спирали тонкий кольцевой слой радиусом r и толщиной dr (рис. 4.15). Число витков в этом слое

$$dN = \frac{N}{a} dr.$$

В каждом из них индуцируется ЭДС.

Таким образом, ЭДС, возникающая в слое,

$$d\varepsilon_i = \frac{dB}{dt} \pi r^2 dN = \frac{dB}{dt} \pi r^2 \frac{N}{a} dr.$$

ЭДС, возникающая в спирали,

$$\varepsilon_i = \frac{dB}{dt} \frac{\pi N}{a} \int_0^a r^2 dr = \frac{dB}{dt} \frac{\pi N a^2}{3} = \frac{\pi N a^2}{3} B_0 \omega \cos \omega t.$$

Амплитуда ЭДС индукции

$$\varepsilon_m = \frac{1}{3} \pi a^2 N B_0 \omega.$$

4.16. По обмотке соленоида протекает переменный ток $B = B_0 \sin \omega t$. Внутри соленоида параллельно его оси находится небольшая катушка (рис. 4.17), которую в момент времени $t = 0$ начинают вращать с угловой скоростью ω вокруг оси, перпендикулярной оси соленоида. Чему равна ЭДС индукции, генерируемая в катушке? Число витков катушки N .

Решение. ЭДС индукции, генерируемая в катушке, определяется формулой

$$\begin{aligned} \varepsilon_i &= \frac{d(NBS)}{dt} = \frac{d}{dt} (NB_0 \sin \omega t \cdot S \cos \omega t) = NB_0 S \frac{d}{dt} (\sin \omega t \cos \omega t) = \\ &= \frac{1}{2} NB_0 S \frac{d}{dt} (\sin 2\omega t) = NB_0 S \omega \cos 2\omega t. \end{aligned}$$

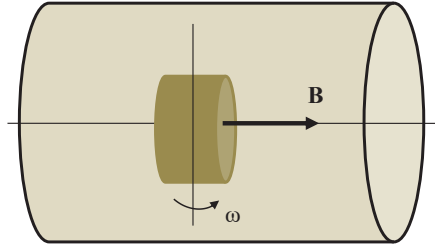


Рис. 4.17

4.17. По соленоиду круглого сечения пропускают ток, величина которого возрастает по линейному закону со скоростью $\dot{I} = 200$ А/с. На соленоид надето медное кольцо, имеющее сечение $S = 0,5$ мм² и прилегающее к его боковой поверхности (рис. 4.18). Чему равен индукционный ток в кольце? Соленоид имеет радиус сечения $R = 2,5$ см, число витков, приходящееся на единицу его длины, $n = 20$ см⁻¹. Удельное сопротивление меди $\rho = 16$ нОм · м.

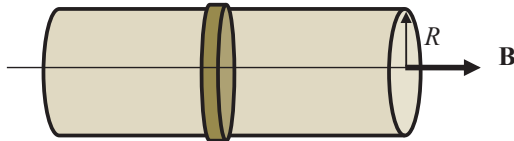


Рис. 4.18

Решение. ЭДС индукции, возникающая в кольце, определяется формулой

$$\varepsilon_i = \frac{d(B\pi r^2)}{dt} = \dot{B}\pi r^2 = \mu_0 n \dot{I} \pi r^2.$$

Индукционный ток в кольце

$$I = \frac{\varepsilon_i}{R} = \frac{\varepsilon_i}{\rho 2\pi r} = \frac{\mu_0 n \dot{I} \pi r^2 S}{\rho 2\pi r} = \frac{1}{2\rho} \mu_0 n \dot{I} r S = 2 \text{ мА}.$$

4.18. На оси соленоида, индукция поля которого возрастает по линейному закону $B = \beta t$, расположен проводящий тороид, имеющий прямоугольное сечение, размеры которого указаны на рис. 4.19. Чему равен протекающий по нему индукционный ток? Удельное сопротивление материала тороида ρ .

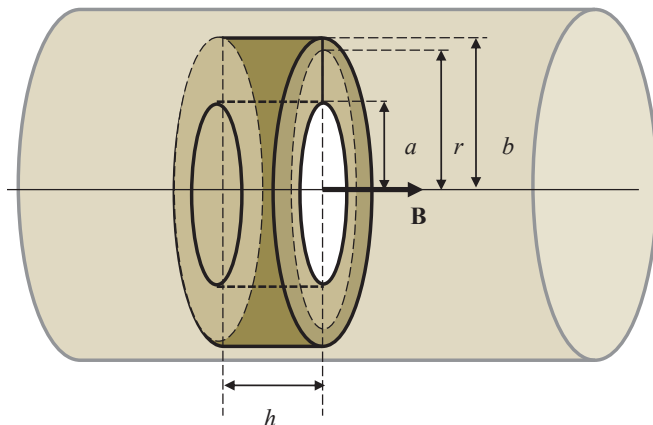


Рис. 4.19

Решение. Переменное магнитное поле порождает в объеме соленоида вихревое электрическое поле, линии которого замкнуты. Его напряженность найдем, используя уравнение Максвелла:

$$\oint_L \mathbf{E} d\mathbf{l} = -\frac{d}{dt} \int_S \mathbf{B} d\mathbf{S},$$

$$E 2\pi r = -\frac{dB}{dt} \pi r^2, \quad E = -\frac{1}{2} \beta r.$$

По дифференциальному закону Ома плотность тока связана с напряженностью электрического поля:

$$j = \frac{1}{\rho} E.$$

Индукционный ток, протекающий через сечение тороида, будет равен

$$dI = jhrdr = \frac{1}{2\rho} \beta r \cdot hrdr = \frac{1}{2\rho} \beta r dr,$$

$$I = \int_a^b \frac{1}{2\rho} \beta hrdr = \frac{1}{4\rho} \beta h (b^2 - a^2).$$

4.19. Кабель можно представить как коаксиальную систему, состоящую из двух тонкостенных цилиндров радиусами a и b (рис. 4.20). Чему равна индуктивность такого кабеля, имеющего единичную длину, если отношение $b/a = \eta$? Магнитная проницаемость материала слоя $\mu = 1$.

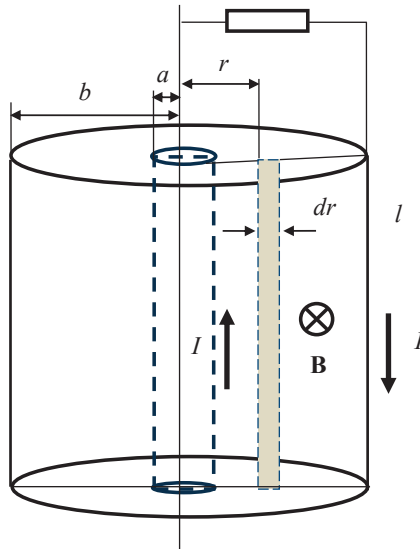


Рис. 4.20

Решение. Рассмотрим участок кабеля длиной l и пропустим по нему ток I . Как следует из теоремы о циркуляции, два встреч-

ных тока, протекающих по этим цилиндрам, создают поле, локализованное в пространстве между ними, и его магнитная индукция

$$B = \frac{\mu_0 I}{2\pi r}.$$

Магнитный поток вычислим по формуле

$$\Phi = \int_S \mathbf{B} d\mathbf{S} = \int_a^b \frac{\mu_0 I}{2\pi r} l dS = \frac{\mu_0 I l}{2\pi} \ln \eta.$$

Индуктивность участка кабеля длиной l

$$L = \frac{\Phi}{I} = \frac{\mu_0 l}{2\pi} \ln \eta.$$

Индуктивность кабеля, имеющего единичную длину,

$$L = \frac{\mu_0}{2\pi} \ln \eta.$$

4.20. Кабель, применяемый в электронных устройствах, можно представить как коаксиальную систему, состоящую из центрального сплошного провода, сечение которого имеет радиус a , и внешней плотной оплетки, выполненной из тонкого медного провода, имеющего радиус b . Между ними находится изолирующий слой (рис. 4.21). Чему равна индуктивность такого кабеля, имеющего единичную длину, если отношение $b/a = \eta$? Магнитная проницаемость материала слоя $\mu = 1$.

Решение. Рассмотрим участок кабеля длиной l и пропустим по нему ток I . В отличие от ситуации, описанной в предыдущей задаче, поле существует не только в слое между проводниками, но и внутри центрального сплошного проводника, где его индукция зависит от расстояния r от оси по следующему закону (см. задачу 1.18):

$$B_1 = \frac{\mu_0 I}{2\pi a} r.$$

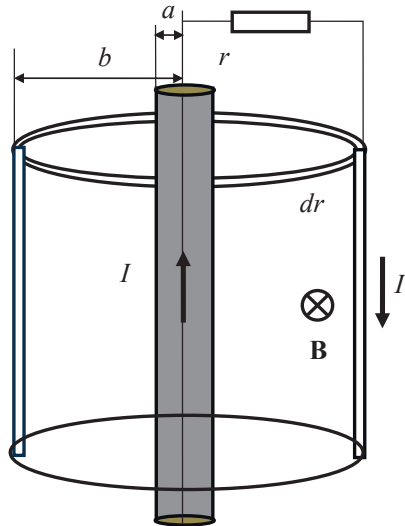


Рис. 4.21

Как следует из теоремы о циркуляции, два встречных тока создают поле, локализованное между центральным проводом и внешней оплеткой, и его магнитная индукция

$$B_2 = \frac{\mu_0 I}{2\pi r}.$$

При $r > b$ поле отсутствует.

Воспользуемся формулой, связывающей индуктивность и энергию магнитного поля:

$$W_M = \frac{LI^2}{2},$$

пусть $l = 1$, тогда

$$L_{\text{ед}} = \frac{2W_M}{I^2} = \frac{2}{I^2} \int_V \frac{B^2}{2\mu_0} dV = \frac{1}{I^2} \int_V \frac{B^2}{\mu_0} 2\pi r dr =$$

$$\begin{aligned}
 &= \frac{1}{I^2} \left(\int_0^a \frac{B_1^2}{\mu_0} 2\pi r dr + \int_0^a \frac{B_2^2}{\mu_0} 2\pi r dr \right) = \\
 &= \frac{1}{I^2} \left(\int_0^a \frac{\mu_0 I^2}{4\pi^2 a^4} 2\pi r^3 dr + \int_a^b \frac{\mu_0 I^2}{4\pi^2 r^2} 2\pi r dr \right) = \\
 &= \frac{1}{2\pi} \left(\frac{1}{4} + \ln \frac{b}{a} \right),
 \end{aligned}$$

4.21. Соленоид, имеющий форму тороида квадратного сечения, заполнен магнетиком с проницаемостью μ , число витков N . Размеры указаны на рис. 4.22. Чему равна индуктивность соленоида?

Решение. Применим теорему о циркуляции для напряженности магнитного поля H :

$$\begin{aligned}
 H 2\pi r &= NI, \quad H = \frac{NI}{2\pi r}, \\
 B &= \mu_0 \mu H = \frac{\mu_0 \mu NI}{2\pi r}.
 \end{aligned}$$

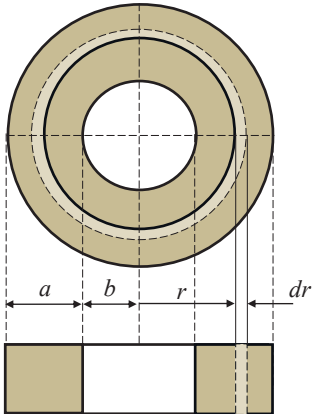


Рис. 4.22

Вычислим магнитный поток через один виток провода:

$$\begin{aligned}
 \Phi_1 &= \int_S B dS = \int_b^{b+a} \frac{\mu_0 \mu NI}{2\pi r} a dr = \\
 &= \frac{\mu_0 \mu NI}{2\pi} a \ln \frac{b+a}{b},
 \end{aligned}$$

тогда полный поток

$$\Phi = \Phi_1 N = \frac{\mu_0 \mu N^2 I}{2\pi} a \ln \frac{b+a}{b}.$$

Индуктивность тороидального соленоида

$$L = \frac{\Phi}{I} = \frac{\mu_0 \mu N^2}{2\pi} a \ln \frac{b+a}{b}.$$

4.22. Рассмотрим в качестве двухпроводной линии две параллельные длинные ленты, отстоящие друг от друга на расстоянии d , их ширина равна $b \gg d$ (рис. 4.23). Чему равна индуктивность такой линии единичной длины?

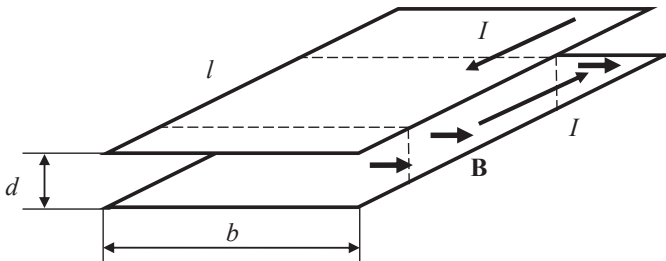


Рис. 4.23

Решение. Пусть по лентам протекает ток I . Как показано в задаче 1.15, магнитное поле, созданное этими токами, локализовано в пространстве между лентами, и его индукция

$$B = \mu_0 j = \frac{\mu_0 I}{b}.$$

Рассмотрим участок линии длиной l и найдем магнитный поток, соответствующий этому участку:

$$\Phi = BS = \frac{\mu_0 I}{b} ld.$$

Его индуктивность

$$L = \frac{\Phi}{I} = \frac{\mu_0}{b} ld,$$

и для единичной длины

$$L_1 = \frac{\mu_0 d}{b}.$$

4.23. Катушка, имеющая индуктивность L и сопротивление R , подключена к источнику постоянного напряжения U . В момент времени $t = 0$ индуктивность катушки резко уменьшили в η раз. По какому закону будет зависеть от времени ток в цепи?

Решение. В стационарных условиях по катушке протекает постоянный ток $I_{\text{стац}}$, создающий в ней магнитный поток $\Phi_{\text{стац}}$:

$$I_{\text{стац}} = \frac{U}{R},$$

$$\Phi_{\text{стац}} = LI_{\text{стац}} = \frac{LU}{R}.$$

В момент времени $t = 0$ индуктивность катушки резко уменьшили в η раз. Воспользуемся известным фактом: при скачкообразном изменении индуктивности катушки магнитный поток остается неизменным в течение этого скачка — его поддерживает индукционный ток, сопутствующий этому процессу. Поэтому при $t = 0$

$$\Phi_{\text{стац}} = \Phi_0,$$

$$LI_{\text{стац}} = \frac{L}{\eta} I_0,$$

$$I_0 = \eta I_{\text{стац}} = \eta \frac{U}{R}.$$

Затем вследствие самоиндукции

$$I'(t) = I'_0 e^{-Rt/L}, \quad I'_0 = I_0 - I_{\text{стац}} = \frac{U}{R}(\eta - 1),$$

и результирующий ток в цепи будет зависеть от времени по закону

$$I(t) = I_{\text{стан}} + I'(t) = \frac{U}{R} (1 + (\eta - 1) e^{-Rt/L}).$$

График этой зависимости изображен на рис. 4.24.

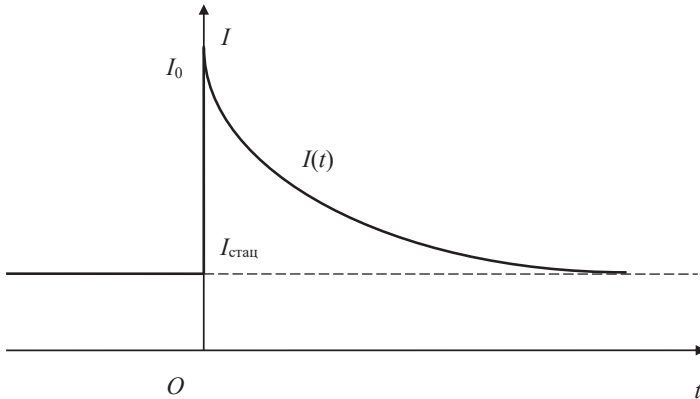


Рис. 4.24

4.24. Тонкое кольцо поместили в однородное магнитное поле с индукцией B так, что силовые линии поля параллельны плоскости кольца. Затем кольцо охладили до температуры, при которой его материал перешел в сверхпроводящее состояние, и повернули его так, что плоскость контура стала перпендикулярна линиям магнитной индукции (рис. 4.25). Чему равна сила тока, возникшая при этом в контуре? Радиус кольца равен a .

Решение. В первоначальном положении кольца магнитный поток, пронизывающий его, равен нулю. При повороте в нем возникает индукционный ток

$$I = -\frac{1}{R} \frac{d\Phi}{dt}.$$

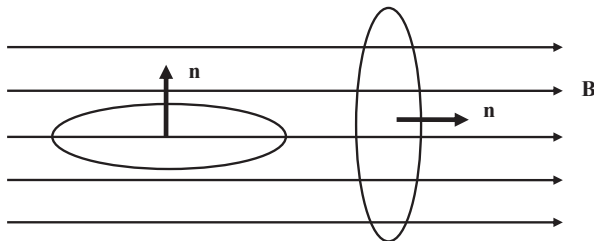


Рис. 4.25

Но предварительно кольцо перевели в сверхпроводящее состояние, при котором $R = 0$. Это означает, что необходимо выполнение условия

$$\begin{aligned} \frac{d\Phi}{dt} &= 0 \text{ и } \Phi = \text{const}, \quad \Phi_1 = \Phi_2, \\ \Phi_1 &= 0, \quad \Phi_2 = BS - \Phi_i = B\pi a^2 - I_i L = 0, \\ I_i &= \frac{B\pi a^2}{L}. \end{aligned}$$

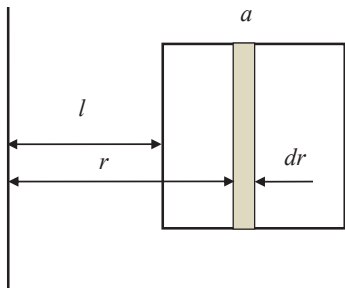


Рис. 4.26

4.25. Квадратный контур со стороной a и прямой проводник лежат в одной плоскости, как показано на рис. 4.26. Чему равна их взаимная индуктивность?

Решение. Предположим, что по прямому проводнику протекает ток I_1 . Найдем магнитный поток, пронизывающий контур:

$$\begin{aligned} d\Phi_2 &= BdS = \frac{\mu_0 I_1}{2\pi r} adr, \\ \Phi_2 &= \int_S BdS = \int_l^{l+a} \frac{\mu_0 I_1}{2\pi r} adr = \frac{\mu_0 I_1}{2\pi} a \ln \frac{l+a}{l}. \end{aligned}$$

Взаимную индуктивность этой системы найдем из равенства

$$L_{21} = \frac{\Phi_2}{I_1} = \frac{\mu_0}{2\pi} a \ln \frac{l+a}{l}.$$

Отметим, что $L_{21} = L_{12}$.

4.26. На оси катушки, имеющей форму тороида квадратного сечения, расположен длинный прямой проводник. Число витков катушки N , ее размеры указаны на рис. 4.27. Чему равна взаимная индуктивность этой системы?

Решение. Предположим, что по прямому проводнику протекает ток I_1 . Найдем магнитный поток, пронизывающий сечение катушки:

$$\begin{aligned} d\Phi_2 &= B dS = \frac{\mu_0 I_1}{2\pi r} a dr, \\ \Phi_2 &= N \int_S B dS = N \int_b^{b+a} \frac{\mu_0 I_1}{2\pi r} a dr = \\ &= \frac{\mu_0 N I_1}{2\pi} a \ln \frac{b+a}{b}. \end{aligned}$$

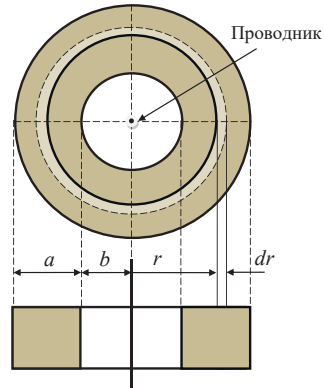


Рис. 4.27

Взаимную индуктивность этой системы найдем из равенства

$$L_{21} = \frac{\Phi_2}{I_1} = \frac{\mu_0 N}{2\pi} a \ln \frac{b+a}{b}.$$

Отметим, что $L_{21} = L_{12}$.

4.27. Ток I протекает по прямоугольной рамке, лежащей в горизонтальной плоскости (рис. 4.28). Чему равен магнитный поток $\Phi_{\text{пл}}$ через полуплоскость, граница которой параллельна стороне рамки и находится на расстоянии l от нее?

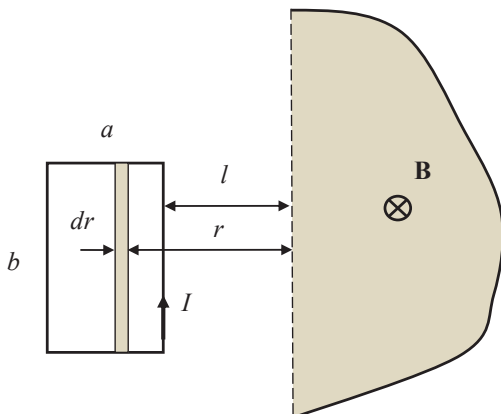


Рис. 4.28

Решение. Поле, создаваемое прямоугольной рамкой, имеет весьма сложную конфигурацию, что существенно затрудняет вычисление магнитного потока через выбранную полуплоскость. В общем виде

$$\Phi_{\text{пл}} = L_{21} I.$$

Воспользуемся теоремой взаимности и предположим, что ток I протекает по контуру, образованному длинным прямым проводником, лежащим вдоль границы полуплоскости, параллельной стороне рамки, и проводником, огибающим эту полуплоскость на бесконечности. Поле, в котором находится рамка, создается прямым проводом, и поток этого поля через площадь, ограниченную рамкой,

$$\Phi_{\text{рам}} = \int_S B dS = \int_l^{l+a} \frac{\mu_0 I}{2\pi r} b dr = \frac{\mu_0 I}{2\pi} b \ln \frac{l+a}{l},$$

с другой стороны,

$$\Phi_{\text{рам}} = L_{12} I.$$

Согласно теореме взаимности $L_{21} = L_{12}$, и тогда

$$\Phi_{\text{пл}} = L_{21}I = L_{12}I = \Phi_{\text{рам}} = \frac{\mu_0 I}{2\pi} b \ln \frac{l+a}{l}.$$

4.28. Баллистический гальванометр подключен к тонкой катушке радиусом a , имеющей N витков (рис. 4.29). Когда в центр катушки внесли цилиндрический магнит малого размера, через гальванометр прошел заряд q . Чему равен магнитный момент магнита? Сопротивление цепи равно R .

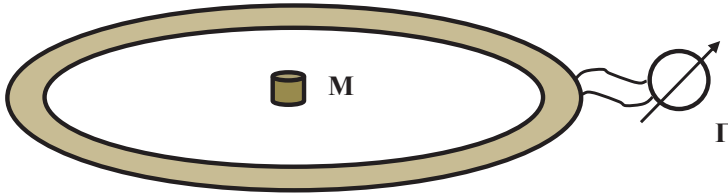


Рис. 4.29

Решение. При внесении магнита изменяется магнитный поток, пронизывающий катушку, по ней начинает протекать индукционный ток

$$I = \left| -\frac{1}{R} \frac{d\Phi}{dt} \right|,$$

$$dq = \frac{1}{R} d\Phi, \quad q = \frac{\Delta\Phi}{R} = \frac{\Phi}{R}.$$

Найти поток, создаваемый магнитом, мы не можем, поэтому воспользуемся теоремой взаимности. Заменим магнит небольшим витком площадью S , по которому протекает ток I . Величину тока подберем таким образом, чтобы магнитный момент витка совпадал с магнитным моментом $\mathbf{p}_m$ магнита:

$$p_m = IS.$$

Как следует из теоремы взаимности,

$$L_{12}I = L_{21}I.$$

Поток через виток равен потоку через катушку при том же значении тока:

$$\Phi = BS = \frac{\mu_0 NI}{2a} S = \frac{\mu_0 N}{2a} p_m,$$

$$q = \frac{\Phi}{R} = \frac{\mu_0 N}{2aR} p_m, \quad p_m = \frac{2qaR}{\mu_0 N}.$$

4.29. Центры двух тонких параллельных колец небольшого размера находятся на одной прямой на расстоянии l друг от друга (рис. 4.30). Чему равна взаимная индукция этой системы? Считать, что радиус колец $a \ll l$.

Решение. Предположим, что по кольцу 1 протекает ток I_1 . Этот ток создает в пространстве поле, индукция которого на оси кольца описывается следующей формулой (см. задачу 1.1):

$$B_1 = \frac{\mu_0 I_1 a^2}{2(a^2 + l^2)^{3/2}}.$$

Поток этого поля через плоскость второго кольца

$$\Phi_2 \approx B_1 \pi a^2 = \frac{\mu_0 \pi I_1 a^4}{2(a^2 + l^2)^{3/2}}.$$

С другой стороны,

$$\Phi_2 = L_{21} I_1,$$

поэтому

$$L_{21} = \frac{\Phi_2}{I_1} = \frac{\mu_0 \pi a^4}{2(a^2 + l^2)^{3/2}} \approx \frac{\mu_0 \pi a}{2l^3}.$$

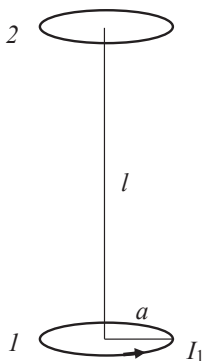


Рис. 4.30

4.30. В одном из двух индуктивно связанных контуров (взаимная индуктивность контуров L_{21}) пропустили линейно возрастающий ток $I_1 = \alpha t$, α — постоянная. Чему равен ток $I_2(t)$, протекающий во втором контуре? Его индуктивность равна L_2 , сопротивление R .

Решение. Ток, протекающий в первом контуре, создает магнитный поток, пронизывающий второй контур:

$$\Phi_2 = L_{21}I_1 = L_{21}\alpha t.$$

В нем наряду с ЭДС взаимной индукции возникает и ЭДС самоиндукции:

$$I_2 R = \varepsilon_i + \varepsilon_s = -\frac{d\Phi_2}{dt} - L_2 \frac{dI_2}{dt} = -\left(L_{21}\alpha + L_2 \frac{dI_2}{dt} \right),$$

$$L_2 \frac{dI_2}{dt} = -R \left(I_2 - \frac{L_{21}\alpha t}{R} \right), \quad \frac{dI_2}{I_2 - \frac{L_{21}\alpha t}{R}} = -\frac{R}{L_2} dt,$$

$$\int \frac{dI_2}{I_2 - \frac{L_{21}\alpha t}{R}} = -\int \frac{R}{L_2} dt,$$

$$\ln \left| I_2 - \frac{L_{21}\alpha t}{R} \right| = -\frac{R}{L_2} t + \ln C.$$

$$I_2 - \frac{L_{21}\alpha t}{R} = C e^{-\frac{R}{L_2} t}.$$

При $t = 0$ $I_2 = 0$, следовательно,

$$C = -\frac{L_{21}\alpha}{R},$$

и тогда

$$I_2(t) = \frac{L_{21}\alpha}{R} \left(1 - e^{-\frac{R}{L_2} t} \right).$$

Список библиографических ссылок

1. Малышев Л. Г. Избранные главы курса физики. Магнито-статика : учеб. пособие. Екатеринбург : УрФУ, 2019. 112 с.
2. Иродов И. Е. Электромагнетизм. Основные законы : учеб. пособие. М. : Бином. Лаборатория знаний, 2009. 319 с.
3. Малышев Л. Г. Избранные главы курса физики. Электро-статика : учеб. пособие. Екатеринбург : УрФУ, 2015. 138 с.

