

Об операторах смежности локально конечных графов

В. И. Трофимов

Граф Γ называется локально конечным, если у графа Γ для каждой вершины v множество $\Gamma(v)$ смежных с ней вершин конечно. Для произвольно-локально конечного графа Γ с множеством вершин $V(\Gamma)$ и произвольного поля F на $F^{V(\Gamma)}$ (векторном пространстве над F всех функций $V(\Gamma) \rightarrow F$ с естественными покомпонентными операциями) определен линейный оператор $A_{\Gamma,F}^{(\text{alg})} : F^{V(\Gamma)} \rightarrow F^{V(\Gamma)}$, посредством $(A_{\Gamma,F}^{(\text{alg})}(f))(v) = \sum_{u \in \Gamma(v)} f(u)$ для всех $f \in F^{V(\Gamma)}$, $v \in V(\Gamma)$. В случае конечного графа Γ отображение $A_{\Gamma,F}^{(\text{alg})}$ есть хорошо известный оператор, определяемый матрицей смежности графа Γ (над F), и теория собственных значений и собственных функций таких операторов составляет (по крайней мере, в случае $F = \mathbb{C}$) хорошо разработанный раздел теории конечных графов. В настоящей работе разрабатывается теория собственных значений и собственных функций операторов $A_{\Gamma,F}^{(\text{alg})}$ для бесконечных локально конечных графов Γ (впрочем, отдельные ее результаты могут представлять интерес для конечных графов) и произвольных полей F , хотя особый акцент делается на случай, когда Γ — связный граф с ограниченными в совокупности степенями вершин и $F = \mathbb{C}$. Предпринимавшиеся ранее попытки в этом направлении не были, по мнению автора, вполне удовлетворительными в том смысле, что ограничивались рассмотрением лишь собственных функций весьма специального вида (и соответствующих им собственных значений).

Библиография: 18 наименований.

Ключевые слова: локально конечный граф, матрица смежности, собственное значение, собственная функция.

§ 1. Введение

Под графом всюду далее понимается неориентированный граф без петель и без кратных ребер. Если Γ — граф, то $V(\Gamma)$ и $E(\Gamma)$ — соответственно его множество вершин и множество ребер. Для $x \in V(\Gamma)$ через $\Gamma(x)$ обозначается множество всех смежных с x вершин графа Γ (таким образом, $|\Gamma(x)|$ — степень вершины x). Граф Γ называется локально конечным, если степени всех его вершин конечны.

Пусть Γ — локально конечный граф, F — поле и $F^{V(\Gamma)}$ — векторное пространство над F , образованное всеми функциями $V(\Gamma) \rightarrow F$ (с естественными покомпонентными операциями сложения и умножения на скаляр). Определим линейное отображение $A_{\Gamma,F}^{(\text{alg})} : F^{V(\Gamma)} \rightarrow F^{V(\Gamma)}$, полагая для произвольных $f \in F^{V(\Gamma)}$ и $v \in V(\Gamma)$

$$(A_{\Gamma,F}^{(\text{alg})}(f))(v) := \sum_{u \in \Gamma(v)} f(u).$$

Настоящая работа ориентирована, прежде всего, на исследование собственных значений и собственных векторов (собственных функций из $F^{V(\Gamma)}$) линейного отображения $A_{\Gamma, F}^{(\text{alg})}$.

Хотя собственные значения и собственные векторы так определенного линейного отображения $A_{\Gamma, F}^{(\text{alg})}$ не зависят от наличия топологий на F и $F^{V(\Gamma)}$, нам будет удобно без потери общности предполагать в работе, что поле F снабжено некоторым (возможно, тривиальным) абсолютным значением $|\cdot|_v$, естественным образом превращающим F в метрическое пространство (см., например, [1; с. 322]), а $F^{V(\Gamma)}$ снабжено соответствующей топологией произведения, превращающей $F^{V(\Gamma)}$ в топологическое векторное пространство. При этом линейное отображение $A_{\Gamma, F}^{(\text{alg})}$ превращается в непрерывный линейный оператор в топологическом векторном пространстве $F^{V(\Gamma)}$, который мы будем обозначать через $A_{\Gamma, F}$ и называть *оператором смежности* графа Γ над полем F с абсолютным значением $|\cdot|_v$.

В случае конечного графа Γ отображение $A_{\Gamma, F}^{(\text{alg})}$ есть хорошо известный оператор, определяемый матрицей смежности графа Γ (над F), и теория спектров таких операторов хорошо разработана (по крайней мере, в случае $F = \mathbb{C}$), см., например, [2], [3]. Предпринимались представляющие интерес попытки построения спектральной теории произвольных локально конечных графов на основе их матриц смежности (при этом условие не более чем счетности и даже условие связности не являются сильными ограничениями на графы, поскольку, по существу, достаточно рассматривать связные компоненты графов). Пожалуй, наиболее известная из них - теория из [4], [5]. В связи с этим отметим следующее. Наше определение оператора смежности $A_{\Gamma, F}$, даже в случае не более чем счетного графа Γ и $F = \mathbb{C}$ с естественным абсолютным значением, кардинально отличается от определения оператора смежности не более чем счетного локально конечного графа из [4], [5], где оператором смежности такого графа называется ограничение введенного выше оператора $A_{\Gamma, \mathbb{C}}^{(\text{alg})}$ на гильбертово пространство $l_2(V(\Gamma))$ квадратично суммируемых функций в случае, когда степени вершин Γ ограничены в совокупности, а в общем случае называется оператор в $l_2(V(\Gamma))$, являющийся замыканием ограничения $A_{\Gamma, \mathbb{C}}^{(\text{alg})}$ на пространство функций с конечными носителями. Не удивительно поэтому, что у нас получается кардинально другая теория для собственных значений и собственных функций. (Так, для произвольного бесконечного локально конечного связного графа Γ у $A_{\Gamma, \mathbb{C}}^{(\text{alg})}$ или, что то же, у $A_{\Gamma, \mathbb{C}}$ с произвольным абсолютным значением на $\mathbb{C}$ имеются собственные функции, соответствующие всем, за не более чем счетным исключением, комплексным числам, см. теорему 6.1, но в случае, когда степени вершин Γ не превосходят некоторого $d \in \mathbb{Z}_{\geq 1}$, в $l_2(V(\Gamma))$ могут попасть лишь те из этих функций, которые соответствуют числам из $\mathbb{R}_{\geq -d} \cap \mathbb{R}_{\leq d}$, см. замечание 6.8. Еще нагляднее: для “бесконечной цепочки” Γ с $V(\Gamma) = \{v_i : i \in \mathbb{Z}\}$, $E(\Gamma) = \{\{v_i, v_{i+1}\} : i \in \mathbb{Z}\}$ для каждого $\lambda \in \mathbb{C}$ у оператора $A_{\Gamma, \mathbb{C}}$ имеются соответствующие собственному значению λ собственные функции $f_{c_1, c_2} \in \mathbb{C}^{V(\Gamma)}$, определяемые при $\lambda \notin \{-2, +2\}$ посредством $f_{c_1, c_2}(v_i) := c_1 a^i + c_2 b^i$ для всех $i \in \mathbb{Z}$, где a, b — комплексные корни уравнения $x^2 - \lambda x + 1 = 0$, c_1, c_2 — произвольные не равные одновременно нулю комплексные числа, а при $\lambda = \varepsilon 2$, $\varepsilon \in \{-1, +1\}$, посредством $f_{c_1, c_2}(v_i) := \varepsilon^i (c_1 + c_2 i)$ для всех $i \in \mathbb{Z}$, c_1, c_2 — произ-

вольные не равные одновременно нулю комплексные числа; но ни для какого $\lambda \in \mathbb{C}$ у $A_{\Gamma, \mathbb{C}}$ нет собственных функций в пространстве квадратично суммируемых функций $l^2(V(\Gamma))$. По мнению автора, даже в случае, когда степени вершин связного графа Γ ограничены в совокупности и $F = \mathbb{C}$, пространство квадратично суммируемых функций $l_2(V(\Gamma))$ зачастую излишне мало, чтобы вместить представляющие интерес собственные функции оператора $A_{\Gamma, \mathbb{C}}^{(\text{alg})}$ (см., однако, сказанное далее во введении в связи с § 6). Качественно установку, реализуемую в настоящей работе, можно охарактеризовать как нахождение собственных значений и собственных функций операторов смежности $A_{\Gamma, F}^{(\text{alg})}$ в максимально больших пространствах $F^{V(\Gamma)}$ (с возможным дальнейшим их анализом на предмет попадания в то или иное представляющее интерес подмножество пространства $F^{V(\Gamma)}$). В последующей работе автор планирует предложить, по крайней мере в случае, когда Γ — связный граф с ограниченными в совокупности степенями вершин и $F = \mathbb{C}$, $A_{\Gamma, F}$ -инвариантное подпространство пространства $F^{V(\Gamma)}$, которое значительно меньше $F^{V(\Gamma)}$, но лишено указанного недостатка подпространства $l_2(V(\Gamma))$.

Рассматриваемые в работе вопросы соприкасаются с рядом разработанных направлений математики (помимо теории спектров графов, см. выше, это анализ на графах и, в частности, исследования операторов Лапласа локально конечных графов, теория топологических векторных пространств и функциональный анализ, теория бесконечных систем линейных уравнений и бесконечных матриц, теория линейных клеточных автоматов, но также теория разностных уравнений и теория скалярных полей на графах). Однако приходится констатировать: ввиду специфики рассматриваемых в работе $F^{V(\Gamma)}$ и $A_{\Gamma, F}$ (для бесконечных Γ) мало что из указанных областей удастся непосредственно и в достаточной общности использовать при рассмотрении поднятых в работе вопросов. Важное исключение — теорема Теплица (см. [6], а также [7], [8; с. 107]), утверждающая (в одной из эквивалентных формулировок), что система линейных уравнений над полем разрешима, если разрешима каждая ее конечная подсистема. Кроме того, рассуждения из доказательства теоремы 5.2 близки к рассуждениям из доказательства теоремы 3 работы [9] и отдельные хорошо известные результаты используются в § 6. В целом работа относится к алгебраической теории графов. Отчасти она стимулировалась [10] и [11; вопрос 15.89].

Приведем краткое описание содержания статьи. Конечно, следует иметь в виду, что получаемые результаты о связных локально конечных графах применимы к связным компонентам произвольных локально конечных графов.

Итак, пусть Γ — локально конечный граф и F — поле с некоторым (возможно, тривиальным) абсолютным значением $|\cdot|_v$.

В § 2 содержатся важные для дальнейшего вспомогательные результаты. В нем приводится удобная для использования переформулировка теоремы Теплица, выводятся следствия из нее и доказывается, что для любого $\lambda \in F$ оператор $A_{\Gamma, F} - \lambda E$ (где E — единичный оператор на $F^{V(\Gamma)}$) отображает замкнутые подпространства топологического векторного пространства $F^{V(\Gamma)}$ в замкнутые же подпространства (см. следствие 2.1).

В § 3 устанавливается ряд общих свойств собственных функций оператора $A_{\Gamma, F}$. В частности, показывается, что (см. предложения 3.3, 3.4 и замечание 3.3) для заданных $\lambda \in F$ и $v \in V(\Gamma)$ каждый содержащий v носитель собственной функции оператора $A_{\Gamma, F}$, соответствующей собственному значению λ , содержит минимальный (по включению) содержащий v носитель собственной функции оператора $A_{\Gamma, F}$, соответствующей собственному значению λ , причем эту последнюю функцию можно выбрать принимающей значения только из $F_0(\lambda)$, где F_0 — простое подполе поля F , а этот минимальный носитель связан в графе Γ^2 (где Γ^2 — граф с $V(\Gamma^2) = V(\Gamma)$ и с ребрами, соединяющими всевозможные различные вершины, удаленные одна от другой на расстояние ≤ 2 в Γ).

В § 4 для $\lambda \in F$ и $v \in V(\Gamma)$ определяется (F, λ) -пропагатор графа Γ относительно v как такая функция $f \in F^{V(\Gamma)}$, что $(A_{\Gamma, F} - \lambda E)(f) = \delta_v$, где $\delta_v(u) = 0$ для всех $u \in V(\Gamma) \setminus \{v\}$ и $\delta_v(v) = 1$. ((F, λ) -пропагатор Γ относительно v есть, по существу, функция Грина или фундаментальное решение относительно v для оператора $A_{\Gamma, F} - \lambda E$.) (F, λ) -пропагаторы играют ключевую роль далее в этой работе. В § 4 устанавливаются общие свойства (F, λ) -пропагаторов. Доказывается, в частности, что (см. теоремы 4.1 и 4.2) отсутствие (F, λ) -пропагатора графа Γ относительно вершины v равносильно принадлежности v конечному носителю собственной функции оператора $A_{\Gamma, F}$, соответствующей собственному значению λ , а наличие (F, λ) -пропагатора графа Γ относительно вершины v с конечным носителем равносильно отсутствию собственной функции оператора $A_{\Gamma, F}$, соответствующей собственному значению λ , носитель которой содержал бы v . Следствием первого из этих результатов является то, что (см. следствие 4.2) отсутствие (F, λ) -пропагатора графа Γ относительно вершины v возможно лишь при весьма специальных λ (которые, в частности, должны быть собственными значениями матрицы смежности над F индуцированного конечного подграфа графа Γ , что влечет их алгебраичность над простым подполем поля F и вещественность в случае $F = \mathbb{C}$).

В § 5 для ряда представляющих интерес свойств, включая ряд спектральных свойств, оператора $A_{\Gamma, F}$ устанавливается (для дальнейшего использования) их эквивалентность определенным свойствам пропагаторов графа Γ . Доказывается, в частности, что (см. теорему 5.3) элемент $\lambda \in F$ тогда и только тогда не является собственным значением оператора $A_{\Gamma, F}$ (другими словами, $A_{\Gamma, F} - \lambda E$ инъективен), когда относительно каждой вершины v у графа Γ имеется (F, λ) -пропагатор с конечным носителем. Заметим, что сюръективность $A_{\Gamma, F} - \lambda E$ эквивалентна наличию (F, λ) -пропагатора графа Γ относительно каждой вершины v (см. теорему 5.1). Доказывается также, что (см. теорему 5.2) наличие (F, λ) -пропагатора с бесконечным носителем графа Γ относительно некоторой вершины влечет наличие у $A_{\Gamma, F}$ собственной функции с бесконечным носителем, соответствующей собственному значению λ .

Особое значение пропагаторов для проблематики настоящей работы обусловлено тем, что, наряду с возможностью выразить и исследовать в их терминах представляющие интерес свойства оператора смежности графа (см. § 4 и § 5), они (в отличие от собственных функций операторов смежности) зачастую допускают конструктивную реализацию с использованием определенных сумм

по путям графа и (в случае связного графа с ограниченными в совокупности степенями вершин и $F = \mathbb{C}$) с использованием ограничения $A_{\Gamma, \mathbb{C}}^{(\text{alg})}$ на пространство квадратично суммируемых функций. Этим конструктивным реализациям пропагаторов посвящен § 6. Следствием использования определенных сумм по путям графа для построения пропагаторов в сочетании с предшествующими результатами работы является то, что (см. теорему 6.1) в случае бесконечного локально конечного связного графа Γ и поля F характеристики 0 каждый трансцендентный над простым подполем поля F элемент $\lambda \in F$ является собственным значением оператора $A_{\Gamma, F}$. Кроме того, в случае, когда степени вершин бесконечного связного графа Γ не превосходят некоторого числа $d \in \mathbb{Z}_{\geq 1}$ и $F = \mathbb{C}$, с использованием ограничения $A_{\Gamma, \mathbb{C}}^{(\text{alg})}$ на пространство квадратично суммируемых функций становится возможным (см. утверждение 2) теоремы 6.2) для произвольной вершины v графа Γ и произвольного $\lambda \in \mathbb{C} \setminus (\mathbb{R}_{\geq -d} \cap \mathbb{R}_{\leq d})$ указать вид квадратично суммируемого $(\mathbb{C}, \lambda)$ -пропагатора графа Γ относительно вершины v , причем однозначно определенного указанным свойством. Как следствие этой единственности, ни для какого $\lambda \in \mathbb{C} \setminus (\mathbb{R}_{\geq -d} \cap \mathbb{R}_{\leq d})$ ни одна из собственных функций оператора $A_{\Gamma, \mathbb{C}}$, соответствующих λ , не является квадратично суммируемой функцией (хотя согласно теореме 6.1 собственные функции $A_{\Gamma, \mathbb{C}}$, соответствующие λ , существуют по крайней мере для всех трансцендентных над $\mathbb{Q}$ комплексных чисел λ). В связи с этим можно сказать, что (в случае бесконечного связного графа Γ со степенями вершин $\leq d$) для всех $\lambda \in \mathbb{C} \setminus (\mathbb{R}_{\geq -d} \cap \mathbb{R}_{\leq d})$ пространство квадратично суммируемых функций замечательным образом подходит для реализаций $(\mathbb{C}, \lambda)$ -пропагаторов, но слишком мало для реализаций соответствующих таким λ собственных функций оператора $A_{\Gamma, \mathbb{C}}$ (которые, однако, могут быть исследованы с привлечением указанных пропагаторов, используя результаты предшествующих параграфов).

В § 7 как следствие предыдущих результатов работы показывается, что для локально конечного графа Γ при выборе $\lambda \in F$ в определенном смысле “типична” ситуация наличия (F, λ) -пропагаторов относительно всех вершин графа (и, таким образом, сюръективности $A_{\Gamma, F} - \lambda E$). С другой стороны, в случае бесконечного локально конечного связного графа Γ и поля F характеристики 0 показывается в определенном смысле “исключительность” для $\lambda \in F$ ситуации, когда λ не есть собственное значение $A_{\Gamma, F}$ или, другими словами, см. выше, у Γ относительно каждой вершины имеется (F, λ) -пропагатор с конечным носителем. Более того, показывается, что (см. предложения 7.3 и 7.2) в случае бесконечного локально конечного связного графа Γ и поля F характеристики 0 в определенном смысле “исключительной” для $\lambda \in F$ является ситуация наличия у Γ относительно хотя бы одной вершины (F, λ) -пропагатора с конечным носителем.

В § 8 приводятся примеры бесконечных локально конечных связных графов Γ и полей F с представляющими интерес в контексте настоящей работы свойствами операторов $A_{\Gamma, F}$.

Используемые в работе обозначения, касающиеся графов, в основном стандартны. Для графа Γ через $d_{\Gamma}(\cdot, \cdot)$ обозначается обычное расстояние между вершинами (равное ∞ для вершин из разных компонент связности графа); для $u \in V(\Gamma)$ и $r \in \mathbb{R}_{\geq 0}$ через $B_{\Gamma}(u, r)$ обозначается множество вершин графа Γ ,

удаленных от u на расстояние $\leq r$. Если Γ — граф и $\emptyset \neq X \subseteq V(\Gamma)$, то $\langle X \rangle_\Gamma$ — подграф графа Γ , порожденный X . $\text{Aut}(\Gamma)$ — группа автоморфизмов графа Γ (рассматриваемая как группа подстановок на $V(\Gamma)$).

Для поля F и непустых множеств X, Y через $M_{X \times Y}(F)$ обозначается векторное пространство над F всех матриц с элементами из F со строками, проиндексированными элементами множества X , и столбцами, проиндексированными элементами множества Y . При этом через $M_{X \times Y}^{rf}(F)$ обозначается подмножество (векторное подпространство) $M_{X \times Y}(F)$, состоящее из всех матриц из $M_{X \times Y}(F)$, у которых в каждой строке имеется лишь конечное число ненулевых элементов; через $M_{X \times Y}^{cf}(F)$ обозначается подмножество (векторное подпространство) $M_{X \times Y}(F)$, состоящее из всех матриц из $M_{X \times Y}(F)$, у которых в каждом столбце имеется лишь конечное число ненулевых элементов; $M_{X \times Y}^{rcf}(F) := M_{X \times Y}^{rf}(F) \cap M_{X \times Y}^{cf}(F)$. Если F — поле и X, Y, Z — непустые множества, то для каждой матрицы из $M_{Y \times Z}(F)$ определено (естественным образом) умножение на любую матрицу из $M_{X \times Y}^{rf}(F)$ слева, а для каждой матрицы из $M_{X \times Y}(F)$ определено (естественным образом) умножение на любую матрицу из $M_{Y \times Z}^{cf}(F)$ справа. Ясно также, что для поля F и непустого множества X векторные подпространства $M_{X \times X}^{rf}(F)$, $M_{X \times X}^{cf}(F)$ и $M_{X \times X}^{rcf}(F)$ векторного пространства $M_{X \times X}(F)$ являются (относительно естественным образом определенных операций) ассоциативными F -алгебрами. Для поля F , непустых множеств X, Y и произвольной матрицы $\mathbf{M} \in M_{X \times Y}(F)$ через $\mathbf{M}^t$ обозначается транспонированная к $\mathbf{M}$ матрица из $M_{Y \times X}(F)$ (определяемая естественным образом).

Для графа Γ и поля F через $\mathbf{A}_{\Gamma, F}$ обозначается матрица из $M_{V(\Gamma) \times V(\Gamma)}(F)$, у которой для произвольных $u, v \in V(\Gamma)$ элемент на пересечении строки, соответствующей u , и столбца, соответствующего v , равен 1 при $\{u, v\} \in E(\Gamma)$ и равен 0 при $\{u, v\} \notin E(\Gamma)$. Ясно, что $\mathbf{A}_{\Gamma, F}^t = \mathbf{A}_{\Gamma, F}$. Ясно также, что Γ локально конечен тогда и только тогда, когда $\mathbf{A}_{\Gamma, F} \in M_{V(\Gamma) \times V(\Gamma)}^{rcf}(F)$.

Если Γ — локально конечный граф и F — поле, то векторное пространство (над F) функций $F^{V(\Gamma)}$ можно естественным образом отождествить с векторным пространством (над F) матриц-столбцов $M_{V(\Gamma) \times \{1\}}(F)$, сопоставляя каждой функции $f \in F^{V(\Gamma)}$ столбец $\mathbf{f} \in M_{V(\Gamma) \times \{1\}}(F)$, у которого элемент строки, соответствующей вершине u , равен $f(u)$ для всех $u \in V(\Gamma)$. Ясно, что при этом для произвольных $\lambda \in F$ и $f \in F^{V(\Gamma)}$ функции $(\mathbf{A}_{\Gamma, F}^{(\text{alg})} - \lambda \mathbf{E})(f) \in F^{V(\Gamma)}$ сопоставляется столбец $(\mathbf{A}_{\Gamma, F} - \lambda \mathbf{E})(\mathbf{f}) \in M_{V(\Gamma) \times \{1\}}(F)$ (где $\mathbf{E}$ — единичная матрица из $M_{V(\Gamma) \times V(\Gamma)}(F)$).

§ 2. Терминология и вспомогательные результаты

В настоящем параграфе, содержащем вспомогательные результаты, предполагается, что Γ — локально конечный граф, F — поле с (возможно, тривиальным) абсолютным значением $|\cdot|_V$. При этом предполагается (см. введение), что поле F снабжено топологией (метрикой), определяемой $|\cdot|_V$, а векторное пространство F^X для произвольного $\emptyset \neq X \subseteq V(\Gamma)$ — соответствующей топологией произведения. В случае связного (и, более общо, не более, чем счетного) графа Γ эта топология произведения на $F^{V(\Gamma)}$ может быть, как хорошо

известно, задана метрикой ρ , определяемой следующим образом: произвольным образом нумеруем все вершины графа Γ , получая $V(\Gamma) = \{v_n | n \in \mathcal{N}\}$, где $\mathcal{N} = \{1, \dots, |V(\Gamma)|\}$, если Γ конечен, и $\mathcal{N} = \mathbb{Z}_{\geq 1}$ в противном случае, после чего для произвольных $f_1, f_2 \in F^{V(\Gamma)}$ полагаем

$$\rho(f_1, f_2) = \sum_{n \in \mathcal{N}} \left(\frac{1}{2^n} \cdot \frac{|f_1(v_n) - f_2(v_n)|_v}{1 + |f_1(v_n) - f_2(v_n)|_v} \right).$$

Важно отметить, что для многих дальнейших результатов топология на F (и на $F^{V(\Gamma)}$) играет лишь вспомогательную роль. В этой связи напомним, что как свойство элемента $\lambda \in F$ быть собственным значением оператора $A_{\Gamma, F}$, так и свойство функции $f \in F^{V(\Gamma)}$ быть собственной функцией оператора $A_{\Gamma, F}$, соответствующей собственному значению $\lambda \in F$, не зависят от выбора абсолютного значения $|\cdot|_v$. (Однако наделение поля F абсолютным значением $|\cdot|_v$ может оказаться полезным, например, для нахождения для оператора $A_{\Gamma, F}$ и $\lambda \in F$ собственной функции, соответствующей собственному значению λ , или (F, λ) -пропагатора, поскольку делает возможным привлечение топологических соображений, см. в связи с этим замечание 3.1 и § 6.)

Если не оговорено противное, подполе поля F с абсолютным значением $|\cdot|_v$ предполагается снабженным абсолютным значением, являющимся ограничением на это подполе абсолютного значения $|\cdot|_v$. Векторное подпространство топологического векторного пространства $F^{V(\Gamma)}$ предполагается, если не оговорено противное, снабженным индуцированной топологией.

Векторные подпространства топологического векторного пространства $F^{V(\Gamma)}$ не предполагаются замкнутыми. Через Cl обозначается операция взятия замыкания в $F^{V(\Gamma)}$. Для произвольного $\lambda \in F$ ясно, что $A_{\Gamma, F} - \lambda E$ — (всюду определенный) непрерывный линейный оператор из $F^{V(\Gamma)}$ в $F^{V(\Gamma)}$. Если $X \subseteq V(\Gamma)$, то для $f \in F^{V(\Gamma)}$ и $\mathcal{F} \subseteq F^{V(\Gamma)}$ через $f|_X$ и $\mathcal{F}|_X$ обозначаются ограничения соответственно f и $\mathcal{F}$ на X (т. е. образы f и $\mathcal{F}$ при естественном проектировании $F^{V(\Gamma)} \rightarrow F^X$). Для произвольного $\emptyset \neq X \subseteq V(\Gamma)$ мы полагаем $\Gamma(X) := \cup_{u \in X} \Gamma(u)$, а через $(A_{\Gamma, F} - \lambda E)_X$ для $\lambda \in F$ обозначаем линейный оператор из $F^{X \cup \Gamma(X)}$ в F^X , отображающий функцию $f \in F^{X \cup \Gamma(X)}$ в функцию из F^X , значение которой в произвольной вершине $u \in X$ равно $(\sum_{u' \in \Gamma(u)} f(u')) - \lambda f(u)$.

Через $F^{V(\Gamma)*}$ обозначается подпространство векторного пространства $F^{V(\Gamma)}$, состоящее из всех функций с конечными носителями. Для $v \in V(\Gamma)$ через δ_v обозначается (как уже было сказано во введении) функция из $F^{V(\Gamma)}$ такая, что $\delta_v(u) = 0$ для всех $u \in V(\Gamma) \setminus \{v\}$ и $\delta_v(v) = 1$. Кроме того, для $v \in V(\Gamma)$ полагаем

$$\alpha_v := \left(\sum_{v' \in \Gamma(v)} \delta_{v'} \right) - \lambda \delta_v.$$

Таким образом, $\alpha_v = (A_{\Gamma, F} - \lambda E)(\delta_v)$ для всех $v \in V(\Gamma)$, а $(A_{\Gamma, F} - \lambda E)(F^{V(\Gamma)*})$ совпадает с линейной оболочкой в $F^{V(\Gamma)}$ множества $\{\alpha_v : v \in V(\Gamma)\}$.

Далее в работе нам иногда будет удобно привлекать терминологию, используемую при рассмотрении (систем) линейных уравнений. Как обычно, для поля F линейным уравнением над F с неизвестными x_j , $j \in J \neq \emptyset$, называется

уравнение вида

$$\sum_{j \in J} c_j x_j = a,$$

где $a \in F$ и $c_j \in F$ для каждого $j \in J$, причем множество $\{j \in J : c_j \neq 0\}$ конечно. В обычном смысле понимаются решения в F такого уравнения. В обычном же смысле понимаются системы (не обязательно конечные) линейных уравнений над F , их решения в F , а также их разрешимость в F (как наличие решения в F).

Важную роль в дальнейшем будет играть следующая теорема Теплица (см. [6], а также [8; гл. 2, § 1.4]):

ПРЕДЛОЖЕНИЕ 2.1. Пусть F — поле, I и J — множества (не обязательно конечные), причем $J \neq \emptyset$. Для произвольных $i \in I$ и $j \in J$ пусть $c_{i,j} \in F$, причем для каждого $i \in I$ множество $\{j \in J : c_{i,j} \neq 0\}$ конечно. Пусть, наконец, $a_i \in F$ для каждого $i \in I$. Тогда система линейных уравнений

$$\sum_{j \in J} c_{i,j} x_j = a_i, \quad i \in I,$$

с неизвестными $x_j, j \in J$, разрешима над F тогда и только тогда, когда для произвольного конечного подмножества I' множества I и произвольных $b_{i'} \in F, i' \in I'$, из

$$\sum_{i' \in I'} b_{i'} c_{i',j} = 0 \quad \text{для каждого } j \in J$$

следует

$$\sum_{i' \in I'} b_{i'} a_{i'} = 0.$$

Теорему Теплица чаще нам будет удобно использовать в следующем виде (см. [8; гл. 2, § 1.4], а также [7]; учтено, кроме того, что конечная система линейных уравнений над полем разрешима над ним, если она разрешима над каким-либо его расширением).

ПРЕДЛОЖЕНИЕ 2.2. Система (не обязательно конечная) линейных уравнений над полем F разрешима над F тогда и только тогда, когда каждая ее конечная подсистема разрешима над некоторым расширением поля F .

Из теоремы Теплица в последней форме непосредственно следует

ПРЕДЛОЖЕНИЕ 2.3. Пусть Γ — локально конечный граф, F — поле с абсолютным значением $|\cdot|_v$ и $\lambda \in F$. Тогда для $f \in F^{V(\Gamma)}$ включение $f \in (A_{\Gamma, F} - \lambda E)(F^{V(\Gamma)})$ эквивалентно включению $f|_X \in (A_{\Gamma, F} - \lambda E)_X(F^{X \cup \Gamma(X)})$ для всех конечных непустых подмножеств X множества $V(\Gamma)$.

Следующее предложение демонстрирует некоторые “технические” возможности теоремы Теплица, которые полезно иметь в виду.

ПРЕДЛОЖЕНИЕ 2.4. Пусть Γ — локально конечный граф, F — поле с абсолютным значением $|\cdot|_v$ и $\lambda \in F$. Пусть, далее, $U \subseteq V(\Gamma)$, и для каждой вершины $u \in U$ пусть $c_u \in F$. Пусть, кроме того, U' — конечное подмножество множества $V(\Gamma)$, I — некоторое множество и для каждого $i \in I$

заданы $u_i \in U'$, $c'_i \in F$, $q_i \in \mathbb{R}_{\geq 0}$, а также τ_i — одно из бинарных отношений $\neq, <, \leq, \geq, >$ на $\mathbb{R}$. Тогда следующие условия (i) и (ii) эквивалентны:

(i) Найдется $f \in F^{V(\Gamma)}$ такая, что $(A_{\Gamma, F} - \lambda E)(f) = 0$, $f(u) = c_u$ для каждой вершины $u \in U$ и $|f(u_i) - c'_i|_{\vee} \tau_i q_i$ для каждого $i \in I$;

(ii) Для каждого конечного подмножества $X \subseteq V(\Gamma)$ найдется $f_X \in F^{V(\Gamma)}$ такая, что $((A_{\Gamma, F} - \lambda E)(f_X))|_X = 0$, $f_X(u) = c_u$ для каждой вершины $u \in U \cap X$ и $|f_X(u_i) - c'_i|_{\vee} \tau_i q_i$ для каждого $i \in I$.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Предположим, что имеет место (ii), и докажем, что тогда выполняется (i). Ограничение на U' множества функций $f \in F^{V(\Gamma)}$ таких, что $(A_{\Gamma, F} - \lambda E)(f) = 0$ и $f(u) = c_u$ для каждой вершины $u \in U$, либо пусто, либо имеет вид $h + W$, где $h \in F^{U'}$ и W — подпространство (конечномерного) векторного пространства $F^{U'}$. Но тогда из теоремы Теплица (см. предложение 2.2) следует, что это ограничение совпадает для некоторого конечного подмножества X множества $V(\Gamma)$ с ограничением на U' множества функций $f \in F^{V(\Gamma)}$ таких, что $(A_{\Gamma, F} - \lambda E)(f)|_X = 0$ и $f(u) = c_u$ для каждой вершины $u \in U \cap X$. (Действительно, для каждого конечного подмножества X' множества $V(\Gamma)$ ограничение на U' множества функций $f \in F^{V(\Gamma)}$ таких, что $(A_{\Gamma, F} - \lambda E)(f)|_{X'} = 0$ и $f(u) = c_u$ для каждой вершины $u \in U \cap X'$, имеет вид $h + W_{X'}$, где $W_{X'}$ — содержащее W подпространство пространства $F^{U'}$. Поскольку по теореме Теплица пересечение $W_{X'}$ по всем конечным подмножествам $X' \subseteq V(\Gamma)$ совпадает с W , а векторное пространство $F^{U'}$ конечномерно, для некоторого конечного набора $X_1, \dots, X_k$ конечных подмножеств множества $V(\Gamma)$ имеем $W = \bigcap_{1 \leq j \leq k} W_{X_j}$. Остается заметить, что $W_{X_1 \cup \dots \cup X_k} = \bigcap_{1 \leq j \leq k} W_{X_j}$, и следовательно, в качестве X можно взять множество $X_1 \cup \dots \cup X_k$.) В силу (ii) отсюда следует (i).

Поскольку (ii) тривиальным образом следует из (i), предложение доказано.

В заключительной части параграфа покажем, что для локально конечного графа Γ , поля F с абсолютным значением $|\cdot|_{\vee}$ и $\lambda \in F$ оператор $A_{\Gamma, F} - \lambda E$ отображает замкнутые векторные подпространства топологического векторного пространства $F^{V(\Gamma)}$ в замкнутые же подпространства (см. следствие 2.1). Для этого установим справедливость предложения 2.5, при доказательстве которого используются по существу стандартные рассуждения с проективными пределами, а также замкнутость произвольного векторного подпространства векторного пространства F^X с топологией произведения, где F — поле с топологией, определяемой некоторым абсолютным значением $|\cdot|_{\vee}$, и X — конечное непустое множество. (Замкнутость произвольного векторного подпространства такого векторного пространства F^X следует из возможности его представления как множества всех $f \in F^X$ таких, что $\sum_{u \in X} c_{i,u} f(u) = 0$, $i = 1, \dots, |X|$, для некоторых фиксированных для данного подпространства элементов $c_{i,u}$ поля F , $1 \leq i \leq |X|$, $u \in X$.)

ПРЕДЛОЖЕНИЕ 2.5. Пусть Γ — локально конечный связный граф, F — поле с абсолютным значением $|\cdot|_{\vee}$ и $\lambda \in F$. Пусть, кроме того, $(f_i)_{i \in \mathbb{Z}_{\geq 1}}$ — последовательность векторов из $F^{V(\Gamma)}$, для которой последовательность $((A_{\Gamma, F} - \lambda E)(f_i))_{i \in \mathbb{Z}_{\geq 1}}$ сходится к некоторому $f \in F^{V(\Gamma)}$. Тогда найдется такой вектор f' , принадлежащий замыканию в $F^{V(\Gamma)}$ векторного подпространства, порожденного множеством векторов $\{f_i : i \in \mathbb{Z}_{\geq 1}\}$, что $(A_{\Gamma, F} - \lambda E)(f') = f$.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Пусть $v \in V(\Gamma)$ и $B_i := B_\Gamma(v, i)$ для всех $i \in \mathbb{Z}_{\geq 0}$. Пусть, кроме того, W — векторное подпространство пространства $F^{V(\Gamma)}$, порожденное множеством векторов $\{f_i : i \in \mathbb{Z}_{\geq 1}\}$. Тогда, поскольку согласно условию предложения $f \in \text{Cl}((A_{\Gamma, F} - \lambda E)(W))$, для каждого $i \in \mathbb{Z}_{\geq 0}$ имеем $f|_{B_i} \in (\text{Cl}((A_{\Gamma, F} - \lambda E)(W)))|_{B_i}$, что с учетом равенства $(\text{Cl}((A_{\Gamma, F} - \lambda E)(W)))|_{B_i} = ((A_{\Gamma, F} - \lambda E)(W))|_{B_i}$, которое следует из замкнутости векторного подпространства $((A_{\Gamma, F} - \lambda E)(W))|_{B_i}$ топологического векторного пространства F^{B_i} (см. замечание непосредственно предшествующее формулировке предложения 2.5), влечет существование $\tilde{f}_i \in W$ со свойством $((A_{\Gamma, F} - \lambda E)(\tilde{f}_i))|_{B_i} = f|_{B_i}$.

Для каждого $i \in \mathbb{Z}_{\geq 0}$ положим $L_i := (A_{\Gamma, F} - \lambda E)_{B_i}$ и $\mathcal{F}_i := W|_{B_{i+1}} \cap (L_i)^{-1}(f|_{B_i})$ (где $(L_i)^{-1}(f|_{B_i})$ — множество всех функций из $F^{B_{i+1}}$, которые под действием L_i отображаются в $f|_{B_i}$). Заметим, что $\mathcal{F}_i$ — непустое (в силу $\tilde{f}_{i+1}|_{B_{i+1}} \in \mathcal{F}_i$) аффинное подпространство аффинного пространства, ассоциированного с векторным пространством $F^{B_{i+1}}$. Кроме того, для произвольных целых неотрицательных чисел $i_1 \leq i_2$ отображение ограничения $F^{B_{i_2+1}} \rightarrow F^{B_{i_1+1}}$ индуцирует аффинное отображение $\pi_{i_1, i_2} : \mathcal{F}_{i_2} \rightarrow \mathcal{F}_{i_1}$. Получаемая таким образом проективная система множеств $\mathcal{F}_i$, $i \in \mathbb{Z}_{\geq 0}$, и отображений π_{i_1, i_2} , $i_1, i_2 \in \mathbb{Z}_{\geq 0}$, $i_2 \geq i_1$, имеет проективный предел (в силу наличия у нее так называемого свойства Миттаг-Леффлера: для каждого $i \in \mathbb{Z}_{\geq 0}$ последовательность $(\pi_{i, i+j}(\mathcal{F}_{i+j}))_{j \in \mathbb{Z}_{\geq 0}}$ стабилизируется). Каждый элемент этого проективного предела можно интерпретировать как такой вектор $f' \in F^{V(\Gamma)}$, что для любого $i \in \mathbb{Z}_{\geq 1}$ найдется вектор $f'_i \in W$, для которого $f'_i|_{B_i} \in \mathcal{F}_{i-1}$ и $f'_i|_{B_i} = f'|_{B_i}$. Ясно, что при этом последовательность $(f'_i)_{i \in \mathbb{Z}_{\geq 1}}$ векторов из W сходится к вектору f' (который, следовательно, принадлежит $\text{Cl}(W)$) и $(A_{\Gamma, F} - \lambda E)(f') = f$.

СЛЕДСТВИЕ 2.1. Пусть Γ — локально конечный граф, F — поле с абсолютным значением $|\cdot|_v$ и $\lambda \in F$. Если W — подпространство векторного пространства $F^{V(\Gamma)}$, то

$$\text{Cl}((A_{\Gamma, F} - \lambda E)(W)) = (A_{\Gamma, F} - \lambda E)(\text{Cl}(W)).$$

Другими словами, $A_{\Gamma, F} - \lambda E$ отображает замкнутые подпространства векторного пространства $F^{V(\Gamma)}$ в замкнутые же подпространства.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Включение

$$(A_{\Gamma, F} - \lambda E)(\text{Cl}(W)) \subseteq \text{Cl}((A_{\Gamma, F} - \lambda E)(W))$$

следует из непрерывности $A_{\Gamma, F} - \lambda E$. Обратное включение следует из предложения 2.5, примененного к связным компонентам графа Γ .

ЗАМЕЧАНИЕ 2.1. Утверждение следствия, вообще говоря, не имеет места для подмножества W векторного пространства $F^{V(\Gamma)}$, не являющегося его векторным подпространством.

§ 3. Некоторые общие свойства собственных функций операторов смежности локально конечных графов

Настоящий параграф содержит предварительное рассмотрение собственных функций операторов смежности локально конечных графов. Результаты параграфа носят общий, но отчасти инструментальный характер.

Пусть Γ — локально конечный граф, F — поле с абсолютным значением $|\cdot|_v$ и $\lambda \in F$. Как уже было отмечено, свойство функции из $V(\Gamma)$ в F быть собственной функцией оператора смежности $A_{\Gamma, F}$, соответствующей собственному значению λ , не зависит от выбора $|\cdot|_v$. Кроме того, из предложения 2.2 легко следует, что существование собственной функции оператора смежности $A_{\Gamma, F}$, соответствующей собственному значению λ , равносильно существованию собственной функции оператора смежности $A_{\Gamma, F'}$, соответствующей собственному значению λ , для какого-либо расширения F' поля $F_0(\lambda)$, где F_0 — простое подполе поля F . Мы зафиксируем эти факты (позволяющие для построения собственных функций изменять удобным образом поля и снабжать их подходящими абсолютными значениями) в несколько уточненном виде в следующем предложении.

ПРЕДЛОЖЕНИЕ 3.1. *Пусть Γ — локально конечный граф, F — поле с абсолютным значением $|\cdot|_v$, F_0 — простое подполе поля F и $\lambda \in F$. Тогда справедливы следующие утверждения:*

1) *Если φ — вложение поля F в некоторое поле F' с произвольным абсолютным значением $|\cdot|_{v'}$ и f — собственная функция оператора смежности $A_{\Gamma, F'}$, соответствующая собственному значению $\varphi(\lambda)$, такая, что $f(u) \in \varphi(F)$ для всех $u \in V(\Gamma)$, то $\varphi^{-1}f$, рассматриваемая как элемент $F^{V(\Gamma)}$, является собственной функцией оператора смежности $A_{\Gamma, F}$, соответствующей собственному значению λ .*

2) *Если f — собственная функция оператора смежности $A_{\Gamma, F}$, соответствующая собственному значению λ , и v — вершина графа Γ , принадлежащая носителю f , то найдется собственная функция оператора смежности $A_{\Gamma, F_0(\lambda)}$, соответствующая собственному значению λ , носитель которой содержится в носителе f и содержит v .*

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Утверждение 1) очевидно. Для доказательства утверждения 2) зададим следующим образом систему линейных уравнений над F с неизвестными x_u , где $u \in V(\Gamma)$: система состоит, во-первых, из уравнений $(\sum_{u' \in \Gamma(u)} x_{u'}) - \lambda x_u = 0$ для всех $u \in V(\Gamma)$, во-вторых, из уравнений $x_u = 0$ для всех не принадлежащих носителю f вершин u графа Γ , в-третьих, из уравнения $x_v = 1$. Заметим, что все коэффициенты этой системы принадлежат $F_0(\lambda)$, причем в силу наличия функции f эта система совместна над F . В силу предложения 2.2 отсюда следует, что эта система совместна и над $F_0(\lambda)$. Пусть $x'_u \in F_0(\lambda)$, где u пробегает множество $V(\Gamma)$, — некоторое ее решение над $F_0(\lambda)$ (в том смысле, что при замене x_u на x'_u для всех $u \in V(\Gamma)$ каждое уравнение системы становится равенством в $F_0(\lambda)$). Тогда функция из $F_0(\lambda)^{V(\Gamma)}$, значение которой в каждой вершине $u \in V(\Gamma)$ равно x'_u , очевидным образом является требуемой собственной функцией оператора смежности $A_{\Gamma, F_0(\lambda)}$, соответствующей собственному значению λ , носитель которой содержится в носителе f и содержит v .

ЗАМЕЧАНИЕ 3.1. Укажем на некоторые возможные использования предложения 3.1. Предположим, что выполнены условия предложения 3.1, причем Γ бесконечен и связан, а характеристика поля F равна 0 (т. е. $F_0 = \mathbb{Q}$), и нас

интересует вопрос: является ли λ собственным значением оператора смежности $A_{\Gamma, F}$? В теореме 6.1 будет доказано, что это так в случае, когда элемент λ трансцендентен над $\mathbb{Q}$. Предположим поэтому, что λ — алгебраический над $\mathbb{Q}$ элемент. Тогда из предложения 3.1 следует, что наличие собственной функции оператора смежности $A_{\Gamma, F}$, соответствующей собственному значению λ , равносильно наличию таковой для оператора $A_{\Gamma, \tilde{F}}$, где в качестве $\tilde{F}$ можно взять любое расширение поля $\mathbb{Q}(\lambda)$. Например, в качестве $\tilde{F}$ можно взять любое из следующих полей: $\mathbb{Q}(\lambda)$ (с произвольным абсолютным значением), $\mathbb{C}$ (рассматриваемое как расширение $\mathbb{Q}(\lambda)$, с произвольным абсолютным значением и, в частности, с обычным абсолютным значением на $\mathbb{C}$, что позволяет привлекать для построения интересующих собственных функций аналитические методы, см. § 6), Ω_l для простого числа l (l -адическое пополнение алгебраического замыкания поля l -адических чисел $\mathbb{Q}_l$, рассматриваемое как расширение $\mathbb{Q}(\lambda)$, с произвольным абсолютным значением и, в частности, с продолжением l -адического абсолютного значения $|\cdot|_l$ на $\mathbb{Q}$, что также позволяет привлекать для построения собственных функций аналитические методы). Кроме того, при рассмотрении, например, случая $\tilde{F} = \mathbb{C}$ с обычным абсолютным значением есть возможность (в силу утверждения 1) предложения 3.1) распорядиться удобным образом выбором вложения $\mathbb{Q}(\lambda)$ в $\mathbb{C}$.

Далее, теорема Теплица (см. предложение 2.2) очевидным образом влечет

ПРЕДЛОЖЕНИЕ 3.2. Пусть Γ — локально конечный граф, F — поле с абсолютным значением $|\cdot|_v$ и $\lambda \in F$. Пусть, кроме того, v — вершина графа Γ , не содержащаяся в носителях собственных функций оператора смежности $A_{\Gamma, F}$, принадлежащих собственному значению λ . Для каждого $r \in \mathbb{Z}_{\geq 0}$ определим систему $Syst_r$ линейных уравнений над F относительно неизвестных x_u , где $u \in B_\Gamma(v, r+1)$, включив в нее уравнение $x_v = 1$ и для каждого $u \in B_\Gamma(v, r)$ уравнение $(\sum_{u' \in \Gamma(u)} x_{u'}) - \lambda x_u = 0$. Тогда найдется такое $r_{\lambda, v} \in \mathbb{Z}_{\geq 0}$ (“радиус несовместности для λ и v ”), что система $Syst_r$ совместна (над F) тогда и только тогда, когда $r < r_{\lambda, v}$. При этом число $r_{\lambda, v}$ не изменится, если заменить F на $F_0(\lambda)$, где F_0 — простое подполе поля F .

ЗАМЕЧАНИЕ 3.2. Для локально конечного графа Γ , поля F с абсолютным значением $|\cdot|_v$ и $\lambda \in F$ множество всех вершин графа Γ , не содержащихся ни в одном из носителей собственных функций оператора смежности $A_{\Gamma, F}$, принадлежащих собственному значению λ , будет играть важную роль в дальнейшем. В § 4 (см. теорему 4.2) будет показано, что это множество совпадает с вводимым в § 4 множеством $L_{F, \lambda}(\Gamma)$ всех вершин графа Γ , относительно которых у Γ имеются (F, λ) -пропагаторы с конечными носителями.

Сделаем еще несколько наблюдений, касающихся носителей собственных функций операторов смежности локально конечных графов.

ПРЕДЛОЖЕНИЕ 3.3. Пусть Γ — локально конечный граф, F — поле с абсолютным значением $|\cdot|_v$, $\lambda \in F$ и $v \in V(\Gamma)$. Если X_i , $i \in I$, — непустое линейно упорядоченное по включению семейство подмножеств множества $V(\Gamma)$, содержащих v и являющихся носителями собственных функций оператора $A_{\Gamma, F}$, соответствующих собственному значению λ , то некоторое подмножество множества $\bigcap_{i \in I} X_i$ является содержащим v носителем собственной

функции оператора $A_{\Gamma, F}$, соответствующей собственному значению λ . Как следствие этого (и леммы Цорна), каждый содержащий v носитель собственной функции оператора $A_{\Gamma, F}$, соответствующей собственному значению λ , содержит минимальный по включению среди содержащих v носителей собственных функций оператора $A_{\Gamma, F}$, соответствующих собственному значению λ .

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Утверждение следует из теоремы Теплица (см. предложение 2.2), примененной к системе линейных уравнений над F с неизвестными x_u , где $u \in V(\Gamma)$, состоящей, во-первых, из уравнений $(\sum_{u' \in \Gamma(u)} x_{u'}) - \lambda x_u = 0$ для всех $u \in V(\Gamma)$, во-вторых, из уравнений $x_u = 0$ для всех $u \in V(\Gamma) \setminus \bigcap_{i \in I} X_i$, в-третьих, из уравнения $x_v = 1$.

Если Γ — локально конечный граф, F — поле с абсолютным значением $|\cdot|_v$, $\lambda \in F$ и f — собственная функция оператора $A_{\Gamma, F}$, соответствующая собственному значению λ , то для $\emptyset \neq X \subseteq V(\Gamma)$, являющегося объединением набора связных компонент носителя функции f , функция из $F^{V(\Gamma)}$, совпадающая с f на X и тождественно равная нулю на $V(\Gamma) \setminus X$, не является, вообще говоря, собственной функцией оператора $A_{\Gamma, F}$, соответствующей собственному значению λ (хотя ограничение f на X очевидным образом является собственной функцией оператора $A_{\langle X \rangle_\Gamma, F}$, соответствующей собственному значению λ). Однако такого рода эффект не возникает, если вместо связных компонент носителя рассматривать вводимые ниже Γ^2 -связные компоненты носителя.

Для произвольного графа Γ будем обозначать через Γ^2 граф с множеством вершин $V(\Gamma^2) = V(\Gamma)$ и множеством ребер, состоящим в точности из таких пар его различных вершин $\{u, u'\}$, что u и u' соединены в графе Γ путем длины ≤ 2 . Пусть X — подмножество множества вершин графа Γ . Скажем, что X является Γ^2 -связным, если связан порожденный X подграф $\langle X \rangle_{\Gamma^2}$ графа Γ^2 . *Компонентами Γ^2 -связности* (или *Γ^2 -связными компонентами*) X будем называть множества вершин связных компонент графа $\langle X \rangle_{\Gamma^2}$. Если Γ — локально конечный граф, F — поле с абсолютным значением $|\cdot|_v$, $\lambda \in F$ и f — собственная функция оператора $A_{\Gamma, F}$, соответствующая собственному значению λ , то для $\emptyset \neq X \subseteq V(\Gamma)$, являющегося объединением произвольного набора Γ^2 -связных компонент носителя функции f , функция из $F^{V(\Gamma)}$, совпадающая с f на X и тождественно равная нулю на $V(\Gamma) \setminus X$, очевидным образом также является собственной функцией оператора $A_{\Gamma, F}$, соответствующей собственному значению λ , но с носителем X . В частности, для обсуждавшихся ранее (см. предложение 3.3) минимальных по включению среди содержащих v носителей собственных функций оператора $A_{\Gamma, F}$, соответствующих собственному значению λ , справедливо следующее утверждение.

ПРЕДЛОЖЕНИЕ 3.4. Пусть Γ — локально конечный граф, F — поле с абсолютным значением $|\cdot|_v$, $\lambda \in F$ и $v \in V(\Gamma)$. Тогда каждый минимальный по включению среди содержащих v носителей собственных функций оператора $A_{\Gamma, F}$, соответствующих собственному значению λ , Γ^2 -связен.

ЗАМЕЧАНИЕ 3.3. С учетом утверждения 2) предложения 3.1 для локально конечного графа Γ , поля F с абсолютным значением $|\cdot|_v$, $\lambda \in F$ и $v \in V(\Gamma)$

каждый минимальный содержащий v носитель собственной функции оператора $A_{\Gamma, F}$, соответствующей собственному значению λ , не только Γ^2 -связен (см. предложение 3.4), но и является носителем содержащейся в $F_0(\lambda)^{V(\Gamma)}$, где F_0 — простое подполе поля F , собственной функции оператора $A_{\Gamma, F}$, соответствующей собственному значению λ (или другими словами, является носителем собственной функции оператора $A_{\Gamma, F_0(\lambda)}$, соответствующей собственному значению λ).

В дальнейшем нам потребуется следующее

ПРЕДЛОЖЕНИЕ 3.5. Пусть Γ — локально конечный граф, F — поле с абсолютным значением $|\cdot|_V$ и $\lambda \in F$. Предположим, что имеется такое семейство $X_i, i \in I$, конечных подмножеств множества $V(\Gamma)$, что $\cup_{i \in I} X_i$ бесконечно и для каждого $i \in I$ имеется собственная функция f_i оператора $A_{\Gamma, F}$, соответствующая собственному значению λ , с носителем X_i . Тогда для каждой вершины из $\cup_{i \in I} X_i$ найдется собственная функция оператора $A_{\Gamma, F}$, соответствующая собственному значению λ , с бесконечным носителем, содержащим эту вершину и содержащимся в $\cup_{i \in I} X_i$.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Для $i \in I$ компонента Γ^2 -связности множества X_i является носителем собственной функции оператора $A_{\Gamma, F}$, соответствующей собственному значению λ , которая на вершинах из этой компоненты принимает те же значения, что и f_i , а на всех остальных вершинах графа Γ равна нулю. Поэтому, переходя в случае необходимости от семейства множеств $X_i, i \in I$, к семейству всех их компонент Γ^2 -связности, будем, не теряя общности, предполагать Γ^2 -связным каждое из множеств $X_i, i \in I$. Кроме того, будем, не теряя общности, предполагать, что все множества $X_i, i \in I$, попарно различны.

Положим $X := \cup_{i \in I} X_i$. Для доказательства предложения достаточно доказать существование собственной функции оператора $A_{\Gamma, F}$, соответствующей собственному значению λ , с бесконечным носителем, содержащимся в X . Действительно, если f — такая функция, то для каждой вершины из $X_i, i \in I$, функция f или функция $f + f_i$ обладает, очевидно, требуемым в предложении свойством.

Так как конечные подмножества $X_i, i \in I$, образуют покрытие бесконечно множества X , то справедливо по меньшей мере одно из следующих двух утверждений:

1) для некоторого бесконечного подмножества $J \subseteq I$ множества $X_j, j \in J$, попарно дизъюнкты;

2) для некоторой вершины $v \in X$ множество $\{i \in I : v \in X_i\}$ бесконечно.

Если справедливо утверждение 1), то с учетом локальной конечности графа Γ найдется такое бесконечное подмножество $J' \subseteq J$, что для произвольных различных $j_1, j_2 \in J'$ имеем $(X_{j_1} \cup \Gamma(X_{j_1})) \cap (X_{j_2} \cup \Gamma(X_{j_2})) = \emptyset$. Но тогда функция $f \in F^{V(\Gamma)}$ такая, что $f(u) = 0$ при $u \in V(\Gamma) \setminus \cup_{j \in J'} X_j$ и $f(u) = f_j(u)$ при $u \in X_j$, где $j \in J'$, очевидным образом является собственной функцией оператора $A_{\Gamma, F}$, соответствующей собственному значению λ , с бесконечным носителем $\cup_{j \in J'} X_j$, содержащимся в X .

Предположим поэтому, что справедливо утверждение 2). Тогда с учетом локальной конечности графа Γ и Γ^2 -связности каждого из множеств $X_i, i \in I$,

существует такой бесконечный путь $u_0 = v, u_1, u_2, \dots$ графа Γ^2 с попарно различными вершинами, что для любого целого положительного числа n найдется $i \in I$ со свойством $\{u_0, \dots, u_n\} \subseteq X_i$. Ввиду конечности множеств $X_i, i \in I$, очевидно, далее, наличие такой бесконечной возрастающей последовательности $n_0 = 0, n_1, n_2, \dots$ целых неотрицательных чисел, что для каждого $k \in \mathbb{Z}_{\geq 1}$ найдется $i_k \in I$, для которого $u_{n_{k-1}} \in X_{i_k}$ и $\{u_{n_k}, u_{n_{k+1}}, u_{n_{k+2}}, \dots\} \cap X_{i_k} = \emptyset$.

Зададим следующим образом систему линейных уравнений над полем F с неизвестными x_u , где $u \in V(\Gamma)$: система состоит, во-первых, из уравнений $(\sum_{u' \in \Gamma(u)} x_{u'}) - \lambda x_u = 0$ для всех $u \in V(\Gamma)$, во-вторых, из уравнений $x_u = 0$ для всех $u \in V(\Gamma) \setminus X$, в-третьих, из уравнений $x_{u_{n_k}} = 1$ для всех $k \in \mathbb{Z}_{\geq 0}$. В силу наличия функций $f_{i_1}, f_{i_2}, f_{i_3}, \dots$ каждая конечная подсистема этой системы совместна над F . (В качестве решения можно взять значения в вершинах подходящей линейной комбинации функций $f_{i_1}, f_{i_2}, f_{i_3}, \dots$ Заметим, что для каждого $k \in \mathbb{Z}_{\geq 1}$ по выбору f_{i_k} имеем $(\sum_{u' \in \Gamma(u)} f_{i_k}(u')) - \lambda f_{i_k}(u) = 0$ для всех $u \in V(\Gamma)$, $f_{i_k}(u) = 0$ для всех $u \in V(\Gamma) \setminus X$, $f_{i_k}(u_{n_{k-1}}) \neq 0$ и $f_{i_k}(u_{n_l}) = 0$ для всех $l \in \mathbb{Z}_{\geq k}$.) Следовательно, по теореме Теплица (см. предложение 2.2) совместна над F и вся система. Пусть $x'_u \in F$, где u пробегает множество $V(\Gamma)$, — некоторое ее решение над F . Тогда, определяя $f \in F^{V(\Gamma)}$ посредством $f(u) = x'_u$ для всех $u \in V(\Gamma)$, мы получаем собственную функцию оператора $A_{\Gamma, F}$, соответствующую собственному значению λ , с бесконечным носителем, содержащимся в X , что завершает доказательство предложения 3.5.

Еще одним следствием теоремы Теплица является следующее

ПРЕДЛОЖЕНИЕ 3.6. Пусть Γ — локально конечный граф и F — поле с таким абсолютным значением $|\cdot|_v$, что определяемая этим абсолютным значением метрика на F полна и не является дискретной. Тогда для $\lambda \in F$ следующие условия (i) и (ii) эквивалентны:

- (i) Найдется собственная функция оператора смежности $A_{\Gamma, F}$, соответствующая собственному значению λ , носитель которой совпадает с $V(\Gamma)$.
- (ii) Для каждого конечного подмножества $X \subseteq V(\Gamma)$ и вершины $u \in X$ найдется $f_{X, u} \in F^{V(\Gamma)}$ такая, что $((A_{\Gamma, F} - \lambda E)(f_{X, u}))|_X = 0$ и $f_{X, u}(u) \neq 0$.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Доказывая предложение 3.6, мы будем без потери общности предполагать граф Γ связным (поскольку очевидно, что в общем случае предложение достаточно доказать для компонент связности графа Γ) и бесконечным (поскольку для конечного графа Γ в (ii) можно положить $X = V(\Gamma)$, а векторное пространство W собственных функций оператора смежности $A_{\Gamma, F}$, соответствующих собственному значению λ , в силу бесконечности поля F не может быть теоретико-множественным объединением по всем $u \in V(\Gamma)$ собственных подпространств W_u , состоящих для каждой вершины $u \in V(\Gamma)$ из равных 0 в u собственных функций оператора $A_{\Gamma, F}$, соответствующих собственному значению λ).

Пусть имеет место (ii). Занумеруем все вершины графа Γ положительными целыми числами, полагая $V(\Gamma) = \{v_1, v_2, \dots\}$, и определим (см. ниже) функции $f_i \in F^{V(\Gamma)}$, $i \in \mathbb{Z}_{\geq 1}$, обладающие следующими двумя свойствами:

- 1) $(A_{\Gamma, F} - \lambda E)(f_i) = 0$ для каждого $i \in \mathbb{Z}_{\geq 1}$;

2) для каждого $j \in \mathbb{Z}_{\geq 1}$ последовательность $f_1(v_j), f_2(v_j), \dots$ сходится (в метрике, определяемой на F абсолютным значением $|\cdot|_v$) к некоторому ненулевому элементу c_j поля F .

Ясно, что тогда функция $f \in F^{V(\Gamma)}$, определяемая посредством $f(v_j) = c_j$ для всех $j \in \mathbb{Z}_{\geq 1}$, будет обладать требуемыми в (i) свойствами.

Функции $f_i, i \in \mathbb{Z}_{\geq 1}$, определим индукцией по i . Пусть $i \in \mathbb{Z}_{\geq 1}$ и функции $f_{i'}$ уже определены для всех $i' \in \mathbb{Z}_{\geq 1}$ со свойством $i' < i$. Из (ii) и теоремы Теплица (см. предложение 2.2) следует существование $\tilde{f}_i \in F^{V(\Gamma)}$ такой, что $(A_{\Gamma, F} - \lambda E)(\tilde{f}_i) = 0$ и $\tilde{f}_i(v_i) = 1$ (поскольку выполнение этих условий есть разрешимость системы линейных уравнений, каждая конечная подсистема которой разрешима в силу (ii)). При $i = 1$ полагаем $f_1 = \tilde{f}_1$. При $i > 1$ полагаем $f_i := \tilde{f}_{i-1} + \varepsilon_i \tilde{f}_i$, где $\varepsilon_i \neq 0$ таково, что, во-первых, $|\varepsilon_i|_v |\tilde{f}_i(v_{i'})|_v \leq 3^{-i} |f_{i-1}(v_{i'})|_v$ для всех $i' < i$ и, во-вторых, $|\varepsilon_i|_v \leq 3^{-i} |f_{i-1}(v_i)|_v$ при $f_{i-1}(v_i) \neq 0$. Легко убедиться, что это определение корректно, а так определенные функции $f_i \in F^{V(\Gamma)}, i \in \mathbb{Z}_{\geq 1}$, обладают свойствами 1) и 2).

Поскольку (ii) тривиальным образом следует из (i), предложение доказано.

§ 4. Пропагаторы

Если Γ — локально конечный граф, F — поле с абсолютным значением $|\cdot|_v$, $\lambda \in F$ и $v \in V(\Gamma)$, то (F, λ) -пропагатором графа Γ относительно вершины v мы называем любую функцию $f \in F^{V(\Gamma)}$ такую, что $(A_{\Gamma, F} - \lambda E)(f) = \delta_v$, где, напомним, $\delta_v \in F^{V(\Gamma)}$, $\delta_v(v) = 1$ и $\delta_v(u) = 0$ для всех $u \in V(\Gamma) \setminus \{v\}$. Заметим, что свойство функции $f \in F^{V(\Gamma)}$ быть (F, λ) -пропагатором графа Γ относительно вершины v не зависит от выбора абсолютного значения $|\cdot|_v$. Очевидно, что (F, λ) -пропагаторы локально конечного графа Γ относительно вершины v — это в точности те $f \in F^{V(\Gamma)}$, для которых выполняется условие: если X — связная компонента графа Γ , то $f|_X$ является (F, λ) -пропагатором графа $\langle X \rangle_\Gamma$ относительно вершины v в случае $v \in X$ и является либо нулевой функцией, либо собственной функцией оператора $A_{\langle X \rangle_\Gamma, F}$, соответствующей собственному значению λ , в случае $v \notin X$.

ЗАМЕЧАНИЕ 4.1. (F, λ) -пропагатор графа Γ относительно вершины v есть, по существу, функция Грина (или фундаментальное решение) относительно v для оператора $A_{\Gamma, F} - \lambda E$ и как таковая обладает рядом “ожидаемых” свойств. Однако специфика пространства, на котором задан оператор $A_{\Gamma, F} - \lambda E$, не позволяет использовать здесь многие “стандартные” приемы работы с функциями Грина.

В этом и особенно следующем параграфах будет показано, что ряд представляющих интерес свойств оператора $A_{\Gamma, F} - \lambda E$ (где Γ — локально конечный граф, F — поле с абсолютным значением $|\cdot|_v$, $\lambda \in F$) и, в частности, свойство инъективности (или, другими словами, свойство λ не быть собственным значением $A_{\Gamma, F}$) могут быть сформулированы в терминах (F, λ) -пропагаторов графа Γ . При этом, как будет видно из дальнейшего (см. особенно § 6), исследовать (F, λ) -пропагаторы графа Γ зачастую проще, чем исследовать непосредственно

сами эти представляющие интерес свойства и (что особо значимо для тематики настоящей работы) чем исследовать непосредственно собственные функции оператора $A_{\Gamma, F}$, соответствующие собственному значению λ .

Пусть Γ — локально конечный граф и F — поле с абсолютным значением $|\cdot|_v$. Вообще говоря, для заданных $\lambda \in F$ и $v \in V(\Gamma)$ у графа Γ относительно v может не быть (F, λ) -пропагатора (как, например, для $\lambda = 0$ в случае $V(\Gamma) = \{v\}$), а в случае наличия такового он может не быть единственным (соответствующие многочисленные примеры будут возникать далее в работе). Заметим, что для $\lambda \in F$ разность двух различных (F, λ) -пропагаторов графа Γ относительно одной и той же вершины есть собственная функция оператора $A_{\Gamma, F}$, соответствующая собственному значению λ . Обратно, для $\lambda \in F$ сумма (F, λ) -пропагатора графа Γ относительно некоторой его вершины и собственной функции оператора $A_{\Gamma, F}$, соответствующей собственному значению λ , есть другой (F, λ) -пропагатор графа Γ относительно той же вершины.

Для локально конечного графа Γ , поля F с абсолютным значением $|\cdot|_v$, $\lambda \in F$ и $v \in V(\Gamma)$, как уже было отмечено, свойство функции из $V(\Gamma)$ в F быть (F, λ) -пропагатором графа Γ относительно v не зависит от выбора $|\cdot|_v$. Кроме того (ср. начало § 3), используя предложение 2.2, легко доказать, что существование (F, λ) -пропагатора графа Γ относительно v равносильно существованию (F', λ) -пропагатора графа Γ относительно v для какого-либо расширения F' поля $F_0(\lambda)$, где F_0 — простое подполе поля F . Мы зафиксируем эти факты (позволяющие для построения пропагаторов изменять удобным образом поля и снабжать их подходящими абсолютными значениями) в несколько уточненном виде в предложении 4.1 (являющемся аналогом для пропагаторов предложения 3.1 для собственных функций).

Если Γ — локально конечный граф, F — поле с абсолютным значением $|\cdot|_v$, $\lambda \in F$, $v \in V(\Gamma)$ и f — (F, λ) -пропагатор графа Γ относительно вершины v , то расширенным носителем (F, λ) -пропагатора f будем называть объединение носителя f и $\{v\}$ (вообще говоря, v может не принадлежать носителю f).

ПРЕДЛОЖЕНИЕ 4.1. Пусть Γ — локально конечный граф, F — поле с абсолютным значением $|\cdot|_v$, F_0 — простое подполе поля F и $\lambda \in F$. Тогда для $v \in V(\Gamma)$ справедливы следующие утверждения:

1) Если φ — вложение поля F в некоторое поле F' с произвольным абсолютным значением $|\cdot|_{v'}$ и f — $(F', \varphi(\lambda))$ -пропагатор графа Γ относительно вершины v такой, что $f(u) \in \varphi(F)$ для всех $u \in V(\Gamma)$, то функция $\varphi^{-1}f \in F^{V(\Gamma)}$ является (F, λ) -пропагатором графа Γ относительно вершины v .

2) Если f — (F, λ) -пропагатор графа Γ относительно вершины v , то найдется $(F_0(\lambda), \lambda)$ -пропагатор графа Γ относительно вершины v , расширенный носитель которого содержится в расширенном носителе f .

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Утверждение 1) очевидно. Доказательство утверждения 2) аналогично доказательству утверждения 2) предложения 3.1, но система линейных уравнений над F с неизвестными x_u , где $u \in V(\Gamma)$, теперь состоит, во-первых, из уравнений $(\sum_{u' \in \Gamma(u)} x_{u'}) - \lambda x_u = 0$ для всех $u \in V(\Gamma) \setminus \{v\}$, во-вторых, из уравнений $x_u = 0$ для всех не принадлежащих расширенному носителю f вершин u графа Γ , в-третьих, из уравнения $(\sum_{u' \in \Gamma(v)} x_{u'}) - \lambda x_v = 1$.

Пусть Γ — локально конечный граф, F — поле с абсолютным значением $|\cdot|_V$ и $\lambda \in F$. Если у графа Γ относительно каждой его вершины u имеется некоторый (F, λ) -пропагатор, скажем p_u , то матрица $\mathbf{P}$ из $M_{V(\Gamma) \times V(\Gamma)}(F)$, у которой для $u_1, u_2 \in V(\Gamma)$ элемент на пересечении строки, соответствующей u_1 , и столбца, соответствующего u_2 , равен $p_{u_2}(u_1)$, является правой обратной для матрицы $\mathbf{A}_{\Gamma, F} - \lambda \mathbf{E}$ (а с учетом симметричности $\mathbf{A}_{\Gamma, F} - \lambda \mathbf{E}$ матрица $\mathbf{P}^t$ является левой обратной для $\mathbf{A}_{\Gamma, F} - \lambda \mathbf{E}$). Обратно, если $\mathbf{P}$ — матрица из $M_{V(\Gamma) \times V(\Gamma)}(F)$, которая является правой обратной для $\mathbf{A}_{\Gamma, F} - \lambda \mathbf{E}$ (последнее эквивалентно тому, что $\mathbf{P}^t$ является левой обратной для $\mathbf{A}_{\Gamma, F} - \lambda \mathbf{E}$), то для каждого $u \in V(\Gamma)$ функция $p_u \in F^{V(\Gamma)}$ такая, что ее значение $p_u(w)$ для произвольного $w \in V(\Gamma)$ равно элементу матрицы $\mathbf{P}$ на пересечении строки, соответствующей w , и столбца, соответствующего u , является (F, λ) -пропагатором графа Γ относительно u . Наконец, заметим, что для $\lambda \in F$ с учетом следствия 2.1 *сюръективность оператора $\mathbf{A}_{\Gamma, F} - \lambda \mathbf{E}$ эквивалентна наличию у графа Γ относительно каждой его вершины (F, λ) -пропагатора.*

Для локально конечного графа Γ , поля F с абсолютным значением $|\cdot|_V$ и $\lambda \in F$ вершину $v \in V(\Gamma)$ назовем (F, λ) -сингулярной, если у графа Γ отсутствуют (F, λ) -пропагаторы относительно v . Через $S_{F, \lambda}(\Gamma)$ будем обозначать множество всех (F, λ) -сингулярных вершин графа Γ . (Таким образом, с учетом замеченного выше, условие сюръективности $\mathbf{A}_{\Gamma, F} - \lambda \mathbf{E}$, также как и условие наличия в $M_{V(\Gamma) \times V(\Gamma)}(F)$ правой обратной для $\mathbf{A}_{\Gamma, F} - \lambda \mathbf{E}$ матрицы, эквивалентно условию $S_{F, \lambda}(\Gamma) = \emptyset$.) Ясно, что множество $S_{F, \lambda}(\Gamma)$ является $\text{Aut}(\Gamma)$ -инвариантным, а из предложения 4.1 следует, что $S_{F, \lambda}(\Gamma) = S_{F', \lambda}(\Gamma)$ для произвольного расширения F' (с любым абсолютным значением) поля $F_0(\lambda)$, где F_0 — простое подполе поля F .

В случае конечного графа Γ для элемента λ поля F условие $S_{F, \lambda}(\Gamma) \neq \emptyset$, как легко убедиться, равносильно условию принадлежности λ спектру графа Γ над F , причем для $v \in V(\Gamma)$ условие $v \in S_{F, \lambda}(\Gamma)$ равносильно условию принадлежности v носителю некоторой собственной функции матрицы смежности графа Γ над F , соответствующей собственному значению λ . Ниже (см. теорему 4.1) будет доказано, что и в общем случае произвольного локально конечного графа Γ множество $S_{F, \lambda}(\Gamma)$ совпадает с объединением всех конечных носителей собственных функций оператора $\mathbf{A}_{\Gamma, F}$, соответствующих собственному значению λ .

Из теоремы Теплица (см. предложение 2.2) очевидным образом вытекает справедливость следующего утверждения.

ПРЕДЛОЖЕНИЕ 4.2. *Пусть Γ — локально конечный граф, F — поле с абсолютным значением $|\cdot|_V$ и $\lambda \in F$. Тогда для $v \in V(\Gamma)$ следующие условия (i) и (ii) равносильны:*

(i) $v \in S_{F, \lambda}(\Gamma)$.

(ii) *Для некоторого конечного подмножества X множества $V(\Gamma)$ не существует $f' \in F^{V(\Gamma)}$ такой, что $((\mathbf{A}_{\Gamma, F} - \lambda \mathbf{E})(f'))(v) = 1$ и $((\mathbf{A}_{\Gamma, F} - \lambda \mathbf{E})(f'))(u) = 0$ для всех $u \in X \setminus \{v\}$. (Ясно, что при этом тем же свойством обладает и любое содержащее X конечное подмножество множества $V(\Gamma)$.)*

Следствием предложений 4.2 и 4.1 является

ПРЕДЛОЖЕНИЕ 4.3. Пусть Γ — локально конечный граф, F — поле с абсолютным значением $|\cdot|_v$ и $\lambda \in F$. Пусть, кроме того, $v \in S_{F,\lambda}(\Gamma)$. Для каждого $r \in \mathbb{Z}_{\geq 0}$ определим систему $PrSyst_r$ линейных уравнений над F относительно неизвестных x_u , где $u \in B_\Gamma(v, r+1)$, включив в нее уравнение $(\sum_{u' \in \Gamma(v)} x_{u'}) - \lambda x_v = 1$ и для каждого $u \in B_\Gamma(v, r) \setminus \{v\}$ уравнение $(\sum_{u' \in \Gamma(u)} x_{u'}) - \lambda x_u = 0$. Тогда найдется такое $\tilde{r}_{\lambda,v} \in \mathbb{Z}_{\geq 0}$ (“радиус пропагаторной несовместности для λ и v ”), что система $PrSyst_r$ совместна (над F) тогда и только тогда, когда $r < \tilde{r}_{\lambda,v}$. При этом число $\tilde{r}_{\lambda,v}$ не изменится, если заменить F на $F_0(\lambda)$, где F_0 — простое подполе поля F .

Для локально конечного связного графа Γ и элемента λ поля F вполне может оказаться, что $S_{F,\lambda}(\Gamma) \neq \emptyset$ и даже $S_{F,\lambda}(\Gamma) = V(\Gamma)$ (такowymi являются, например, конечные регулярные степени $d \in \mathbb{Z}_{\geq 1}$ связные графы для $\lambda = d \cdot 1_F$ или конечные связные вершинно-симметрические (т. е. с вершинно-транзитивными группами автоморфизмов) графы для λ , принадлежащих их спектрам над F ; примеры бесконечных локально конечных связных вершинно-симметрических графов Γ с $S_{\mathbb{C},\lambda}(\Gamma) = V(\Gamma)$ для некоторых λ см. в § 8, раздел 8.5). Однако, как будет показано далее (см., например, следствие 4.2), для локально конечного графа Γ и элемента λ поля F в определенном смысле типичной все же является ситуация, когда у Γ относительно каждой его вершины имеется (F, λ) -пропагатор, т. е. когда $S_{F,\lambda}(\Gamma) = \emptyset$.

Следующие предложения 4.4 и 4.5 являются аналогами для пропагаторов предложений 3.3 и 3.4 для собственных функций операторов смежности локально конечных графов.

ПРЕДЛОЖЕНИЕ 4.4. Пусть Γ — локально конечный граф, F — поле с абсолютным значением $|\cdot|_v$, $\lambda \in F$ и $v \in V(\Gamma)$. Если X_i , $i \in I$, — непустое линейно упорядоченное по включению семейство подмножеств множества $V(\Gamma)$, являющихся расширенными носителями (F, λ) -пропагаторов графа Γ относительно v , то некоторое подмножество множества $\bigcap_{i \in I} X_i$ является расширенным носителем (F, λ) -пропагатора графа Γ относительно v . В частности, каждый расширенный носитель (F, λ) -пропагатора графа Γ относительно v содержит минимальный по включению среди расширенных носителей (F, λ) -пропагаторов графа Γ относительно v .

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Утверждение следует из теоремы Теплица (см. предложение 2.2), примененной к системе линейных уравнений над F с неизвестными x_u , где $u \in V(\Gamma)$, состоящей, во-первых, из уравнений $(\sum_{u' \in \Gamma(u)} x_{u'}) - \lambda x_u = 0$ для всех $u \in V(\Gamma) \setminus \{v\}$, во-вторых, из уравнений $x_u = 0$ для всех $u \in V(\Gamma) \setminus \bigcap_{i \in I} X_i$, в-третьих, из уравнения $(\sum_{v' \in \Gamma(v)} x_{v'}) - \lambda x_v = 1$.

Если Γ — локально конечный граф, F — поле с абсолютным значением $|\cdot|_v$, $\lambda \in F$, $v \in V(\Gamma)$ и p_v — (F, λ) -пропагатор графа Γ относительно вершины v , то для $X \subseteq V(\Gamma)$, содержащего v и являющегося объединением набора связных компонент расширенного носителя p_v , функция из $F^{V(\Gamma)}$, совпадающая с p_v на X и тождественно равная нулю на $V(\Gamma) \setminus X$, не является, вообще говоря, (F, λ) -пропагатором графа Γ относительно вершины v , хотя ограничение p_v на X очевидным образом является (F, λ) -пропагатором графа $\langle X \rangle_\Gamma$ относительно

вершины v . Однако (аналогично тому, как это имеет место для собственных функций, см. § 3) такого рода эффект не возникает, если вместо связных компонент расширенного носителя p_v рассматривать его Γ^2 -связные компоненты.

Действительно, если Γ — локально конечный граф, F — поле с абсолютным значением $|\cdot|_v$, $\lambda \in F$, $v \in V(\Gamma)$ и p_v — (F, λ) -пропагатор графа Γ относительно вершины v , то для $X \subseteq V(\Gamma)$, содержащего v и являющегося объединением некоторого набора Γ^2 -связных компонент расширенного носителя p_v , функция из $F^{V(\Gamma)}$, совпадающая с p_v на X и тождественно равная нулю на $V(\Gamma) \setminus X$, очевидным образом также является (F, λ) -пропагатором графа Γ относительно вершины v . В частности, содержащая v компонента Γ^2 -связности расширенного носителя p_v , которую уместно назвать *основной компонентой Γ^2 -связности* расширенного носителя p_v , является расширенным носителем (F, λ) -пропагатора графа Γ относительно вершины v . Как следствие, для обсуждавшихся ранее (см. предложение 4.4) минимальных по включению среди расширенных носителей (F, λ) -пропагаторов графа Γ относительно v справедливо следующее утверждение.

ПРЕДЛОЖЕНИЕ 4.5. *Пусть Γ — локально конечный граф, F — поле с абсолютным значением $|\cdot|_v$, $\lambda \in F$ и $v \in V(\Gamma)$. Тогда каждый минимальный по включению среди расширенных носителей (F, λ) -пропагаторов графа Γ относительно v является Γ^2 -связным.*

ЗАМЕЧАНИЕ 4.2. В силу утверждения 2) предложения 4.1 для каждого минимального подмножества из предыдущего предложения (F, λ) -пропагатор графа Γ относительно вершины v , для которого это подмножество есть расширенный носитель, может быть выбран из $F_0(\lambda)^{V(\Gamma)}$, т. е. может быть выбран являющимся $(F_0(\lambda), \lambda)$ -пропагатором.

В дальнейшем нам потребуется следующее

ПРЕДЛОЖЕНИЕ 4.6. *Пусть Γ — локально конечный граф, F — поле с абсолютным значением $|\cdot|_v$ и $\lambda \in F$. Пусть, кроме того, для вершины v графа Γ имеется такая последовательность $(v_i)_{i \in \mathbb{Z}_{\geq 1}}$ попарно различных вершин графа Γ , что для каждого $i \in \mathbb{Z}_{\geq 1}$ существует (F, λ) -пропагатор графа Γ относительно вершины v_i с конечным Γ^2 -связным расширенным носителем X_i , содержащим v . Тогда найдется собственная функция оператора $A_{\Gamma, F}$, соответствующая собственному значению λ , с бесконечным носителем, содержащим вершину v и содержащимся в $\cup_{i \in \mathbb{Z}_{\geq 1}} X_i$.*

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. По условию для каждого $i \in \mathbb{Z}_{\geq 1}$ существует (F, λ) -пропагатор p_i графа Γ относительно вершины v_i с расширенным носителем X_i . Положим $X := \cup_{i \in \mathbb{Z}_{\geq 1}} X_i$.

В силу локальной конечности графа Γ и Γ^2 -связности каждого из множеств X_i , $i \in I$, существует такой бесконечный путь $u_0 = v, u_1, u_2, \dots$ графа Γ^2 с попарно различными вершинами, что для любого целого положительного числа n найдется $i \in I$ со свойством $\{u_0, \dots, u_n\} \subseteq X_i$.

Пусть $k \in \mathbb{Z}_{\geq 0}$. Зададим следующим образом систему линейных уравнений над полем F с неизвестными x_u , где $u \in V(\Gamma)$: система состоит, во-первых, из уравнений $(\sum_{u' \in \Gamma(u)} x_{u'}) - \lambda x_u = 0$ для всех $u \in V(\Gamma)$, во-вторых, из уравнений

$x_u = 0$ для всех $u \in V(\Gamma) \setminus X$, в-третьих, из уравнения $x_{u_k} = 1$. В силу наличия функций $p_1, p_2, p_3, \dots$ каждая конечная подсистема этой системы совместна над F . Следовательно, по теореме Теплица (см. предложение 2.2) совместна над F и вся система. Пусть $x'_u \in F$, где u пробегает множество $V(\Gamma)$, — некоторое ее решение над F . Тогда, определяя $f_k \in F^{V(\Gamma)}$ посредством $f_k(u) = x'_u$ для всех $u \in V(\Gamma)$, мы получаем собственную функцию оператора $A_{\Gamma, F}$, соответствующую собственному значению λ , с носителем, содержащимся в X , и такую, что $f_k(u_k) = 1$.

Если носитель функции f_0 бесконечен, то она обладает требуемыми в предложении 4.6 свойствами. Предположим, что носитель функции f_0 конечен. Если для некоторого $k \in \mathbb{Z}_{\geq 1}$ носитель функции f_k бесконечен, то функция f_k или функция $f_k + f_0$ обладает требуемыми в предложении 4.6 свойствами. Предположим поэтому, что для каждого $k \in \mathbb{Z}_{\geq 0}$ носитель функции f_k конечен. Но в этом случае справедливость предложения 4.6 вытекает из предложения 3.5 (в котором следует положить $I = \mathbb{Z}_{\geq 0}$, а в качестве X_i , $i \in I$, взять носитель функции f_i).

Для локально конечного графа Γ , поля F с абсолютным значением $|\cdot|_v$ и $\lambda \in F$ вершину $v \in V(\Gamma)$ назовем (F, λ) -*локальной*, если у графа Γ имеется (F, λ) -пропагатор относительно v с конечным носителем или, другими словами, $\delta_v \in (A_{\Gamma, F} - \lambda E)(F^{V(\Gamma)*})$. Через $L_{F, \lambda}(\Gamma)$ будем обозначать множество всех (F, λ) -локальных вершин графа Γ . (Таким образом, условие, что $A_{\Gamma, F} - \lambda E$ отображает $F^{V(\Gamma)*}$ сюръективно на себя, также как и условие наличия в $M_{V(\Gamma) \times V(\Gamma)}^{rcf}(F)$ обратной для $A_{\Gamma, F} - \lambda E$ матрицы, эквивалентно условию $L_{F, \lambda}(\Gamma) = V(\Gamma)$.) Ясно, что множество $L_{F, \lambda}(\Gamma)$ является $Aut(\Gamma)$ -инвариантным, а из утверждения 2) предложения 4.1 следует, что $L_{F, \lambda}(\Gamma) = L_{F', \lambda}(\Gamma)$ для произвольного расширения F' (с произвольным абсолютным значением) поля $F_0(\lambda)$, где F_0 — простое подполе поля F . Ниже (см. теорему 4.2) будет доказано, что $L_{F, \lambda}(\Gamma)$ есть в точности дополнение в $V(\Gamma)$ объединения всех носителей собственных функций оператора $A_{\Gamma, F}$, соответствующих собственному значению λ . (Таким образом, окажется, что $L_{F, \lambda}(\Gamma)$ есть в точности множество тех вершин v графа Γ , для которых в соответствии с предложением 3.2 определено число $r_{\lambda, v}$.)

В случае конечного графа Γ очевидным образом справедливо разбиение $V(\Gamma) = S_{F, \lambda}(\Gamma) \cup L_{F, \lambda}(\Gamma)$, причем $L_{F, \lambda}(\Gamma) \neq V(\Gamma)$ тогда и только тогда, когда λ принадлежит спектру графа Γ над F .

Для дальнейшего полезно сделать несколько по существу тривиальных наблюдений относительно собственных функций матрично записанного оператора смежности локально конечного графа. Пусть Γ — локально конечный граф, F — поле с абсолютным значением $|\cdot|_v$ и $\lambda \in F$. Для $u \in V(\Gamma)$ (в соответствии с § 2) полагаем $\alpha_u := (\sum_{u' \in \Gamma(u)} \delta_{u'}) - \lambda \delta_u$. Пусть, кроме того, α_u , где $u \in V(\Gamma)$, — столбец матрицы $A_{\Gamma, F} - \lambda E$, соответствующий u . (Таким образом, α_u^t — строка матрицы $A_{\Gamma, F} - \lambda E$, соответствующая u .) Ясно, что элемент столбца α_u , стоящий в строке, соответствующей $v \in V(\Gamma)$, равен $\alpha_u(v)$. Далее, в силу $A_{\Gamma, F} - \lambda E \in M_{V(\Gamma) \times V(\Gamma)}^{rcf}(F)$ для произвольной функции $f \in F^{V(\Gamma)}$ естественным образом корректно определен столбец $\sum_{u \in V(\Gamma)} f(u) \alpha_u$. При этом f тогда

и только тогда является собственной функцией оператора $A_{\Gamma, F}$, соответствующей собственному значению λ , когда f — ненулевая функция со свойством $\sum_{u \in V(\Gamma)} f(u) \alpha_u = \mathbf{0}$, где $\mathbf{0}$ — нулевой столбец. (Аналогично, f тогда и только тогда является (F, λ) -пропагатором графа Γ относительно его вершины v , когда $\sum_{u \in V(\Gamma)} f(u) \alpha_u = \delta_v$, где δ_v — столбец, у которого на месте, соответствующем вершине v , стоит 1, а на остальных местах стоят нули.) В частности, если X — конечное подмножество множества $V(\Gamma)$ и v — некоторая вершина из X , то наличие у оператора $A_{\Gamma, F}$ собственной функции, соответствующей собственному значению λ , носитель которой содержится в X и содержит v , эквивалентно тому, что столбец α_v равен линейной комбинации (с коэффициентами из F) столбцов α_u , $u \in X \setminus \{v\}$, или, равносильно, что функция α_v равна линейной комбинации (с коэффициентами из F) функций α_u , $u \in X \setminus \{v\}$.

ПРЕДЛОЖЕНИЕ 4.7. Пусть Γ — локально конечный граф, F — поле с абсолютным значением $|\cdot|_v$ и $\lambda \in F$. Тогда для конечного подмножества X множества $V(\Gamma)$ и $v \in X$ следующие условия (i) и (ii) равносильны:

(i) У оператора $A_{\Gamma, F}$ имеется такая собственная функция f , соответствующая собственному значению λ , что носитель f содержится в X и содержит v .

(ii) Не существует $f' \in F^{V(\Gamma)}$ такой, что $((A_{\Gamma, F} - \lambda E)(f'))(v) = 1$ и $((A_{\Gamma, F} - \lambda E)(f'))(u) = 0$ для всех $u \in X \setminus \{v\}$.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Для произвольных $u_1, u_2 \in V(\Gamma)$ пусть $\alpha_{u_1, u_2} = \alpha_{u_2}(u_1)$ — элемент матрицы $A_{\Gamma, F} - \lambda E$, стоящий на пересечении строки, соответствующей u_1 , и столбца, соответствующего u_2 . (При этом $\alpha_{u_1, u_2} = \alpha_{u_2, u_1}$ в силу симметричности матрицы $A_{\Gamma, F} - \lambda E$.)

Предположим, что имеет место (i), но существует функция $f' \in F^{V(\Gamma)}$ такая, что $((A_{\Gamma, F} - \lambda E)(f'))(v) = 1$ и $((A_{\Gamma, F} - \lambda E)(f'))(u) = 0$ для всех $u \in X \setminus \{v\}$. Не теряя общности, будем считать, что носитель f' содержится в $X \cup \Gamma(X)$ (и следовательно, носители функций f и f' конечны). Тогда, с одной стороны,

$$\sum_{u_1, u_2 \in V(\Gamma)} f'(u_1) \alpha_{u_1, u_2} f(u_2) = \sum_{u_1 \in V(\Gamma)} f'(u_1) \left(\sum_{u_2 \in V(\Gamma)} \alpha_{u_1, u_2} f(u_2) \right) = 0. \quad (4.1)$$

Но, с другой стороны,

$$\begin{aligned} \sum_{u_1, u_2 \in V(\Gamma)} f'(u_1) \alpha_{u_1, u_2} f(u_2) &= \sum_{u_2 \in V(\Gamma)} f(u_2) \left(\sum_{u_1 \in V(\Gamma)} \alpha_{u_1, u_2} f'(u_1) \right) \\ &= \sum_{u_2 \in X} f(u_2) \left(\sum_{u_1 \in X \cup \Gamma(X)} \alpha_{u_1, u_2} f'(u_1) \right) = \sum_{u_2 \in X} f(u_2) \left(\sum_{u_1 \in X \cup \Gamma(X)} \alpha_{u_2, u_1} f'(u_1) \right) \\ &= f(v) \neq 0. \end{aligned}$$

Таким образом, (i) влечет (ii).

Докажем, что (ii) влечет (i). Если функция $\alpha_v \in F^{V(\Gamma)}$ принадлежит линейной оболочке в $F^{V(\Gamma)}$ функций α_u , $u \in X \setminus \{v\}$, то, как было отмечено непосредственно перед формулировкой предложения, имеет место (i). Предположим поэтому, что имеет место (ii), но функция α_v не принадлежит линейной оболочке в $F^{V(\Gamma)}$ функций α_u , $u \in X \setminus \{v\}$. Тогда на содержащем α_u , $u \in X$,

подпространстве $\langle \delta_u : u \in X \cup \Gamma(X) \rangle$ векторного пространства $F^{V(\Gamma)}$ найдется такой линейный функционал χ , что $\chi(\alpha_v) = 1$ и $\chi(\alpha_u) = 0$ для всех $u \in X \setminus \{v\}$. Определим $f'' \in F^{V(\Gamma)}$, полагая $f''(u) = \chi(\delta_u)$ для всех $u \in X \cup \Gamma(X)$ и полагая $f''(u) = 0$ для всех $u \in V(\Gamma) \setminus (X \cup \Gamma(X))$. Тогда, как легко видеть, для функции f'' имеем $((A_{\Gamma, F} - \lambda E)(f''))(v) = 1$ и $((A_{\Gamma, F} - \lambda E)(f''))(u) = 0$ для всех $u \in X \setminus \{v\}$. Полученное противоречие со сделанным предположением о том, что имеет место (ii), завершает доказательство предложения.

Следующее предложение в определенном смысле дуально предложению 4.7.

ПРЕДЛОЖЕНИЕ 4.8. Пусть Γ — локально конечный граф, F — поле с абсолютным значением $|\cdot|_v$ и $\lambda \in F$. Тогда для конечного подмножества X множества $V(\Gamma)$ и $v \in X$ следующие условия (i) и (ii) равносильны:

- (i) Не существует $f \in F^{V(\Gamma)}$ такой, что v принадлежит носителю f и $((A_{\Gamma, F} - \lambda E)(f))(u) = 0$ для всех $u \in X$.
- (ii) У графа Γ относительно вершины v имеется такой (F, λ) -пропагатор f' , что носитель f' содержится в X .

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Как и при доказательстве предложения 4.7, для произвольных $u_1, u_2 \in V(\Gamma)$ пусть $\alpha_{u_1, u_2} = \alpha_{u_2}(u_1)$ — элемент матрицы $A_{\Gamma, F} - \lambda E$, стоящий на пересечении строки, соответствующей u_1 , и столбца, соответствующего u_2 .

Предположим, что имеет место (ii), но существует функция $f \in F^{V(\Gamma)}$ такая, что $f(v) \neq 0$ и $((A_{\Gamma, F} - \lambda E)(f))(u) = 0$ для всех $u \in X$. При этом, не теряя общности, будем считать, что носитель f содержится в $X \cup \Gamma(X)$ (и следовательно, носители функций f и f' конечны). Тогда, как легко убедиться, для f и f' , с одной стороны, сохраняет силу (4.1), а с другой стороны,

$$\begin{aligned} \sum_{u_1, u_2 \in V(\Gamma)} f'(u_1) \alpha_{u_1, u_2} f(u_2) &= \sum_{u_1 \in X, u_2 \in X \cup \Gamma(X)} f'(u_1) \alpha_{u_1, u_2} f(u_2) \\ &= \sum_{u_2 \in X \cup \Gamma(X)} f(u_2) \left(\sum_{u_1 \in X} \alpha_{u_1, u_2} f'(u_1) \right) = \sum_{u_2 \in X \cup \Gamma(X)} f(u_2) \left(\sum_{u_1 \in V(\Gamma)} \alpha_{u_1, u_2} f'(u_1) \right) \\ &= \sum_{u_2 \in X \cup \Gamma(X)} f(u_2) \left(\sum_{u_1 \in V(\Gamma)} \alpha_{u_2, u_1} f'(u_1) \right) = f(v) \neq 0. \end{aligned}$$

Полученное противоречие означает, что (ii) влечет (i).

Докажем, что (i) влечет (ii). Условие (ii) эквивалентно условию, что δ_v принадлежит линейной оболочке в $F^{V(\Gamma)}$ функций α_u , $u \in X$. Предположим, что имеет место (i), но функция δ_v не принадлежит линейной оболочке в $F^{V(\Gamma)}$ функций α_u , $u \in X$. Тогда на содержащем α_u , $u \in X$, подпространстве $\langle \delta_u : u \in X \cup \Gamma(X) \rangle$ векторного пространства $F^{V(\Gamma)}$ найдется такой линейный функционал χ , что $\chi(\delta_v) = 1$ и $\chi(\alpha_u) = 0$ для всех $u \in X$. Определим $f'' \in F^{V(\Gamma)}$, полагая $f''(u) = \chi(\delta_u)$ для всех $u \in X \cup \Gamma(X)$ и полагая $f''(u) = 0$ для всех $u \in V(\Gamma) \setminus (X \cup \Gamma(X))$. Тогда, как легко видеть, для функции f'' имеем $f''(v) = 1$ и $((A_{\Gamma, F} - \lambda E)(f''))(u) = 0$ для всех $u \in X$. Полученное противоречие со сделанным предположением о том, что имеет место (i), завершает доказательство предложения.

Из предложения 4.7 и теоремы Теплица (см. предложение 2.2) вытекает справедливость следующего утверждения.

ТЕОРЕМА 4.1. Пусть Γ — локально конечный граф, F — поле с абсолютным значением $|\cdot|_v$ и $\lambda \in F$. Тогда для $v \in V(\Gamma)$ следующие условия (i) и (ii) эквивалентны:

(i) У оператора $A_{\Gamma, F}$ имеется собственная функция, соответствующая собственному значению λ , носитель которой конечен и содержит v .

(ii) У графа Γ отсутствуют (F, λ) -пропагаторы относительно вершины v . Другими словами, $v \in S_{F, \lambda}(\Gamma)$.

СЛЕДСТВИЕ 4.1. Пусть Γ — локально конечный граф, F — поле с абсолютным значением $|\cdot|_v$ и $\lambda \in F$. Тогда множество $S_{F, \lambda}(\Gamma)$ совпадает с объединением всех конечных носителей собственных функций оператора $A_{\Gamma, F}$, соответствующих собственному значению λ .

СЛЕДСТВИЕ 4.2. Пусть Γ — локально конечный граф, F — поле с абсолютным значением $|\cdot|_v$, F_0 — простое подполе поля F и $\lambda \in F$. Пусть, кроме того, $v \in S_{F, \lambda}(\Gamma)$. Тогда справедливы следующие утверждения:

1) Найдется такое конечное содержащее v подмножество X множества $V(\Gamma)$, что порожденный X подграф $\langle X \rangle_\Gamma$ графа Γ связан, а λ является собственным значением матрицы смежности графа $\langle X \rangle_\Gamma$ над F , причем имеется соответствующая λ собственная функция матрицы смежности графа $\langle X \rangle_\Gamma$ над F , содержащаяся в $(F_0(\lambda))^X$, носитель которой равен X . Кроме того, найдется такое конечное содержащее X подмножество Y множества $V(\Gamma)$, что порожденный Y подграф $\langle Y \rangle_{\Gamma^2}$ графа Γ^2 связан, а λ является собственным значением матрицы смежности графа $\langle Z \rangle_\Gamma$ над F для любого содержащего Y конечного подмножества Z множества $V(\Gamma)$, причем имеется соответствующая λ собственная функция матрицы смежности графа $\langle Z \rangle_\Gamma$ над F , содержащаяся в $(F_0(\lambda))^Z$, носитель которой равен Y . В частности, λ — алгебраический элемент над F_0 (и поле $F_0(\lambda)$ конечно в случае поля F положительной характеристики).

2) Если F — поле характеристики 0 (т. е. $F_0 = \mathbb{Q}$), а X — такое, как в 1), то λ — корень унитарного многочлена из $\mathbb{Z}[x]$ степени $|X|$, все корни которого вещественны и не превосходят по (обычной на $\mathbb{R}$) абсолютной величине максимума степеней вершин графа $\langle X \rangle_\Gamma$ (и не превосходят максимума степеней в графе Γ вершин из X , причем достигает этого максимума лишь в случае, когда X — содержащая v связная компонента графа Γ и $\langle X \rangle_\Gamma$ — (конечный) регулярный граф).

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Легко убедиться, что в качестве X и Y в 1) можно взять содержащую v соответственно связную компоненту и Γ^2 -связную компоненту содержащего v конечного носителя собственной функции оператора $A_{\Gamma, F_0(\lambda)}$, соответствующей собственному значению λ , существование которого вытекает из теоремы 4.1 (в которой в качестве F следует взять $F_0(\lambda)$). Утверждение 2) следствия вытекает из утверждения 1) и хорошо известных свойств спектров конечных графов.

ЗАМЕЧАНИЕ 4.3. Пусть Γ — локально конечный граф, F — поле положительной характеристики с абсолютным значением $|\cdot|_v$, F_0 — простое подполе

поля F и $v \in V(\Gamma)$. Тогда для $\lambda \in F$ отсутствие (F, λ) -пропагатора графа Γ относительно v (влекущее согласно утверждению 1) следствия 4.2 алгебраичность λ над F_0) эквивалентно (см. утверждение 2) предложения 4.1) отсутствию $(F_0(\lambda), \lambda)$ -пропагатора графа Γ относительно v (где $F_0(\lambda)$ — конечное поле), а также эквивалентно (см. теорему 4.1) принадлежности v конечному носителю собственной функции оператора смежности $A_{\Gamma, F_0(\lambda)}$ (где $F_0(\lambda)$ — конечное поле), соответствующей собственному значению λ .

Подобно тому, как предложение 4.7 и теорема Теплица (см. предложение 2.2) влекут теорему 4.1, предложение 4.8 и теорема Теплица (см. предложение 2.2) влекут следующую важную для дальнейшего теорему (в определенном смысле дуальную теореме 4.1).

ТЕОРЕМА 4.2. Пусть Γ — локально конечный граф, F — поле с абсолютным значением $|\cdot|_v$ и $\lambda \in F$. Тогда для $v \in V(\Gamma)$ следующие условия (i) и (ii) равносильны:

(i) Вершина v не принадлежит носителю никакой собственной функции оператора $A_{\Gamma, F}$, соответствующей собственному значению λ .

(ii) У графа Γ относительно вершины v имеется (F, λ) -пропагатор с конечным носителем. Другими словами, $v \in L_{F, \lambda}(\Gamma)$.

§ 5. Инъективность и ряд других свойств операторов $A_{\Gamma, F} - \lambda E$ в терминах пропагаторов

В этом параграфе будет показано, что для локально конечного графа Γ , поля F с абсолютным значением $|\cdot|_v$ и $\lambda \in F$ ряд важных свойств оператора $A_{\Gamma, F} - \lambda E$ может быть естественным образом сформулировано в терминах (F, λ) -пропагаторов графа Γ относительно его вершин. Что важно, в этом и следующих параграфах будет показана продуктивность такой переформулировки.

Согласно теореме 4.1 для локально конечного графа Γ , поля F с некоторым абсолютным значением $|\cdot|_v$ и $\lambda \in F$ условие $S_{F, \lambda}(\Gamma) \neq \emptyset$ равносильно условию существования у оператора $A_{\Gamma, F}$ собственной функции, соответствующей собственному значению λ , с конечным носителем или, другими словами, условию, что ограничение оператора $A_{\Gamma, F} - \lambda E$ на $F^{V(\Gamma)*}$ не является инъективным оператором. Таким образом, с учетом сказанного в начале предыдущего параграфа (после доказательства предложения 4.1), а также следствия 2.1 получаем, что справедлива

ТЕОРЕМА 5.1. Пусть Γ — локально конечный граф, F — поле с абсолютным значением $|\cdot|_v$ и $\lambda \in F$. Тогда следующие условия (i) — (v) равносильны:

(i) Оператор $A_{\Gamma, F} - \lambda E$ сюръективен.

(ii) Матрица $\mathbf{A}_{\Gamma, F} - \lambda E$ имеет в $M_{V(\Gamma) \times V(\Gamma)}(F)$ правую обратную матрицу или левую обратную матрицу (а следовательно, имеет также взаимно транспонированные правую обратную матрицу и левую обратную матрицу).

(iii) $S_{F, \lambda}(\Gamma) = \emptyset$.

(iv) Оператор $A_{\Gamma, F} - \lambda E$ отображает подпространство $F^{V(\Gamma)*}$ пространства $F^{V(\Gamma)}$ инъективно в себя (или, другими словами, у оператора $A_{\Gamma, F}$ отсутствуют собственные функции, соответствующие собственному значению λ , с конечным носителем).

(v) $F^{V(\Gamma)*} \subseteq (A_{\Gamma, F} - \lambda E)(F^{V(\Gamma)})$.

Далее, очевидным следствием теоремы 4.1 является

ПРЕДЛОЖЕНИЕ 5.1. Пусть Γ — локально конечный граф, F — поле с абсолютным значением $|\cdot|_v$ и $\lambda \in F$. Множество $S_{F, \lambda}(\Gamma)$ конечно тогда и только тогда, когда собственные функции оператора $A_{\Gamma, F}$, соответствующие собственному значению λ и имеющие конечный носитель, образуют конечномерное подпространство пространства $F^{V(\Gamma)}$.

Кроме того, из теоремы 4.1 и предложения 3.5 вытекает

ПРЕДЛОЖЕНИЕ 5.2. Пусть Γ — локально конечный граф, F — поле с абсолютным значением $|\cdot|_v$ и $\lambda \in F$. Если множество $S_{F, \lambda}(\Gamma)$ бесконечно, то у оператора $A_{\Gamma, F}$ имеется собственная функция, соответствующая собственному значению λ , с бесконечным носителем, содержащимся в $S_{F, \lambda}(\Gamma)$.

ЗАМЕЧАНИЕ 5.1. Из теоремы 4.1 и предложения 5.2 легко следует, что для локально конечного графа Γ , поля F с абсолютным значением $|\cdot|_v$ и $\lambda \in F$ бесконечность $S_{F, \lambda}(\Gamma)$ влечет принадлежность каждой вершины из $S_{F, \lambda}(\Gamma)$ бесконечному содержащемуся в $S_{F, \lambda}(\Gamma)$ носителю собственной функции оператора $A_{\Gamma, F}$, соответствующей собственному значению λ . (Действительно, согласно теореме 4.1 каждая вершина v из $S_{F, \lambda}(\Gamma)$ принадлежит содержащемуся в $S_{F, \lambda}(\Gamma)$ конечному носителю некоторой собственной функции f_1 оператора $A_{\Gamma, F}$, соответствующей собственному значению λ . Кроме того, согласно предложению 5.2 имеется собственная функция f_2 оператора $A_{\Gamma, F}$, соответствующая собственному значению λ , с бесконечным содержащимся в $S_{F, \lambda}(\Gamma)$ носителем. Если v принадлежит носителю f_2 , то f_2 — требуемая функция. Если же v не принадлежит носителю f_2 , то $f_1 + f_2$ — требуемая функция.)

ЗАМЕЧАНИЕ 5.2. Отметим еще одно следствие теоремы 4.1: если Γ — локально конечный граф, F — поле с абсолютным значением $|\cdot|_v$ и $\lambda \in F$, то $S_{F, \lambda}(\Gamma)$ не имеет одноэлементных компонент связности при $\lambda \neq 0$ и не имеет одноэлементных компонент Γ^2 -связности при $\lambda = 0$ и отсутствии у Γ одноэлементных компонент связности.

Доказательство следующей теоремы во многом близко к доказательству теоремы 3 из [9].

ТЕОРЕМА 5.2. Пусть Γ — локально конечный граф, F — поле с абсолютным значением $|\cdot|_v$ и $\lambda \in F$. Если у графа Γ относительно некоторой его вершины v имеется (F, λ) -пропагатор с бесконечным носителем, то у оператора $A_{\Gamma, F}$ имеется собственная функция f , соответствующая собственному значению λ , с бесконечным носителем. Если, кроме того, у Γ относительно v отсутствуют (F, λ) -пропагаторы с конечным носителем (или, другими словами, $v \notin L_{F, \lambda}(\Gamma)$), то f можно выбрать с дополнительным свойством, что носитель f содержит v .

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Заметим, что второе утверждение теоремы следует из ее первого утверждения и теоремы 4.2. Действительно, в предположениях второго утверждения теоремы при справедливости ее первого утверждения у оператора $A_{\Gamma, F}$ имеется собственная функция f_1 , соответствующая собственному значению λ , с бесконечным носителем, а из $v \notin L_{F, \lambda}(\Gamma)$ согласно теореме 4.2 следует существование у оператора $A_{\Gamma, F}$ собственной функции f_2 , соответствующей собственному значению λ , носитель которой содержит v . Ясно, что среди функций $f_1, f_2, f_1 + f_2$ имеется функция с бесконечным носителем, содержащим v , которую и можно взять в качестве f во втором утверждении теоремы.

Итак, остается доказать первое утверждение теоремы. Пусть у графа Γ относительно его вершины v имеется (F, λ) -пропагатор p_v с бесконечным носителем. Если у графа Γ относительно вершины v имеется также (F, λ) -пропагатор с конечным носителем, то разность p_v и этого пропагатора есть, очевидно, собственная функция оператора $A_{\Gamma, F}$, соответствующая собственному значению λ , с бесконечным носителем. Будем поэтому предполагать, что у графа Γ относительно вершины v отсутствуют (F, λ) -пропагаторы с конечным носителем. Обозначая для каждой вершины u графа Γ через α_u столбец матрицы $A_{\Gamma, F} - \lambda E$, соответствующий u , последнее условие, как легко понять, можно переформулировать следующим образом: для произвольного конечного подмножества U множества $V(\Gamma)$ линейная оболочка множества $\{\alpha_u : u \in U\}$ в векторном пространстве над F столбцов не содержит столбец δ_v (у которого на месте, соответствующем вершине v стоит 1, а на остальных местах стоят нули). Другими словами, для произвольного конечного подмножества U множества $V(\Gamma)$ система линейных уравнений (над F с неизвестными $x_u, u \in U$), определяемая посредством

$$\sum_{u \in U} x_u \alpha_u = \delta_v,$$

не имеет решений в F , что согласно теореме Теплица (см. предложение 2.1) означает наличие такого конечного подмножества U' множества $V(\Gamma)$ и таких $b_{u'} \in F$, где $u' \in U'$, что, с одной стороны,

$$\sum_{u' \in U'} b_{u'} \alpha_{u', u} = 0 \quad (5.1)$$

для каждой вершины $u \in U$, где $\alpha_{u', u}, u' \in U'$, — элемент столбца $\alpha_{u'}$ в строке, соответствующей вершине u' , но, с другой стороны,

$$\sum_{u' \in U'} b_{u'} \delta_{u', v} \neq 0, \quad (5.2)$$

где $\delta_{u', v} = 0$ при $u' \neq v$ и $\delta_{v, v} = 1$ при $v \in U'$. В силу (5.2) имеем $v \in U'$ и $b_v \neq 0$, а потому согласно (5.1) строка, соответствующая вершине v , $V(\Gamma) \times U$ -подматрицы матрицы $A_{\Gamma, F} - \lambda E$ является линейной комбинацией других строк этой подматрицы. Ввиду симметричности матрицы $A_{\Gamma, F} - \lambda E$ это также означает, что столбец, соответствующий вершине v , $U \times V(\Gamma)$ -подматрицы матрицы $A_{\Gamma, F} - \lambda E$ является линейной комбинацией других столбцов этой подматрицы. С учетом произвольности выбора конечного подмножества U множества $V(\Gamma)$ отсюда следует, что каждая конечная подсистема системы линейных

уравнений (над F с неизвестными y_u , $u \in V(\Gamma) \setminus \{v\}$), определяемой посредством

$$\sum_{u \in V(\Gamma) \setminus \{v\}} y_u \alpha_u = \alpha_v, \quad (5.3)$$

разрешима в F , откуда согласно теореме Теплица (см. предложение 2.2) вытекает разрешимость в F этой системы линейных уравнений.

Пусть $y'_u \in F$, $u \in V(\Gamma) \setminus \{v\}$, — некоторое решение в F системы линейных уравнений, задаваемой посредством (5.3). Тогда функция $f \in F^{V(\Gamma)}$, определяемая посредством $f(v) = 1$ и $f(u) = -y'_u$ для всех $u \in V(\Gamma) \setminus \{v\}$, есть собственная функция оператора $A_{\Gamma, F}$, соответствующая собственному значению λ . Для завершения доказательства теоремы 5.2 остается заметить, что носитель функции f бесконечен в силу теоремы 4.1, так как у графа Γ относительно вершины v имеется (F, λ) -пропагатор p_v .

Поскольку для локально конечного графа Γ , поля F с абсолютным значением $|\cdot|_v$ и $\lambda \in F$ из наличия у оператора $A_{\Gamma, F}$ собственной функции, соответствующей собственному значению λ , с бесконечным носителем вытекает наличие у Γ относительно произвольной содержащейся в $V(\Gamma) \setminus S_{F, \lambda}(\Gamma)$ вершины (F, λ) -пропагатора с бесконечным носителем, то теорема 5.2 с учетом следствия 4.1 влечет

СЛЕДСТВИЕ 5.1. Пусть Γ — локально конечный граф, F — поле с абсолютным значением $|\cdot|_v$ и $\lambda \in F$. Если все (F, λ) -пропагаторы графа Γ относительно некоторой вершины из $V(\Gamma) \setminus S_{F, \lambda}(\Gamma)$ имеют конечные носители, то все (F, λ) -пропагаторы графа Γ относительно любой вершины из $V(\Gamma) \setminus S_{F, \lambda}(\Gamma)$ имеют конечные носители, причем все (F, λ) -пропагаторы графа Γ относительно любой фиксированной вершины из $V(\Gamma) \setminus S_{F, \lambda}(\Gamma)$ имеют одно и то же ограничение на $V(\Gamma) \setminus S_{F, \lambda}(\Gamma)$.

Следующая теорема дает для локально конечного графа Γ , поля F с произвольным абсолютным значением $|\cdot|_v$ и $\lambda \in F$ несколько характеристик, включая характеристики в терминах (F, λ) -пропагаторов графа Γ , свойства инъективности оператора $A_{\Gamma, F} - \lambda E$ или, другими словами, свойства λ не быть собственным значением оператора смежности $A_{\Gamma, F}$.

ТЕОРЕМА 5.3. Пусть Γ — локально конечный граф, F — поле с абсолютным значением $|\cdot|_v$ и $\lambda \in F$. Тогда следующие условия (i) — (viii) равносильны:

(i) Элемент λ не является собственным значением оператора смежности $A_{\Gamma, F}$ графа Γ , или, другими словами, оператор $A_{\Gamma, F} - \lambda E$ инъективен.

(ii) Оператор $A_{\Gamma, F} - \lambda E$ биективен.

(iii) У графа Γ относительно некоторой его вершины имеется единственный (F, λ) -пропагатор.

(iv) $L_{F, \lambda}(\Gamma) = V(\Gamma)$.

(v) У графа Γ относительно каждой его вершины v имеется единственный (F, λ) -пропагатор p_v и этот пропагатор имеет конечный носитель, причем для произвольных $v_1, v_2 \in V(\Gamma)$ имеет место равенство $p_{v_1}(v_2) = p_{v_2}(v_1)$ (в частности, каждая вершина графа Γ принадлежит лишь конечному числу носителей пропагаторов p_u , $u \in V(\Gamma)$).

(vi) Матрица $A_{\Gamma, F} - \lambda E$ имеет в алгебре $M_{V(\Gamma) \times V(\Gamma)}^{rcf}(F)$ обратную (симметрическую) матрицу.

(vii) Оператор $A_{\Gamma, F} - \lambda E$ отображает подпространство $F^{V(\Gamma)*}$ пространства $F^{V(\Gamma)}$ сюръективно на себя.

(viii) Оператор $A_{\Gamma, F} - \lambda E$ отображает подпространство $F^{V(\Gamma)*}$ пространства $F^{V(\Gamma)}$ биективно на себя.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Очевидно, что условие (v) влечет условие (iv), а условие (vi) влечет условие (v). Таким образом, для доказательства теоремы достаточно доказать равносильность условий (i), (ii), (iii), (iv), (vi), (vii), (viii), что и делается далее.

Предположим, что имеет место (iv). Тогда у графа Γ относительно каждой его вершины u имеется (F, λ) -пропагатор p_u с конечным носителем. Пусть P — матрица из $M_{V(\Gamma) \times V(\Gamma)}^{cf}(F)$, у которой для любых $u_1, u_2 \in V(\Gamma)$ элемент на пересечении строки, соответствующей u_1 , и столбца, соответствующего u_2 , равен $p_{u_2}(u_1)$. Тогда $(A_{\Gamma, F} - \lambda E)P = E$ и (с учетом симметричности матрицы $A_{\Gamma, F}$) также $P^t(A_{\Gamma, F} - \lambda E) = E$. Отсюда (с учетом $A_{\Gamma, F} - \lambda E \in M_{V(\Gamma) \times V(\Gamma)}^{rcf}(F)$) следует

$$P = (P^t(A_{\Gamma, F} - \lambda E))P = P^t((A_{\Gamma, F} - \lambda E)P) = P^t.$$

Таким образом, P — симметрическая обратная в алгебре $M_{V(\Gamma) \times V(\Gamma)}^{rcf}(F)$ к $A_{\Gamma, F} - \lambda E$ матрица. Итак, из (iv) следует (vi). Поскольку условие (vi) влечет очевидным образом условие (iv), заключаем, что условия (iv) и (vi) равносильны.

Далее, очевидно, что условие (iv) равносильно условию (vii), которое следует из условия (viii). Очевидно также, что условие (vi) влечет условия (ii), (iii), (viii), а каждое из условий (ii) и (iii) влечет условие (i).

Таким образом, для завершения доказательства теоремы 5.3 достаточно показать, что из условия (i) следует условие (iv). Но это вытекает из теоремы 4.2.

ЗАМЕЧАНИЕ 5.3. При выполнении эквивалентных условий (i) — (viii) обратный к $A_{\Gamma, F} - \lambda E$ оператор непрерывен. Это следует, например, из (vi).

Для локально конечного графа Γ , поля F с абсолютным значением $|\cdot|_v$ и $\lambda \in F$ ослаблением условия инъективности оператора $A_{\Gamma, F} - \lambda E$ является не только условие отсутствия у оператора $A_{\Gamma, F}$ собственной функции, соответствующей собственному значению λ , с конечным носителем (и равносильные ему условия (i) — (v) из теоремы 5.1), но и условие отсутствия у оператора $A_{\Gamma, F}$ собственной функции, соответствующей собственному значению λ , с бесконечным носителем (образно выражаясь, условие “отсутствия коллапса” функций с бесконечным носителем). Как показывает следующая теорема, последнее условие равносильно условию отсутствия в $F^{V(\Gamma)}$ функции с бесконечным носителем, образ которой под действием оператора $A_{\Gamma, F} - \lambda E$ имеет конечный носитель, и оба эти условия равносильны условию, естественным образом формулируемому в терминах (F, λ) -пропагаторов графа Γ .

ТЕОРЕМА 5.4. Пусть Γ — локально конечный граф, F — поле с абсолютным значением $|\cdot|_v$ и $\lambda \in F$. Тогда следующие условия (i) — (iii) равносильны:

(i) У оператора $A_{\Gamma, F}$ отсутствуют собственные функции, соответствующие собственному значению λ , с бесконечным носителем.

(ii) Оператор $A_{\Gamma, F} - \lambda E$ отображает каждую функцию из $F^{V(\Gamma)}$ с бесконечным носителем в функцию также с бесконечным носителем.

(iii) Множество $S_{F, \lambda}(\Gamma)$ конечно, а относительно некоторой (или, что согласно следствию 5.1 равносильно, любой) вершины из $V(\Gamma) \setminus S_{F, \lambda}(\Gamma)$ у графа Γ имеются лишь (F, λ) -пропагаторы с конечным носителем.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Очевидным образом (ii) влечет (i). Кроме того, из предложения 5.2 и теоремы 5.2 следует, что (i) влечет (iii). Таким образом, для доказательства теоремы 5.4 остается показать, что (iii) влечет (ii).

Предположим, что имеет место (iii). Если граф Γ конечен, то (ii) выполняется тривиальным образом. Предположим поэтому, что граф Γ бесконечен. Для каждой вершины $u \in V(\Gamma) \setminus S_{F, \lambda}(\Gamma)$ пусть p_u — некоторый (F, λ) -пропагатор с конечным носителем графа Γ относительно u . Заменяя в случае необходимости (F, λ) -пропагатор p_u для $u \in V(\Gamma) \setminus S_{F, \lambda}(\Gamma)$ его ограничением на основную компоненту Γ^2 -связности его расширенного носителя (см. § 4), будем, не теряя общности, предполагать Γ^2 -связность расширенного носителя p_u для каждой вершины $u \in V(\Gamma) \setminus S_{F, \lambda}(\Gamma)$. Из предложения 4.6 следует, что каждая вершина графа Γ принадлежит лишь конечному числу расширенных носителей (F, λ) -пропагаторов p_u , $u \in V(\Gamma) \setminus S_{F, \lambda}(\Gamma)$. (Действительно, если некоторая вершина графа Γ принадлежит бесконечно многим расширенным носителям (F, λ) -пропагаторов p_u , $u \in V(\Gamma) \setminus S_{F, \lambda}(\Gamma)$, то по предложению 4.6 у оператора $A_{\Gamma, F}$ имеется собственная функция, соответствующая собственному значению λ , с бесконечным носителем. Если f — такая функция, то для произвольной вершины $u \in V(\Gamma) \setminus S_{F, \lambda}(\Gamma)$ функция $p_u + f$ является (F, λ) -пропагатором с бесконечным носителем графа Γ относительно u , что противоречит (iii).)

Обозначим через $\mathbf{P}$ матрицу из $M_{V(\Gamma) \times V(\Gamma)}^{cf}(F)$, у которой для $u_1, u_2 \in V(\Gamma)$ элемент на пересечении строки, соответствующей u_1 , и столбца, соответствующего u_2 , равен $p_{u_2}(u_1)$ при $u_2 \in V(\Gamma) \setminus S_{F, \lambda}(\Gamma)$ и равен δ_{u_1, u_2} при $u_2 \in S_{F, \lambda}(\Gamma)$ (где $\delta_{u_1, u_2} = 1$, если $u_1 = u_2$, и $\delta_{u_1, u_2} = 0$, если $u_1 \neq u_2$). Поскольку каждая вершина графа Γ принадлежит лишь конечному числу носителей функций p_u , $u \in V(\Gamma) \setminus S_{F, \lambda}(\Gamma)$, то $\mathbf{P}$, а следовательно, и $\mathbf{P}^t$ принадлежат $M_{V(\Gamma) \times V(\Gamma)}^{rcf}(F)$. Далее, у матрицы $\mathbf{P}^t(\mathbf{A}_{\Gamma, F} - \lambda \mathbf{E})$ ее $(V(\Gamma) \setminus S_{F, \lambda}(\Gamma)) \times V(\Gamma)$ -подматрица совпадает с $(V(\Gamma) \setminus S_{F, \lambda}(\Gamma)) \times V(\Gamma)$ -подматрицей единичной $V(\Gamma) \times V(\Gamma)$ -матрицы, а ее $S_{F, \lambda}(\Gamma) \times V(\Gamma)$ -подматрица совпадает с $S_{F, \lambda}(\Gamma) \times V(\Gamma)$ -подматрицей матрицы $\mathbf{A}_{\Gamma, F} - \lambda \mathbf{E}$. Поэтому (с учетом конечности $S_{F, \lambda}(\Gamma)$) для любой функции $f \in F^{V(\Gamma)}$ с бесконечным носителем, обозначая через $\mathbf{f}$ столбец (с элементами из F), строки которого соответствуют $V(\Gamma)$, а элемент в строке, соответствующей $u \in V(\Gamma)$, равен $f(u)$, получаем, что столбец $(\mathbf{P}^t(\mathbf{A}_{\Gamma, F} - \lambda \mathbf{E}))\mathbf{f}$ имеет (как и $\mathbf{f}$) бесконечно много ненулевых элементов, что в силу $\mathbf{P}^t \in M_{V(\Gamma) \times V(\Gamma)}^{rcf}(F)$ влечет бесконечность числа ненулевых элементов также у столбца $(\mathbf{A}_{\Gamma, F} - \lambda \mathbf{E})\mathbf{f}$, т. е. бесконечность носителя функции $(A_{\Gamma, F} - \lambda E)(f)$. Таким образом, имеет место (ii).

§ 6. Пропагаторы и суммы по путям

В этом параграфе мы рассматриваем локально конечные *связные* графы. Полученные результаты применимы к компонентам связности произвольных локально конечных графов.

В предыдущих параграфах было показано, что для локально конечного графа Γ и поля F с абсолютным значением $|\cdot|_v$ ряд представляющих интерес свойств оператора смежности $A_{\Gamma, F}$ (и, в частности, свойств его собственных функций) естественным образом формулируется в терминах (F, λ) -пропагаторов графа Γ для $\lambda \in F$. Целесообразность такой переформулировки находит подтверждение в наличии для пропагаторов (в отличие от собственных функций) конструкции их построения, использующей определенные суммы по путям графа, которая описывается (для связных графов) в настоящем параграфе. Суммы по путям и соответствующие производящие функции широко применяются в теории графов (как конечных, см., например, [12], так и бесконечных, например, при исследовании случайных блужданий на них, см. [13]). В описываемой далее конструкции пропагаторы получаются в виде наборов производящих функций определенных сумм по путям, а в случае $F = \mathbb{C}$ также наборов аналитических продолжений этих производящих функций. Прежде, чем перейти к описанию конструкции, напомним, что если Γ — локально конечный связный граф, F — поле с абсолютным значением $|\cdot|_v$ и $\lambda \in F$, то согласно утверждению 2) предложения 3.1 и теореме 5.2 (или теореме 5.3) для доказательства того, что λ — собственное значение оператора смежности $A_{\Gamma, F}$, достаточно доказать существование у Γ относительно какой-либо его вершины (F', λ) -пропагатора с бесконечным носителем для какого-либо расширения F' поля $F_0(\lambda)$, где F_0 — простое подполе поля F , с произвольным абсолютным значением $|\cdot|_{v'}$. Выбор содержащего $F_0(\lambda)$ поля F' “большим” способно облегчить нахождение (F', λ) -пропагатора с бесконечным носителем.

Перейдем к описанию конструкции пропагаторов на основе использования определенных сумм по путям графа.

Пусть Γ — локально конечный связный граф, K — поле и x — независимая переменная над K . Как обычно, для произвольных $v, w \in V(\Gamma)$ производящей функцией над K для числа путей графа Γ , начинающихся в v и заканчивающихся в w , называется определяемый следующим образом элемент K -алгебры $K[[x]]$ формальных степенных рядов от x с коэффициентами из K :

$$W_{\Gamma, K}(x, v, w) := \sum_{n \in \mathbb{Z}_{\geq 0}} (N_{\Gamma}(v, w, n) \cdot 1_K) x^n, \quad (6.1)$$

где, для каждого $n \in \mathbb{Z}_{\geq 0}$, $N_{\Gamma}(v, w, n)$ есть число путей длины n графа Γ , начинающихся в v и заканчивающихся в w (в дальнейшем, полагаясь на контекст, мы иногда будем опускать единичный элемент 1_K поля K в записи $m \cdot 1_K$, где $m \in \mathbb{Z}_{\geq 0}$). Отметим, что

$$W_{\Gamma, K}(x, v, w) = W_{\Gamma, K}(x, w, v). \quad (6.2)$$

K -алгебра $K[[x]]$ формальных степенных рядов от x с коэффициентами из K естественным образом вкладывается в свое поле частных $K((x))$. Для произвольного $v \in V(\Gamma)$ определим элемент $p_{\Gamma, K, x, v} \in K[[x]]^{V(\Gamma)} \subseteq K((x))^{V(\Gamma)}$,

полагая

$$p_{\Gamma, K, x, v}(w) := -xW_{\Gamma, K}(x, v, w) \text{ для всех } w \in V(\Gamma).$$

Для $v, w \in V(\Gamma)$ элемент $W_{\Gamma, K}(x, v, w)$ поля $K((x))$ можно интерпретировать следующим образом: каждому пути графа Γ , начинающемуся в v и заканчивающемуся в w , приписывается вес из $K[[x]]$, равный x в степени длина этого пути, после чего $W_{\Gamma, K}(x, v, w)$ совпадает с суммой (в смысле [14; гл. IV, § 5, п°4]) весов по всем путям графа Γ , начинающимся в v и заканчивающимся в w . С учетом тривиального наблюдения, что для произвольных $v, w \in V(\Gamma)$ и $n \in \mathbb{Z}_{\geq 1}$ в графе Γ путь длины n из v в w есть в точности произведение (т. е. последовательное прохождение) пути длины $n-1$ из v в какую-нибудь вершину из $\Gamma(w)$ и пути длины 1 из этой последней вершины в вершину w , и потому

$$N_{\Gamma}(v, w, n) = \sum_{w' \in \Gamma(w)} N_{\Gamma}(v, w', n-1), \quad (6.3)$$

отсюда вытекает справедливость утверждения 1) следующего предложения 6.1. Справедливость утверждения 2) предложения 6.1 вытекает из (6.2), а справедливость утверждения 3) следует из связности графа Γ .

ПРЕДЛОЖЕНИЕ 6.1. Пусть Γ — локально конечный связный граф, K — поле и x — независимая переменная над K . Снабдим $K((x))$ произвольным абсолютным значением. Тогда (во введенных выше обозначениях) справедливы следующие утверждения:

- 1) Для $v \in V(\Gamma)$ функция $p_{\Gamma, K, x, v} \in K((x))^{V(\Gamma)}$ является $(K((x)), 1/x)$ -пропагатором графа Γ относительно вершины v .
- 2) Для $v, v' \in V(\Gamma)$ имеем $p_{\Gamma, K, x, v}(v') = p_{\Gamma, K, x, v'}(v)$.
- 3) Если K — поле характеристики 0, то для $v \in V(\Gamma)$ носитель $p_{\Gamma, K, x, v}$ совпадает с $V(\Gamma)$.

ЗАМЕЧАНИЕ 6.1. Утверждение 1) предложения 6.1 можно рассматривать как своего рода указание на специфичность случая $\lambda = 0$ при исследовании (F, λ) -пропагаторов локально конечных связных графов Γ .

ЗАМЕЧАНИЕ 6.2. В случае регулярного степени $d \in \mathbb{Z}_{\geq 1}$ связного графа Γ и поля частных $K((x))$ (с произвольным абсолютным значением) K -алгебры $K[[x]]$ формальных степенных рядов от x с коэффициентами из произвольного поля K в роли, аналогичной той, в которой выше для построения значений пропагаторов $p_{\Gamma, K, x, v}(w)$, $v, w \in V(\Gamma)$, использовалась производящая функция

$$W_{\Gamma, K}(x, v, w) = \sum_{n \in \mathbb{Z}_{\geq 0}} N_{\Gamma}(v, w, n) \cdot 1_K x^n,$$

(см. (6.1)), может быть использована производящая функция

$$\widehat{W}_{\Gamma, K}(x, v, w) := \sum_{n \in \mathbb{Z}_{\geq 0}} \widehat{N}_{\Gamma}(v, w, n) \cdot 1_K x^n \in K[[x]],$$

где $v, w \in V(\Gamma)$ и для $n \in \mathbb{Z}_{\geq 0}$ через $\widehat{N}_{\Gamma}(v, w, n)$ обозначается число таких путей $v = u_0, \dots, u_n = w$ графа Γ , что $u_{i-1} \neq u_{i+1}$ для всех $0 < i < n$. В качестве

аналога (6.3) выступает соотношение

$$\widehat{N}_\Gamma(v, w, n) = \left(\sum_{w' \in \Gamma(w)} \widehat{N}_\Gamma(v, w', n-1) \right) - (d-1)\widehat{N}_\Gamma(v, w, n-2),$$

справедливое для всех $v, w \in V(\Gamma)$ и $n \in \mathbb{Z}_{\geq 0}$, кроме случая $v = w \in V(\Gamma)$, $n = 0$ и случая $v = w \in V(\Gamma)$, $n = 2$. С использованием этого соотношения можно показать, что для $v \in V(\Gamma)$ функция $\widehat{p}_{\Gamma, K, x, v} \in K((x))^{V(\Gamma)}$, определяемая посредством

$$\widehat{p}_{\Gamma, K, x, v}(w) = -\frac{x}{1-x^2} \widehat{W}_{\Gamma, K}(x, v, w) \text{ для всех } w \in V(\Gamma),$$

является $(K((x)), (1 + (d-1)x^2)/x)$ -пропагатором графа Γ относительно вершины v .

Однако даже в случае регулярного графа Γ такое использование $\widehat{W}_{\Gamma, K}(x, v, w)$ вместо $W_{\Gamma, K}(x, v, w)$ не представляет интереса в принципиальном плане, поскольку

$$\widehat{W}_{\Gamma, K}(x, v, w) = \frac{1-x^2}{1+(d-1)x^2} W_{\Gamma, K}\left(\frac{x}{1+(d-1)x^2}, v, w\right)$$

(см. [12; с. 72], [15]).

Из утверждения 3) предложения 6.1 с учетом теоремы 5.2 (или теоремы 5.3) и утверждения 2) предложения 3.1 (а также равенства $K(x) = K(1/x)$, где $1/x$ — также независимая переменная над K) вытекает справедливость следующего утверждения. Если Γ — бесконечный локально конечный связный граф и x — независимая переменная над $\mathbb{Q}$, то x является собственным значением оператора смежности $A_{\Gamma, \mathbb{Q}(x)}$ (для произвольного абсолютного значения на поле рациональных функций $\mathbb{Q}(x)$). Отсюда (с учетом утверждения 1) предложения 3.1) вытекает приводимая ниже теорема 6.1. Ее формулировке мы предположим описание контекста, в котором ее естественно рассматривать.

Пусть Γ — бесконечный локально конечный связный граф, F — поле характеристики 0 с произвольным абсолютным значением и $\mathbb{Q}$ — простое подполе поля F . Как было только что доказано, у оператора смежности $A_{\Gamma, \mathbb{Q}(x)}$ имеется собственная функция $f \in \mathbb{Q}(x)^{V(\Gamma)}$, соответствующая собственному значению x . Для каждой вершины w графа Γ элемент $f(w)$ поля $\mathbb{Q}(x)$ однозначно записывается в виде $f_1(w)/f_2(w)$, где $f_1(w) \in \mathbb{Q}[x]$, $0 \neq f_2(w) \in \mathbb{Q}[x]$, старший коэффициент $f_2(w)$ единичен и при этом $\deg(f_1(w))$ и $\deg(f_2(w))$ минимально возможные для таких представлений $f(w)$. Заменяя в случае необходимости f ее произведением на $\text{НОД}(f_2(w) : w \in V(\Gamma)) / \text{НОД}(f_1(w) : w \in V(\Gamma)) \in \mathbb{Q}(x) \setminus \{0\}$, можно при этом предполагать, что $\text{НОД}(f_1(w) : w \in V(\Gamma)) = 1$ и $\text{НОД}(f_2(w) : w \in V(\Gamma)) = 1$. Если λ — такой ненулевой элемент поля F , что $(f_1(w))(\lambda) \neq 0$ для некоторой вершины $w \in V(\Gamma)$ и $(f_2(w))(\lambda) \neq 0$ для всех вершин $w \in V(\Gamma)$ (что имеет место, например, в случае трансцендентного над $\mathbb{Q}$ элемента λ), то функция из $\mathbb{Q}(\lambda)^{V(\Gamma)} \leq F^{V(\Gamma)}$, значение которой в каждой вершине w графа Γ равно значению, принимаемому рациональной функцией $f_1(w)/f_2(w) \in \mathbb{Q}(x)$ при $x = \lambda$, очевидным образом является собственной функцией оператора смежности $A_{\Gamma, \mathbb{Q}(\lambda)}$, соответствующей собственному значению λ . В частности, справедлива следующая

ТЕОРЕМА 6.1. Пусть Γ — бесконечный локально конечный связный граф, F — поле характеристики 0 с произвольным абсолютным значением и λ — элемент поля F , трансцендентный над его простым подполем $\mathbb{Q}$. Тогда λ является собственным значением оператора смежности $A_{\Gamma, \mathbb{Q}(\lambda)}$ (а следовательно, и оператора смежности $A_{\Gamma, F}$).

ЗАМЕЧАНИЕ 6.3. В предположениях теоремы 6.1 ясно, что носители всех соответствующих λ собственных функций оператора смежности $A_{\Gamma, F}$ бесконечны и, более того, имеют лишь бесконечные связные компоненты. (Действительно, λ является собственным значением оператора $A_{\langle X \rangle \Gamma, F}$ для любой связной компоненты X носителя любой собственной функции оператора $A_{\Gamma, F}$, и потому X не может быть конечной ввиду трансцендентности λ над $\mathbb{Q}$.)

ЗАМЕЧАНИЕ 6.4. Вообще говоря, аналог теоремы 6.1 для поля F положительной характеристики не имеет места, см. § 8, раздел 8.1.

Вернемся к исследованию пропагаторов локально конечных связных графов. Из предложения 6.1 и утверждения 2) предложения 4.1 вытекает

ПРЕДЛОЖЕНИЕ 6.2. В обозначениях предложения 6.1 пусть K_0 — простое подполе поля K . Тогда у графа Γ относительно произвольной его вершины v существует $(K_0(x), 1/x)$ -пропагатор с расширенным носителем, содержащимся в расширенном носителе $(K((x)), 1/x)$ -пропагатора $p_{\Gamma, K, x, v}$ графа Γ относительно v .

Пусть Γ — локально конечный связный граф, F — поле с некоторым абсолютным значением, F_0 — простое подполе поля F и x — независимая переменная над F . Согласно предложению 6.2 для любого абсолютного значения на $F(x)$ у графа Γ относительно произвольной его вершины v имеется $(F(x), 1/x)$ -пропагатор $p_v \in F_0(x)^{V(\Gamma)}$. Для каждой вершины w графа Γ элемент $p_v(w)$ поля $F_0(x)$ однозначно записывается в виде $p_{v,1}(w)/p_{v,2}(w)$, где $p_{v,1}(w) \in F_0[x]$, $0 \neq p_{v,2}(w) \in F_0[x]$, старший коэффициент $p_{v,2}(w)$ единичен и при этом $\deg(p_{v,1}(w))$ и $\deg(p_{v,2}(w))$ минимально возможные для таких представлений $p_v(w)$. Если теперь λ — такой ненулевой элемент поля F , что $(p_{v,2}(w))(\lambda) \neq 0$ для всех $w \in V(\Gamma)$ (что имеет место, например, в случае трансцендентного над F_0 элемента λ), то функция из $F_0(\lambda)^{V(\Gamma)} \leq F^{V(\Gamma)}$, значение которой в каждой вершине w графа Γ равно значению, принимаемому рациональной функцией $p_{v,1}(w)/p_{v,2}(w) \in F_0(x)$ при $x = \lambda$, очевидным образом является $(F_0(\lambda), 1/\lambda)$ -пропагатором (а следовательно, и $(F, 1/\lambda)$ -пропагатором) графа Γ относительно вершины v . В частности, мы вновь (см. утверждение 1) следствия 4.2) получаем, что для $\lambda \in F$ отсутствие у графа Γ относительно какой-либо его вершины (F, λ) -пропагатора возможно лишь в случае алгебраического над F_0 элемента λ .

ЗАМЕЧАНИЕ 6.5. Из утверждения 1) предложения 6.1 следует, что если Γ — локально конечный связный граф и F — поле положительной характеристики, полное относительно (обязательно неархимедова) абсолютного значения $|\cdot|_v$, то для $v \in V(\Gamma)$ и $\lambda \in F$ с $|\lambda|_v > 1$ функция $f : V(\Gamma) \rightarrow F$, определяемая

посредством

$$f(w) = -\lambda^{-1} \sum_{n \in \mathbb{Z}_{\geq 0}} (N_{\Gamma}(v, w, n) \cdot 1_F) \lambda^{-n} \text{ для всех } w \in V(\Gamma)$$

(где сумма справа обозначает очевидным образом существующий предел по $|\cdot|_v$ частичных сумм

$$\sum_{0 \leq n \leq n'} (N_{\Gamma}(v, w, n) \cdot 1_F) \lambda^{-n}$$

при $n' \rightarrow \infty$, $n' \in \mathbb{Z}_{\geq 0}$), является (F, λ) -пропагатором графа Γ относительно вершины v . Поскольку при сделанных предположениях элемент λ трансцендентен над простым подполем поля F , то в рассматриваемом случае существование (F, λ) -пропагатора графа Γ относительно v следует из утверждения 1) следствия 4.2, а также из предложения 6.2. Назначение настоящего замечания — предъявить “явный вид” одного из таких (F, λ) -пропагаторов.

В оставшейся части настоящего параграфа мы разовьем изложенный подход к построению пропагаторов локально конечных связных графов в случае поля $F = \mathbb{C}$ с обычным модулем $|\cdot|$ комплексного числа в качестве абсолютного значения, причем особое внимание будет уделено графам с ограниченными в совокупности степенями вершин. Вначале мы приведем для этого случая некоторые простые следствия предыдущих результатов параграфа.

Пусть Γ — локально конечный связный граф и $v \in V(\Gamma)$. Напомним, что для $w \in V(\Gamma)$ через $W_{\Gamma, \mathbb{C}}(x, v, w) \in \mathbb{C}((x))$ обозначается производящая функция над $\mathbb{C}$ для числа путей графа Γ , начинающихся в v и заканчивающихся в w (см. (6.1)). Для $w \in V(\Gamma)$ и $0 \neq \lambda \in \mathbb{C}$ обозначим через $W_{\Gamma, \mathbb{C}}(\lambda^{-1}, v, w)$ сумму ряда, получающегося из $W_{\Gamma, \mathbb{C}}(x, v, w)$ подстановкой λ^{-1} вместо x , если эта сумма определена (т. е. получающийся ряд $\sum_{n \in \mathbb{Z}_{\geq 0}} N_{\Gamma}(v, w, n) \lambda^{-n}$ сходится), и для таких λ положим

$$s_{\Gamma, \lambda, v}(w) := -\lambda^{-1} W_{\Gamma, \mathbb{C}}(\lambda^{-1}, v, w).$$

Заметим, что для $w \in V(\Gamma)$ и $\lambda \in \mathbb{C}$ число $s_{\Gamma, \lambda, v}(w)$ определено тогда и только тогда, когда определено число $s_{\Gamma, \lambda, w}(v)$, и для таких w и λ имеем

$$s_{\Gamma, \lambda, v}(w) = s_{\Gamma, \lambda, w}(v).$$

Обозначим через $D_{\Gamma, v}$ множество таких $0 \neq \lambda \in \mathbb{C}$, что $s_{\Gamma, \lambda, v}(w)$ (или, эквивалентно, $W_{\Gamma, \mathbb{C}}(\lambda^{-1}, v, w)$) определено для всех $w \in V(\Gamma)$. Заметим, что в случае, когда степени вершин графа Γ не превосходят некоторого натурального числа d , для произвольных $w \in V(\Gamma)$, $n \in \mathbb{Z}_{\geq 0}$ имеем, очевидно, $N_{\Gamma}(v, w, n) \leq d^n$, и потому

$$\{c \in \mathbb{C} : |c| > d\} \subseteq D_{\Gamma, v}.$$

Более того, далее будет показано (см. замечание 6.7), что в случае такого графа Γ для произвольных фиксированных $v \in V(\Gamma)$ и $\lambda \in \{c \in \mathbb{C} : |c| > d\}$ сумма

$$\sum_{w \in V(\Gamma)} |s_{\Gamma, \lambda, v}(w)|^2$$

конечна. Очевидно, что при $|V(\Gamma)| > 1$ из $\lambda \in D_{\Gamma,v}$ и $\lambda \in \mathbb{R}_{>0}$ следует $\lambda > 1$.

В следующих предложениях 6.3 и 6.4 собраны несколько простых утверждений (некоторые из которых используются в дальнейшем) относительно $s_{\Gamma,\lambda,v}(w)$ как функции аргумента $w \in V(\Gamma)$ для $\lambda \in D_{\Gamma,v}$. Справедливость утверждения 1) предложения 6.3 легко устанавливается с использованием (6.3) (ср. с доказательством утверждения 1) предложения 6.1). Справедливость утверждений 2) и 3) предложения 6.3 легко следует из вещественности и неотрицательности коэффициентов $W_\Gamma(v, w, x)$, а в случае утверждения 3) еще и выполнения неравенств $N_\Gamma(v, w, n) \leq d^n$ для всех $n \in \mathbb{Z}_{\geq 0}$.

ПРЕДЛОЖЕНИЕ 6.3. Пусть Γ — локально конечный связный граф, $v \in V(\Gamma)$ и $\lambda \in D_{\Gamma,v}$ (например, это имеет место в случае, когда Γ — связный граф, степени вершин которого не превосходят некоторого натурального числа d , $v \in V(\Gamma)$ и $|\lambda| > d$, см. выше). Тогда справедливы следующие утверждения:

- 1) Функция $s_{\Gamma,\lambda,v} \in \mathbb{C}^{V(\Gamma)}$ (определенная выше) является $(\mathbb{C}, \lambda)$ -пропагатором графа Γ относительно вершины v .
- 2) Если $w \in V(\Gamma)$ и $\lambda \in \mathbb{R}$, то $s_{\Gamma,\lambda,v}(w) \in \mathbb{R}$, причем $s_{\Gamma,\lambda,v}(w) < 0$ при $\lambda > 0$. Если, кроме того, $\lambda' \in \mathbb{R}$ и $\lambda' > \lambda > 0$, то $\lambda' \in D_{\Gamma,v}$ и $|s_{\Gamma,\lambda',v}(w)| < |s_{\Gamma,\lambda,v}(w)|$.
- 3) Если степени вершин графа Γ не превосходят некоторого натурального числа d , то при $|\lambda| > d$ имеем $|s_{\Gamma,\lambda,v}(w)| \leq |s_{\Gamma,|\lambda|,v}(w)| \leq 1/(|\lambda| - d)$ для всех $w \in V(\Gamma)$.

Пусть Γ — локально конечный связный граф и $v \in V(\Gamma)$. Тогда, если $\lambda \in D_{\Gamma,v}$ и функция $s_{\Gamma,\lambda,v}$ имеет бесконечный носитель, то согласно утверждению 1) предложения 6.3 и теореме 5.2 (или теореме 5.3) число λ является собственным значением оператора смежности графа Γ . В силу утверждения 2) предложения 6.3 для каждого положительного вещественного числа $\lambda \in D_{\Gamma,v}$ (в частности, в случае когда степени вершин Γ не превосходят некоторого натурального числа d , для $\lambda \in \mathbb{R}_{>d}$) носитель функции $s_{\Gamma,\lambda,v}$ совпадает с $V(\Gamma)$. Поэтому в случае бесконечного графа Γ каждое такое вещественное число λ является собственным значением оператора смежности графа Γ . Мы уточним это заключение в утверждении 3) следующего предложения 6.4. Для его доказательства нам потребуются утверждения 1) и 2) этого предложения.

ПРЕДЛОЖЕНИЕ 6.4. Пусть Γ — локально конечный связный граф, $v \in V(\Gamma)$ и λ — положительное вещественное число, содержащееся в $D_{\Gamma,v}$. (Например, это имеет место в случае, когда Γ — связный граф, степени вершин которого не превосходят некоторого натурального числа d , $v \in V(\Gamma)$ и $\lambda \in \mathbb{R}_{>d}$.) Тогда справедливы следующие утверждения:

- 1) $\lambda \in D_{\Gamma,u}$ для всех $u \in V(\Gamma)$.
- 2) $s_{\Gamma,\lambda,v}(w_1)/s_{\Gamma,\lambda,v}(w_2) \leq \lambda$ для всех $\{w_1, w_2\} \in E(\Gamma)$ (напомним, что согласно утверждению 2) предложения 6.3 для всех $w \in V(\Gamma)$ имеем $s_{\Gamma,\lambda,v}(w) < 0$).
- 3) Если Γ — бесконечный граф, то существует такая собственная функция f оператора смежности $A_{\Gamma,\mathbb{C}}$ графа Γ , соответствующая собственному значению λ , что $f(v) = 1$, $f(w) \in \mathbb{R}_{>0}$ для всех $w \in V(\Gamma)$ и $f(w_1)/f(w_2) \leq \lambda$ для всех $\{w_1, w_2\} \in E(\Gamma)$ (и потому, в частности, $\lambda^{-d_\Gamma(v,w)} \leq f(w) \leq \lambda^{d_\Gamma(v,w)}$ для всех $w \in V(\Gamma)$).

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Для доказательства утверждения 1) предложения достаточно заметить, что для заданной $u \in V(\Gamma)$ и произвольных $w \in V(\Gamma)$ и $n \in \mathbb{Z}_{\geq d_\Gamma(u,v)}$ имеем

$$N_\Gamma(u, w, n) \leq N_\Gamma(v, w, n + d_\Gamma(u, v)).$$

Для доказательства утверждения 2) предложения достаточно заметить, что в силу $N_\Gamma(v, w_1, n) \leq N_\Gamma(v, w_2, n + 1)$, где $n \in \mathbb{Z}_{\geq 0}$, имеем

$$\frac{\sum_{n \in \mathbb{Z}_{\geq 0}} N_\Gamma(v, w_1, n) \lambda^{-n}}{\sum_{n \in \mathbb{Z}_{\geq 0}} N_\Gamma(v, w_2, n) \lambda^{-n}} \leq \frac{\lambda \sum_{n \in \mathbb{Z}_{\geq 0}} N_\Gamma(v, w_2, n + 1) \lambda^{-n-1}}{\sum_{n \in \mathbb{Z}_{\geq 0}} N_\Gamma(v, w_2, n) \lambda^{-n}} \leq \lambda.$$

Докажем утверждение 3) предложения. Для произвольной вершины u графа Γ определим функцию $f_u \in \mathbb{C}^{V(\Gamma)}$, полагая $f_u(w) = s_{\Gamma, \lambda, u}(w) / s_{\Gamma, \lambda, u}(v)$ для всех $w \in V(\Gamma)$. Так как $\lambda \in D_{\Gamma, u}$ в силу уже доказанного утверждения 1) предложения 6.4, то из утверждений 2) и 1) предложения 6.3 следует, что функция f_u корректно определена, причем принимает только вещественные положительные значения (поскольку функция $s_{\Gamma, \lambda, u}$ принимает вещественные отрицательные значения всюду на $V(\Gamma)$), $f_u(v) = 1$ и $(A_{\Gamma, \mathbb{C}}(f_u))(w) = \lambda f_u(w)$ для всех $w \in B_\Gamma(v, d_\Gamma(u, v) - 1)$. Кроме того, в силу уже доказанного утверждения 2) предложения 6.4 имеем $f_u(w_1) / f_u(w_2) \leq \lambda$ для всех $\{w_1, w_2\} \in E(\Gamma)$. Поскольку в силу бесконечности связного локально конечного графа Γ вершина u может быть выбрана на расстоянии от v , превосходящем любое наперед заданное натуральное число, то отсюда следует существование для произвольного натурального числа r такой функции $f_r \in \mathbb{C}^{V(\Gamma)}$, что $f_r(w) \in \mathbb{R}_{>0}$ для всех $w \in V(\Gamma)$, $f_r(v) = 1$, $(A_{\Gamma, \mathbb{C}}(f_r))(w) = \lambda f_r(w)$ для всех $w \in B_\Gamma(v, r)$ и, наконец, $f_r(w_1) / f_r(w_2) \leq \lambda$ для всех $\{w_1, w_2\} \in E(\Gamma)$. Ясно, что последовательность функций $(f_r)_{r \in \mathbb{Z}_{\geq 1}}$ содержит подпоследовательность, сходящуюся в топологии поточечной сходимости к некоторой функции f , которая очевидным образом обладает всеми указанными в утверждении 3) предложения 6.4 свойствами.

Дополнительные углубленные результаты получаются с использованием, по существу, аналитических продолжений ранее рассматриваемых производящих функций $s_{\Gamma, \lambda, v}$ в случае, когда Γ — связный граф, степени вершин которого не превосходят некоторого натурального числа d (и, по-прежнему, $F = \mathbb{C}$ с обычным абсолютным значением). Как будет показано, описываемая далее конструкция позволяет строить *квадратично суммируемые* $(\mathbb{C}, \lambda)$ -пропагаторы графа Γ для всех $\lambda \in \mathbb{C} \setminus (\mathbb{R}_{\geq -d} \cap \mathbb{R}_{\leq d})$.

Итак, пусть Γ — связный граф, степени вершин которого не превосходят некоторого натурального числа d и $F = \mathbb{C}$ с обычным абсолютным значением. Пусть $l_2(V(\Gamma))$ — содержащееся в $\mathbb{C}^{V(\Gamma)}$ гильбертово пространство квадратично суммируемых функций со скалярным произведением

$$(f_1, f_2) = \sum_{u \in V(\Gamma)} f_1(u) \overline{f_2(u)} \text{ для всех } f_1, f_2 \in l_2(V(\Gamma)),$$

где $\overline{f_2(u)}$ для $u \in V(\Gamma)$ — число комплексно сопряженное с $f_2(u)$ (заметим, что топология на $l_2(V(\Gamma))$ не индуцируется топологией топологического векторного пространства $\mathbb{C}^{V(\Gamma)}$), и пусть $\mathcal{L}(l^2(V(\Gamma)))$ — множество всюду определенных

ограниченных линейных операторов из гильбертова пространства $l_2(V(\Gamma))$ в себя. Используемая далее терминология, касающаяся операторов из $\mathcal{L}(l^2(V(\Gamma)))$ и, в частности, их спектров, совпадает с используемой в теории C^* -алгебр, к каковому $\mathcal{L}(l^2(V(\Gamma)))$ (с естественными операциями) относится. Так, для произвольного оператора $A \in \mathcal{L}(l^2(V(\Gamma)))$ его резольвентным множеством $r(A)$ называется множество всех таких $\lambda \in \mathbb{C}$, что $A - \lambda E$ есть биекция $l_2(V(\Gamma))$ на $l_2(V(\Gamma))$ (и тогда $(A - \lambda E)^{-1} \in \mathcal{L}(l^2(V(\Gamma)))$ в силу теоремы Банаха об обратном операторе), определенный для $\lambda \in r(A)$ оператор $(\lambda E - A)^{-1}$ называется резольвентой A в λ , а спектр $\sigma(A)$ есть $\mathbb{C} \setminus r(A)$.

Содержащееся в $\mathbb{C}^{V(\Gamma)}$ в качестве подпространства гильбертово пространство $l_2(V(\Gamma))$ (топология которого не индуцируется топологией топологического векторного пространства $\mathbb{C}^{V(\Gamma)}$) является $A_{\Gamma, \mathbb{C}}^{(\text{alg})}$ -инвариантным, а ограничение $A_{\Gamma, \mathbb{C}}^{(\text{alg})}$ на $l_2(V(\Gamma))$, обозначаемое далее через $A_{\Gamma, \mathbb{C}}^{(l_2)}$, есть оператор из $\mathcal{L}(l^2(V(\Gamma)))$.

ЗАМЕЧАНИЕ 6.6. Как уже было сказано во введении, в случае связного графа Γ , степени вершин которого ограничены в совокупности, оператор $A_{\Gamma, \mathbb{C}}^{(l_2)}$ совпадает с оператором, рассматриваемым в [4], [5] и называемым там оператором смежности. В [4], [5] оператор, называемый там оператором смежности, определяется также в более общем случае счетного локально конечного графа Γ как оператор в $l_2(V(\Gamma))$, являющийся замыканием ограничения $A_{\Gamma, \mathbb{C}}^{(\text{alg})}$ на пространство функций с конечными носителями.

Оператор $A_{\Gamma, \mathbb{C}}^{(l_2)}$ обладает следующими несложно устанавливаемыми свойствами (ср. [4], [5]):

- а) Норма $A_{\Gamma, \mathbb{C}}^{(l_2)}$ не превосходит d (см., например, [16; теорема 6.12-A]).
- б) $A_{\Gamma, \mathbb{C}}^{(l_2)}$ самосопряжен (см., например, [16; с. 329–330]).
- с) $\sigma(A_{\Gamma, \mathbb{C}}^{(l_2)})$ содержится в $\mathbb{R}_{\geq -d} \cap \mathbb{R}_{\leq d}$ (что следует из а), б) и, например, [17; теорема 2.2.5]).

Оператор $A_{\Gamma, \mathbb{C}}^{(l_2)}$ используется нами для доказательства следующей теоремы, первое утверждение которой непосредственно вытекает из указанного свойства с).

ТЕОРЕМА 6.2. Пусть Γ — связный граф, степени вершин которого не превосходят некоторого натурального числа d . Тогда справедливы следующие утверждения:

- 1) Множество $\mathbb{C} \setminus (\mathbb{R}_{\geq -d} \cap \mathbb{R}_{\leq d})$ содержится в резольвентном множестве оператора $A_{\Gamma, \mathbb{C}}^{(l_2)}$. Таким образом, для каждого $\lambda \in \mathbb{C} \setminus (\mathbb{R}_{\geq -d} \cap \mathbb{R}_{\leq d})$ определен линейный оператор $R_{\Gamma, d, \lambda} := (A_{\Gamma, \mathbb{C}}^{(l_2)} - \lambda E)^{-1} \in \mathcal{L}(l^2(V(\Gamma)))$.
- 2) Для произвольных $v \in V(\Gamma)$ и $\lambda \in \mathbb{C} \setminus (\mathbb{R}_{\geq -d} \cap \mathbb{R}_{\leq d})$ функция $R_{\Gamma, d, \lambda}(\delta_v) \in \mathbb{C}^{V(\Gamma)}$ является $(\mathbb{C}, \lambda)$ -пропагатором графа Γ относительно вершины v , причем содержащимся в $l_2(V(\Gamma))$ и единственным с этим свойством.
- 3) Для произвольных $v, w \in V(\Gamma)$ и $\lambda \in \mathbb{C} \setminus (\mathbb{R}_{\geq -d} \cap \mathbb{R}_{\leq d})$ положим

$$\tilde{s}_{\Gamma, d, \lambda, v}(w) := (R_{\Gamma, d, \lambda}(\delta_v))(w) = (R_{\Gamma, d, \lambda}(\delta_v), \delta_w)$$

(скалярное произведение $R_{\Gamma, d, \lambda}(\delta_v)$ и δ_w в $l_2(V(\Gamma))$). Тогда для произвольных фиксированных $v, w \in V(\Gamma)$ определенная на $\mathbb{C} \setminus (\mathbb{R}_{\geq -d} \cap \mathbb{R}_{\leq d})$ функция $\tilde{s}_{\Gamma, d, \lambda, v}(w)$

аргумента λ является аналитической функцией, совпадающей на множестве $\{\lambda \in \mathbb{C} : |\lambda| > d\}$ с $s_{\Gamma, \lambda, v}(w)$, рассматриваемой как функция аргумента λ .

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Из утверждения 1) теоремы (вытекающего из свойства с) оператора $A_{\Gamma, \mathbb{C}}^{(l_2)}$ следует, что для произвольных $v \in V(\Gamma)$ и $\lambda \in \mathbb{C} \setminus (\mathbb{R}_{\geq -d} \cap \mathbb{R}_{\leq d})$ функция $R_{\Gamma, d, \lambda}(\delta_v) \in \mathbb{C}^{V(\Gamma)}$ является $(\mathbb{C}, \lambda)$ -пропагатором графа Γ относительно вершины v , содержащимся в $l_2(V(\Gamma))$, причем единственным $(\mathbb{C}, \lambda)$ -пропагатором графа Γ относительно вершины v , содержащимся в $l_2(V(\Gamma))$, поскольку разность различных $(\mathbb{C}, \lambda)$ -пропагаторов графа Γ относительно вершины v , содержащихся в $l_2(V(\Gamma))$, была бы собственной функцией оператора $A_{\Gamma, \mathbb{C}}^{(l_2)}$, соответствующей собственному значению λ , а это невозможно в силу $\lambda \notin \sigma(A_{\Gamma, \mathbb{C}}^{(l_2)})$ (см. с)).

Остается доказать утверждение 3) теоремы. Его справедливость в части аналитичности функции $\tilde{s}_{\Gamma, d, \lambda, v}(w)$ аргумента $\lambda \in \mathbb{C} \setminus (\mathbb{R}_{\geq -d} \cap \mathbb{R}_{\leq d})$ следует, например, из [18; теорема 4.12]. Покажем, наконец, что для произвольных $v, w \in V(\Gamma)$ и $\lambda \in \mathbb{C}$ с $|\lambda| > d$ имеет место равенство $\tilde{s}_{\Gamma, d, \lambda, v}(w) = s_{\Gamma, \lambda, v}(w)$. При $|\lambda| > d$ ввиду свойства а) оператора $A_{\Gamma, \mathbb{C}}^{(l_2)}$ норма оператора $\lambda^{-1} A_{\Gamma, \mathbb{C}}^{(l_2)}$ меньше 1, и следовательно, при $|\lambda| > d$ имеем (в смысле сходимости суммы по равномерной операторной топологии на $\mathcal{L}(l^2(V(\Gamma)))$)

$$\begin{aligned} R_{\Gamma, d, \lambda} &= (A_{\Gamma, \mathbb{C}}^{(l_2)} - \lambda E)^{-1} = -\lambda^{-1} (E - \lambda^{-1} A_{\Gamma, \mathbb{C}}^{(l_2)})^{-1} \\ &= -\lambda^{-1} (E + \sum_{n \in \mathbb{Z}_{\geq 1}} (\lambda^{-1} A_{\Gamma, \mathbb{C}}^{(l_2)})^n), \end{aligned}$$

что для произвольных $v, w \in V(\Gamma)$ влечет

$$\begin{aligned} \tilde{s}_{\Gamma, d, \lambda, v}(w) &= (R_{\Gamma, d, \lambda}(\delta_v), \delta_w) = -\lambda^{-1} ((\delta_v, \delta_w) + (\sum_{n \in \mathbb{Z}_{\geq 1}} \lambda^{-n} (A_{\Gamma, \mathbb{C}}^{(l_2)})^n (\delta_v), \delta_w)) \\ &= -\lambda^{-1} ((\delta_v, \delta_w) + \sum_{n \in \mathbb{Z}_{\geq 1}} (\lambda^{-n} (A_{\Gamma, \mathbb{C}}^{(l_2)})^n (\delta_v), \delta_w)) = s_{\Gamma, \lambda, v}(w). \end{aligned}$$

ЗАМЕЧАНИЕ 6.7. Если выполнены условия теоремы 6.2, то согласно утверждениям 2) и 3) этой теоремы для произвольных фиксированных $v \in V(\Gamma)$ и $\lambda \in \{c \in \mathbb{C} : |c| > d\}$ содержащаяся в $\mathbb{C}^{V(\Gamma)}$ функция $s_{\Gamma, \lambda, v}(w)$ аргумента $w \in V(\Gamma)$ лежит в $l_2(V(\Gamma))$.

ЗАМЕЧАНИЕ 6.8. Подчеркнем, что из утверждения 2) теоремы 6.2 следует существование и единственность для произвольного связного графа Γ , степени вершин которого ограничены в совокупности, и произвольных $v \in V(\Gamma)$, $\lambda \in \mathbb{C} \setminus (\mathbb{R}_{\geq -d} \cap \mathbb{R}_{\leq d})$, где d — максимум степеней вершин графа Γ , квадратично суммируемого $(\mathbb{C}, \lambda)$ -пропагатора $\tilde{s}_{\Gamma, d, \lambda, v}$ графа Γ относительно вершины v (своего рода канонического $(\mathbb{C}, \lambda)$ -пропагатора Γ относительно v). (Для указанных Γ и λ у $A_{\Gamma, \mathbb{C}}$ отсутствуют, как следствие, собственные квадратично суммируемые функции, соответствующие собственному значению λ .) Хотя в части существования пропагаторов это утверждение, даже в случае связного графа Γ с не превосходящими некоторого натурального числа d степенями вершин и $F = \mathbb{C}$ с обычным абсолютным значением, слабее утверждения 2)

следствия 4.2, оно при $\lambda \in \mathbb{C} \setminus (\mathbb{R}_{\geq -d} \cap \mathbb{R}_{\leq d})$ имеет то преимущество, что представляет “явный вид” пропагатора относительно произвольной заданной вершины, причем единственного содержащегося в $l_2(V(\Gamma))$. Заманчивым выглядит изучение аналитических свойств этих канонических пропагаторов $\tilde{s}_{\Gamma,d,\lambda,v}$ (как вектор-функций аргумента $\lambda \in \mathbb{C} \setminus (\mathbb{R}_{\geq -d} \cap \mathbb{R}_{\leq d})$) с использованием, например, соотношения Гильберта для $R_{\Gamma,d,\lambda}$ и равенства $R_{\Gamma,d,\lambda}^2$ производной $R_{\Gamma,d,\lambda}$ по λ . Для заданного $w \in V(\Gamma)$ в связи с предыдущими результатами работы значительный интерес представляют нули $\tilde{s}_{\Gamma,d,\lambda,v}(w)$, рассматриваемой как функции аргумента $\lambda \in \mathbb{C} \setminus (\mathbb{R}_{\geq -d} \cap \mathbb{R}_{\leq d})$.

ЗАМЕЧАНИЕ 6.9. Обратим внимание еще на один аспект утверждения 3) теоремы 6.2. Фиксируя $d \in \mathbb{Z}_{\geq 2}$ и меняя связные графы Γ , степени вершин которых не превосходят d , а также вершины $v, w \in V(\Gamma)$, мы получаем широкий класс голоморфных на $\{c \in \mathbb{C} : |c| > d\}$ функций $s_{\Gamma,\lambda,v}(w)$ аргумента λ , допускающих аналитическое продолжение до голоморфных на $\mathbb{C} \setminus (\mathbb{R}_{\geq -d} \cap \mathbb{R}_{\leq d})$ функций $\tilde{s}_{\Gamma,d,\lambda,v}(w)$ аргумента λ . На эту ситуацию можно смотреть и со следующих позиций: для связного графа Γ , степени вершин которого не превосходят d , и для произвольных $v, w \in V(\Gamma)$ производящий ряд

$$W_{\Gamma,\mathbb{C}}(x, v, w) = \sum_{n \in \mathbb{Z}_{\geq 0}} N_{\Gamma}(v, w, n) x^n,$$

абсолютно сходящийся при $x \in \{c \in \mathbb{C} : |c| < 1/d\}$, можно естественным образом “просуммировать” для любого $x \in \{c \in \mathbb{C} : |c| \geq 1/d\} \setminus (\mathbb{R}_{\leq -1/d} \cup \mathbb{R}_{\geq 1/d})$, приписав ему значение $-x^{-1} \tilde{s}_{\Gamma,d,x^{-1},v}(w)$.

ЗАМЕЧАНИЕ 6.10. В связи с утверждением 3) теоремы 6.2 обратим внимание на § 8, раздел 8.3, где строится бесконечный кубический связный граф Γ такой, что для комплексного не вещественного корня λ_0 многочлена $x^3 + x^2 - 1 \in \mathbb{C}[x]$ (любого из двух) оператор $A_{\Gamma,\mathbb{C}} - \lambda_0 E$ инъективен, т. е. согласно теореме 5.3 относительно каждой вершины v у Γ имеется единственный $(\mathbb{C}, \lambda_0)$ -пропагатор p_v , причем p_v имеет конечный носитель. Но тогда согласно утверждениям 2) и 3) теоремы 6.2 для произвольных $v, w \in V(\Gamma)$ имеем $p_v(w) = \tilde{s}_{\Gamma,3,\lambda_0,v}(w)$. Таким образом, для произвольной вершины $v \in V(\Gamma)$ для всех, за исключением конечного числа, вершин $w \in V(\Gamma)$ аналитическая на $\mathbb{C} \setminus (\mathbb{R}_{\geq -3} \cap \mathbb{R}_{\leq 3})$ согласно утверждению 3) теоремы 6.2 функция $\tilde{s}_{\Gamma,3,\lambda,v}(w)$ аргумента λ обращается в 0 в точке λ_0 . При этом согласно утверждению 2) предложения 6.3 для произвольных $v, w \in V(\Gamma)$ аналитическая на $\mathbb{C} \setminus (\mathbb{R}_{\geq -3} \cap \mathbb{R}_{\leq 3})$ функция $\tilde{s}_{\Gamma,3,\lambda,v}(w)$ аргумента λ всюду на $\mathbb{R}_{\geq 3}$ принимает вещественные отрицательные значения.

§ 7. “Типичность” сюръективности и “исключительность” (в случае бесконечного связного графа Γ и поля F нулевой характеристики) инъективности для операторов $A_{\Gamma,F} - \lambda E$

Всюду в этом параграфе Γ — локально конечный граф и F — поле с некоторым абсолютным значением $|\cdot|_v$. Напомним (см. теоремы 5.1 и 5.3), что для $\lambda \in F$ условие сюръективности оператора $A_{\Gamma,F} - \lambda E$ эквивалентно условию наличия (F, λ) -пропагаторов графа Γ относительно всех его вершин (т. е.

условию $S_{F,\lambda}(\Gamma) = \emptyset$), а условие инъективности оператора $A_{\Gamma,F} - \lambda E$ эквивалентно условию наличия (F, λ) -пропагаторов с конечными носителями графа Γ относительно всех его вершин (т. е. условию $L_{F,\lambda}(\Gamma) = V(\Gamma)$).

Ясно, что в случае конечного графа Γ условия сюръективности и инъективности оператора $A_{\Gamma,F} - \lambda E$ равносильны и “типичны” в том смысле, что не выполняются лишь для λ , являющихся собственными значениями матрицы смежности графа Γ над F . Здесь и далее, называя некоторое свойство элементов λ поля F “типичным” или, напротив, “исключительным”, мы имеем в виду (проецируя ситуацию на случай, когда F есть $\mathbb{C}$ или, более общо, есть поле, не являющееся алгебраическим расширением своего простого подполя), что свойство может не выполняться или, соответственно, выполняться лишь для определенных алгебраических над простым подполем элементов λ .

Однако, как будет показано в этом параграфе, из предыдущих результатов настоящей работы следует, что ситуация меняется в случае бесконечного графа Γ . Хотя для $\lambda \in F$ условие наличия (F, λ) -пропагаторов бесконечного графа Γ относительно всех его вершин (т. е. условие сюръективности $A_{\Gamma,F} - \lambda E$) согласно следствию 4.2 по-прежнему является “типичным”, более сильное условие наличия (F, λ) -пропагаторов с конечными носителями бесконечного связного графа Γ относительно всех его вершин (т. е. условие инъективности $A_{\Gamma,F} - \lambda E$) является “исключительным” для λ в случае поля F характеристики 0 (но может не быть “исключительным” для λ в случае поля F положительной характеристики, см. § 8, раздел 8.1.1). Как будет показано ниже (см. предложения 7.3 и 7.2), в случае бесконечного связного графа Γ и поля F характеристики 0 “исключительным” для $\lambda \in F$ является даже условие наличия (F, λ) -пропагатора с конечным носителем графа Γ относительно *какой-либо* вершины (т. е. условие $L_{F,\lambda}(\Gamma) \neq \emptyset$). Таким образом, будет показано, что для бесконечного локально конечного связного графа Γ и поля F характеристики 0 “типичной” для $\lambda \in F$ является ситуация, когда $S_{F,\lambda}(\Gamma) = \emptyset$, $L_{F,\lambda}(\Gamma) = \emptyset$ и (см. теоремы 4.1 и 4.2) носители всех собственных функций оператора $A_{\Gamma,F}$, соответствующих собственному значению λ , бесконечны и в объединении дают все множество $V(\Gamma)$. Отметим, однако, что имеются такие бесконечные локально конечные связные графы Γ и поля F характеристики 0 с абсолютными значениями, что для некоторых $\lambda \in F$ имеет место равенство $S_{F,\lambda}(\Gamma) = V(\Gamma)$ (см. § 8, раздел 8.5), и что имеются такие графы Γ и поля F с теми же свойствами, что для некоторых $\lambda \in F$ имеет место равенство $L_{F,\lambda}(\Gamma) = V(\Gamma)$ или, другими словами, λ не является собственным значением оператора $A_{\Gamma,F}$ (см. § 8, разделы 8.2, 8.3 и 8.4).

Иная ситуация вполне может иметь место в случае поля F положительной характеристики: для каждого простого $p \in \mathbb{Z}_{\geq 1}$ несложно привести пример бесконечного локально конечного связного вершинно-симметрического графа Γ такого, что для любого поля F характеристики p с произвольным абсолютным значением и любого $\lambda \in F \setminus \{0\}$ имеет место равенство $L_{F,\lambda}(\Gamma) = V(\Gamma)$ или, другими словами, λ не является собственным значением оператора $A_{\Gamma,F}$ (см. § 8, раздел 8.1.1).

Итак, из следствия 4.2 теоремы 4.1 вытекает, что для локально конечного графа Γ и поля F с абсолютным значением $|\cdot|_v$ “типичной” для $\lambda \in F$ явля-

ется ситуация, когда у графа Γ относительно каждой его вершины имеется (F, λ) -пропагатор, или, другими словами, для $\lambda \in F$ “исключительным” является условие отсутствия у графа Γ относительно какой-либо его вершины (F, λ) -пропагатора (т. е. условие $S_{F, \lambda}(\Gamma) \neq \emptyset$). Вернемся к выводу из теоремы 4.1 “исключительности” для $\lambda \in F$ условия $S_{F, \lambda}(\Gamma) \neq \emptyset$, дополнив его одним уточняющим наблюдением. Итак, согласно теореме 4.1 для локально конечного графа Γ , поля F и $\lambda \in F$ условие $S_{F, \lambda}(\Gamma) \neq \emptyset$ эквивалентно существованию у оператора $A_{\Gamma, F}$ собственной функции с конечным носителем, соответствующей собственному значению λ . Отсюда следует “исключительность” для $\lambda \in F$ этого свойства, поскольку, если X — конечный носитель некоторой собственной функции оператора $A_{\Gamma, F}$, соответствующей собственному значению λ , то для любого содержащего X конечного подмножества X' множества $V(\Gamma)$ элемент λ является собственным значением матрицы смежности над F индуцированного X' конечного подграфа $\langle X' \rangle_\Gamma$ графа Γ . Добавим, что, как это следует из очевидного предложения 7.1, условие существования у оператора $A_{\Gamma, F}$ собственной функции с конечным носителем, соответствующей собственному значению λ , вообще говоря, более ограничительно, чем условие принадлежности λ множеству собственных значений матрицы смежности над F некоторого индуцированного конечного подграфа графа Γ .

ПРЕДЛОЖЕНИЕ 7.1. Пусть Γ — локально конечный граф, F — поле с некоторым абсолютным значением $|\cdot|_v$ и $\lambda \in F$. Тогда для $\emptyset \neq X \subseteq V(\Gamma)$ следующие условия равносильны:

(i) У оператора $A_{\Gamma, F}$ существует собственная функция, соответствующая собственному значению λ , носитель которой содержится в X .

(ii) У оператора $A_{\langle X \rangle_\Gamma, F}$ существует такая собственная функция f , соответствующая собственному значению λ , что для любой вершины $u \in \Gamma(X) \setminus X$ (или, эквивалентно, для любой вершины $u \in V(\Gamma) \setminus X$) справедливо равенство

$$\sum_{u' \in \Gamma(u) \cap X} f(u') = 0.$$

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО очевидно. Если имеет место (i) и $\tilde{f}$ — собственная функция оператора $A_{\Gamma, F}$, соответствующая собственному значению λ , носитель которой содержится в X , то (ii) имеет место, поскольку очевидно, что в качестве f можно взять $\tilde{f}|_X$. Обратно, из справедливости (ii) следует справедливость (i), поскольку $\tilde{f} \in F^{V(\Gamma)}$, совпадающая с f на X и равная 0 всюду на $V(\Gamma) \setminus X$, очевидным образом является собственной функцией оператора $A_{\Gamma, F}$, соответствующей собственному значению λ , носитель которой содержится в X .

ЗАМЕЧАНИЕ 7.1. Для пропагаторов справедлив следующий аналогичный результат (с аналогичным доказательством). В предположениях предложения 7.1 пусть $v \in X$. Тогда следующие условия равносильны:

(i) У графа Γ имеется (F, λ) -пропагатор относительно вершины v , носитель которого содержится в X .

(ii) У графа $\langle X \rangle_\Gamma$ имеется такой (F, λ) -пропагатор p_v относительно вершины v , что для любой вершины $u \in \Gamma(X) \setminus X$ (или, эквивалентно, для любой вершины $u \in V(\Gamma) \setminus X$) справедливо равенство $\sum_{u' \in \Gamma(u) \cap X} p_v(u') = 0$.

Мы докажем теперь, что если Γ — бесконечный локально конечный связный граф и F — поле характеристики 0 с некоторым абсолютным значением $|\cdot|_v$, то для $\lambda \in F$, в отличие от случая конечного графа, “исключительным” является уже наличие (F, λ) -пропагатора с конечным носителем графа Γ относительно какой-либо его вершины, что согласно теореме 5.3 влечет также “исключительность” инъективности оператора $A_{\Gamma, F} - \lambda E$. Впрочем, “исключительность” инъективности оператора $A_{\Gamma, F} - \lambda E$ в том смысле, что она возможна лишь для алгебраических над $\mathbb{Q} \subseteq F$ элементов λ , вытекает из теоремы 6.1.

Предварительно докажем следующее

ПРЕДЛОЖЕНИЕ 7.2. Пусть F — поле характеристики 0 и $F[x]$ — алгебра многочленов от независимой переменной x с коэффициентами из F . Пусть Δ — конечный связный граф с $|V(\Delta)| > 1$ и $\mathbf{A}_{\Delta, F} - x\mathbf{E}$ — характеристическая матрица его матрицы смежности (над F). Тогда произвольный минор порядка $|V(\Delta)| - 1$ матрицы $\mathbf{A}_{\Delta, F} - x\mathbf{E}$, рассматриваемый как элемент $F[x]$, отличен от нуля (и принадлежит $\mathbb{Z}[x] \subseteq F[x]$). Как следствие, матрица $\mathbf{A}_{\Delta, F} - x\mathbf{E}$, рассматриваемая над полем $\mathbb{Q}(x)$, имеет обратную, все элементы которой ненулевые.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Не теряя общности, будем считать, что $F = \mathbb{Q}$. Предположим, что нулевым элементом $\mathbb{Q}[x]$ является определитель матрицы $\mathbf{A}'$, получающейся из $\mathbf{A}_{\Delta, \mathbb{Q}} - x\mathbf{E}$ удалением строки, соответствующей вершине u графа Δ , и столбца, соответствующего вершине u' графа Δ . Для каждого $i \in \{1, \dots, |V(\Delta)|\}$ пусть v_i — вершина графа Δ , соответствующая i -ой строке (и i -ому столбцу) матрицы $\mathbf{A}_{\Delta, \mathbb{Q}}$. Поскольку $u \neq u'$ (ясно, что все главные миноры матрицы $\mathbf{A}_{\Delta, \mathbb{Q}} - x\mathbf{E}$ ненулевые), можно, не теряя общности, предполагать, что $u = v_1$ и $u' = v_{|V(\Delta)|}$. Пусть $\delta_1 := (1, 0, \dots, 0)^t$ (матрица размера $|V(\Delta)| \times 1$ над $\mathbb{Q}[x]$). Тогда в силу $\det(\mathbf{A}_{\Delta, \mathbb{Q}} - x\mathbf{E}) \neq 0$ и $\det(\mathbf{A}') = 0$ система линейных уравнений

$$(\mathbf{A}_{\Delta, \mathbb{Q}} - x\mathbf{E})(x_1, \dots, x_{|V(\Delta)|})^t = \delta_1$$

над полем $\mathbb{Q}(x)$ имеет единственное решение $(x'_1, \dots, x'_{|V(\Delta)|})^t$, причем (по правилу Крамера) $x'_{|V(\Delta)|} = 0$. Но тогда для любого $\lambda \in \mathbb{R}$ со свойством $\det(\mathbf{A}_{\Delta, \mathbb{Q}} - \lambda\mathbf{E}) \neq 0$ (матрица $\mathbf{A}_{\Delta, \mathbb{Q}} - \lambda\mathbf{E}$ рассматривается как матрица над $\mathbb{R}$) система линейных уравнений

$$(\mathbf{A}_{\Delta, \mathbb{Q}} - \lambda\mathbf{E})(x_1, \dots, x_{|V(\Delta)|})^t = \delta_1, \quad (7.1)$$

рассматриваемая как система линейных уравнений над полем $\mathbb{R}$, также имеет единственное решение $(x'_{\lambda, 1}, \dots, x'_{\lambda, |V(\Delta)|})^t$, причем $x'_{\lambda, |V(\Delta)|} = 0$. Пусть d — максимум степеней вершин графа Δ и $\lambda_0 \in \mathbb{R}_{>d}$. Тогда $\det(\mathbf{A}_{\Delta, \mathbb{Q}} - \lambda_0\mathbf{E}) \neq 0$. Кроме того, согласно утверждению 1) предложения 6.3 решением (7.1), рассматриваемой как система линейных уравнений над $\mathbb{R}$, при $\lambda = \lambda_0$ является $(s_1, \dots, s_{|V(\Delta)|})^t$, где $s_i := s_{\Delta, \lambda_0, v_1}(v_i)$ для каждого $i \in \{1, \dots, |V(\Delta)|\}$. Следовательно, $s_i = x'_{\lambda_0, i}$ для всех $i \in \{1, \dots, |V(\Delta)|\}$. Однако $s_{|V(\Delta)|} = s_{\Delta, \lambda_0, v_1}(v_{|V(\Delta)|}) < 0$ в силу утверждения 2) предложения 6.3, а $x'_{\lambda_0, |V(\Delta)|} = 0$. Полученное противоречие доказывает предложение 7.2.

ЗАМЕЧАНИЕ 7.2. Для любого поля F характеристики $p > 0$ аналог предложения 7.2, вообще говоря, не имеет места, как показывает пример подграфа, порожденного шаром радиуса 2, графа из раздела 8.1.1 параграфа 8 (с тем же самым p).

ЗАМЕЧАНИЕ 7.3. При дополнительном предположении, что Δ регулярен, заключение предложения 7.2 является следствием матричной теоремы Кирхгофа о деревьях.

СЛЕДСТВИЕ 7.1. Пусть Δ — конечный связный граф с $|V(\Delta)| > 1$. Пусть F — поле характеристики 0 и λ — элемент F , не являющийся собственным значением матрицы смежности графа Δ (над F), но такой, что (F, λ) -пропагатор графа Δ относительно некоторой вершины графа Δ принимает нулевое значение в какой-то вершине графа Δ . Тогда λ — алгебраический над $\mathbb{Q} \subseteq F$ элемент степени $< |V(\Delta)|$.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Поскольку λ не является собственным значением матрицы смежности графа Δ , условие, что (F, λ) -пропагатор графа Δ относительно некоторой вершины u принимает нулевое значение в какой-то вершине u' , эквивалентно равенству нулю определителя матрицы, получающейся из $\mathbf{A}_{\Delta, F} - \lambda \mathbf{E}$ удалением строки, соответствующей вершине u графа Δ , и столбца, соответствующего вершине u' графа Δ . С учетом этого требуемое утверждение вытекает из предложения 7.2.

Теперь мы можем аргументированно повторить сказанное ранее. Пусть Γ — бесконечный локально конечный связный граф и F — поле характеристики 0 с некоторым абсолютным значением $|\cdot|_v$. Из приводимого ниже очевидного предложения 7.3 и предложения 7.2 следует “исключительность” для $\lambda \in F$ условия наличия у графа Γ относительно некоторой его вершины (F, λ) -пропагатора с конечным носителем (т. е. условия $L_{F, \lambda}(\Gamma) \neq \emptyset$). Еще более “исключительным” является для $\lambda \in F$ условие инъективности оператора $A_{\Gamma, F} - \lambda E$, которое согласно теореме 5.3 равносильно условию наличия у графа Γ относительно каждой его вершины (F, λ) -пропагатора с конечным носителем (т. е. условию $L_{F, \lambda}(\Gamma) = V(\Gamma)$).

ПРЕДЛОЖЕНИЕ 7.3. Пусть Γ — локально конечный граф, F — поле с некоторым абсолютным значением $|\cdot|_v$ и $v \in V(\Gamma)$. Тогда для $\lambda \in F$ из существования (F, λ) -пропагатора с конечным носителем у Γ относительно v (т. е. из $v \in L_{F, \lambda}(\Gamma)$) следует существование такого содержащего v конечного подмножества X множества $V(\Gamma)$, что для любого содержащего X конечного подмножества X' множества $V(\Gamma)$ равен нулю определитель матрицы $\mathbf{A}_{\langle X' \rangle_{\Gamma}, F} - \lambda \mathbf{E}$ или равны нулю все миноры этой матрицы, получающиеся из нее удалением строки, соответствующей вершине v , и столбца, соответствующего любой из вершин множества $X' \setminus X$.

§ 8. Некоторые примеры

8.1. Пусть F — произвольное поле характеристики $p > 0$ с произвольным абсолютным значением.

8.1.1. Несложно привести *пример бесконечного локально конечного связного вершинно-симметрического графа Γ такого, что никакое $\lambda \in F \setminus \{0\}$ не является собственным значением оператора смежности $A_{\Gamma, F}$.*

Действительно, пусть Δ — произвольный бесконечный локально конечный связный вершинно-симметрический граф. Определим граф Γ , полагая

$$V(\Gamma) = \{v_{u,k} : u \in V(\Delta), k \in \{1, \dots, p\}\},$$

$$E(\Gamma) = \{\{v_{u',k'}, v_{u'',k''}\} : \{u', u''\} \in E(\Delta), k', k'' \in \{1, \dots, p\}\}.$$

Покажем, что никакое $\lambda \in F \setminus \{0\}$ не является собственным значением оператора смежности $A_{\Gamma, F}$.

Пусть $\lambda \in F \setminus \{0\}$, и пусть $f \in F^{V(\Gamma)}$ такова, что

$$\lambda f(v) = \sum_{w \in \Gamma(v)} f(w)$$

для всех $v \in V(\Gamma)$. Тогда для произвольных $u' \in V(\Delta), k_1, k_2 \in \{1, \dots, p\}$ в силу $\Gamma(v_{u',k_1}) = \Gamma(v_{u',k_2})$ имеем $\lambda f(v_{u',k_1}) = \lambda f(v_{u',k_2})$, и потому (с учетом $\lambda \neq 0$) $f(v_{u',k_1}) = f(v_{u',k_2})$. Следовательно, для произвольной вершины $v_{u,k}$, $u \in V(\Delta), k \in \{1, \dots, p\}$, графа Γ имеем

$$f(v_{u,k}) = \frac{1}{\lambda} \sum_{u' \in \Delta(u)} \sum_{k' \in \{1, \dots, p\}} f(v_{u',k'}) = \frac{1}{\lambda} \sum_{u' \in \Delta(u)} p \cdot f(v_{u',1}) = 0.$$

Таким образом, f — функция, тождественно равная 0 на $V(\Gamma)$. Как следствие, λ не является собственным значением оператора смежности $A_{\Gamma, F}$.

8.1.2. Несложно привести также *пример бесконечного локально конечного связного вершинно-симметрического графа Γ такого, что $0 \in F$ не является собственным значением оператора смежности $A_{\Gamma, F}$.*

Определим граф Γ , полагая

$$V(\Gamma) = \{v_{i,k} : i \in \mathbb{Z}, k \in \{1, \dots, p\}\},$$

$$E(\Gamma) = \{\{v_{2i',k'}, v_{2i'+1,k''}\} : i' \in \mathbb{Z}, k', k'' \in \{1, \dots, p\}\} \cup \\ \cup \{\{v_{2i',k'}, v_{2i'-1,k''}\} : i' \in \mathbb{Z}, k' \in \{1, \dots, p\}\}.$$

Покажем, что $0 \in F$ не является собственным значением оператора смежности $A_{\Gamma, F}$.

Пусть $f \in F^{V(\Gamma)}$ такова, что

$$(0 \cdot f(v)) = 0 = \sum_{w \in \Gamma(v)} f(w)$$

для всех $v \in V(\Gamma)$. Покажем, прежде всего, что для произвольных $i \in \mathbb{Z}$ и $k_1, k_2 \in \{1, \dots, p\}$ справедливо равенство $f(v_{i,k_1}) = f(v_{i,k_2})$. Действительно, при четном i имеем

$$0 = \sum_{w \in \Gamma(v_{i-1,k_1})} f(w) = f(v_{i,k_1}) + \sum_{k \in \{1, \dots, p\}} f(v_{i-2,k})$$

и

$$0 = \sum_{w \in \Gamma(v_{i-1,k_2})} f(w) = f(v_{i,k_2}) + \sum_{k \in \{1, \dots, p\}} f(v_{i-2,k}),$$

что влечет $f(v_{i,k_1}) = f(v_{i,k_2})$, а при нечетном i имеем

$$0 = \sum_{w \in \Gamma(v_{i+1,k_1})} f(w) = f(v_{i,k_1}) + \sum_{k \in \{1, \dots, p\}} f(v_{i+2,k})$$

и

$$0 = \sum_{w \in \Gamma(v_{i+1,k_2})} f(w) = f(v_{i,k_2}) + \sum_{k \in \{1, \dots, p\}} f(v_{i+2,k}),$$

что влечет $f(v_{i,k_1}) = f(v_{i,k_2})$ и в этом случае. Теперь для произвольного четного $i \in \mathbb{Z}$ и произвольного $k \in \{1, \dots, p\}$ имеем

$$0 = \sum_{w \in \Gamma(v_{i-1,k})} f(w) = f(v_{i,k}) + \sum_{k' \in \{1, \dots, p\}} f(v_{i-2,k'}) = f(v_{i,k}) + p \cdot f(v_{i-2,1}) = f(v_{i,k}),$$

а для произвольного нечетного $i \in \mathbb{Z}$ и произвольного $k \in \{1, \dots, p\}$ имеем

$$0 = \sum_{w \in \Gamma(v_{i+1,k})} f(w) = f(v_{i,k}) + \sum_{k' \in \{1, \dots, p\}} f(v_{i+2,k'}) = f(v_{i,k}) + p \cdot f(v_{i+2,1}) = f(v_{i,k}).$$

Таким образом, f — функция, тождественно равная 0 на $V(\Gamma)$. Как следствие, 0 не является собственным значением оператора смежности $A_{\Gamma, F}$.

8.2. Приведем пример бесконечного кубического связного графа Γ , для которого корни уравнения $x^3 - x^2 - 6x + 2 = 0$ в поле $\mathbb{C}$ (для определенности с обычным абсолютным значением) не являются собственными значениями оператора смежности $A_{\Gamma, \mathbb{C}}$.

Положим

$$V(\Gamma) = \{u_{i,1}, \dots, u_{i,5}, v_i : i \in \mathbb{Z}\},$$

$$E(\Gamma) = \{\{u_{i,1}, u_{i,2}\}, \{u_{i,1}, u_{i,3}\}, \{u_{i,2}, u_{i,4}\}, \{u_{i,2}, u_{i,5}\}, \{u_{i,3}, u_{i,4}\}, \{u_{i,3}, u_{i,5}\}, \\ \{u_{i,4}, u_{i,5}\} : i \in \mathbb{Z}\} \cup \{\{u_{i,1}, v_i\} : i \in \mathbb{Z}\} \cup \{\{v_i, v_{i+1}\} : i \in \mathbb{Z}\}.$$

Тогда Γ — бесконечный кубический связный граф. Пусть λ — произвольный комплексный корень уравнения $x^3 - x^2 - 6x + 2 = 0$, и пусть $f \in \mathbb{C}^{V(\Gamma)}$ такова, что

$$\lambda f(w) = \sum_{w' \in \Gamma(w)} f(w')$$

для каждой вершины w графа Γ .

Предположим, что $f(v_j) \neq 0$ для некоторого $j \in \mathbb{Z}$. Тогда без потери общности можно предполагать, что $f(v_j) = 1$ и, кроме того, что $f(u_{j,2}) = f(u_{j,3})$ (в силу $\Gamma(u_{j,2}) = \Gamma(u_{j,3})$ и $\lambda \neq 0$) и $f(u_{j,4}) = f(u_{j,5})$ (в силу наличия у Γ автоморфизма, меняющего местами $u_{j,4}$ с $u_{j,5}$ и стабилизирующего остальные вершины графа Γ). Но тогда

$$\lambda f(u_{j,1}) = 1 + 2f(u_{j,2}),$$

$$\lambda f(u_{j,2}) = f(u_{j,1}) + 2f(u_{j,4}),$$

$$\lambda f(u_{j,4}) = 2f(u_{j,2}) + f(u_{j,4}),$$

что влечет $(\lambda^3 - \lambda^2 - 6\lambda + 2)f(u_{j,4}) = 2$. Противоречие с выбором λ доказывает, что $f(v_i) = 0$ для всех $i \in \mathbb{Z}$.

Для произвольного $i \in \mathbb{Z}$ из $f(v_{i-1}) = f(v_i) = f(v_{i+1}) = 0$ и $\lambda f(v_i) = f(v_{i-1}) + f(v_{i+1}) + f(u_{i,1})$ следует $f(u_{i,1}) = 0$, что с учетом $\lambda f(u_{i,1}) = f(v_i) + f(u_{i,2}) + f(u_{i,3})$ и равенства $f(u_{i,2}) = f(u_{i,3})$ (справедливого в силу $\Gamma(u_{i,2}) = \Gamma(u_{i,3})$ и $\lambda \neq 0$) влечет $f(u_{i,2}) = f(u_{i,3}) = 0$. Наконец, из $\lambda f(u_{i,4}) = f(u_{i,2}) + f(u_{i,3}) + f(u_{i,5}) = f(u_{i,5})$ и $\lambda f(u_{i,5}) = f(u_{i,2}) + f(u_{i,3}) + f(u_{i,4}) = f(u_{i,4})$ с учетом $\lambda^2 \neq 1$ следует, что $f(u_{i,4}) = f(u_{i,5}) = 0$. Таким образом, $f = 0$ и λ не является собственным значением оператора смежности $A_{\Gamma, \mathbb{C}}$ графа Γ .

Отметим, что группа $\text{Aut}(\Gamma)$ автоморфизмов графа Γ имеет 4 орбиты на $V(\Gamma)$.

ЗАМЕЧАНИЕ 8.1. Используемая при построении этого примера схема имеет следующий вид. Пусть Δ — конечный связный граф, $u \in V(\Delta)$ и $\lambda \in \mathbb{C}$. Предположим, что

(1) у графа Δ отсутствуют $(\mathbb{C}, \lambda)$ -пропагаторы относительно вершины u .

Ясно, что при выполнении условия (1) число λ является собственным значением матрицы смежности графа Δ (рассматриваемой над $\mathbb{C}$). В частности, λ — вполне вещественное целое алгебраическое число. Предположим дополнительно, что

(2) λ — простое (т. е. не кратное) собственное значение матрицы смежности графа Δ .

Согласно теореме 4.1 при выполнении условий (1) и (2) соответствующий λ собственный вектор матрицы смежности графа Δ , рассматриваемый как функция из $\mathbb{C}^{V(\Delta)}$, принимает ненулевое значение в вершине u .

(Для приводимого выше примера $V(\Delta) = \{u = u_1, \dots, u_5\}$, $E(\Delta) = \{\{u_1, u_2\}, \{u_1, u_3\}, \{u_2, u_4\}, \{u_2, u_5\}, \{u_3, u_4\}, \{u_3, u_5\}, \{u_4, u_5\}\}$, λ — любой комплексный корень уравнения $x^3 - x^2 - 6x + 2 = 0$.)

Для каждого $i \in \mathbb{Z}$ пусть Δ_i — граф, на который имеется изоморфизм φ_i графа Δ . Определим граф Γ , полагая $V(\Gamma) = (\cup_{i \in \mathbb{Z}} V(\Delta_i)) \cup \{v_i : i \in \mathbb{Z}\}$ (предполагается, что множества $V(\Delta_i)$, $i \in \mathbb{Z}$, попарно дизъюнкты и дизъюнкты с множеством $\{v_i : i \in \mathbb{Z}\}$), $E(\Gamma) = (\cup_{i \in \mathbb{Z}} E(\Delta_i)) \cup \{\{\varphi_i(u), v_i\} : i \in \mathbb{Z}\} \cup \{\{v_i, v_{i+1}\} : i \in \mathbb{Z}\}$. Тогда Γ — бесконечный локально конечный связный граф такой, что λ не является собственным значением оператора смежности $A_{\Gamma, \mathbb{C}}$. Действительно, если $f \in \mathbb{C}^{V(\Gamma)}$ — собственная функция оператора смежности $A_{\Gamma, \mathbb{C}}$, соответствующая собственному значению λ , то с учетом (1) имеем $f(v_i) = 0$ для всех $i \in \mathbb{Z}$ (из $f(v_i) \neq 0$ для некоторого $i \in \mathbb{Z}$ следовало бы наличие $(\mathbb{C}, \lambda)$ -пропагатора графа Δ_i относительно $\varphi_i(u)$, каковым являлось бы ограничение на $V(\Delta_i)$ функции $-f/f(v_i)$), что с учетом (2) влечет равенство f нулю всюду на $V(\Gamma)$ (наличие ненулевого ограничения f на $V(\Delta_i)$ для $i \in \mathbb{Z}$ ввиду $f(v_i) = 0$, $f(\varphi_i(u)) = \lambda f(v_i) - f(v_{i-1}) - f(v_{i+1}) = 0$ и замечания, сделанного сразу после формулировки условия (2), противоречило бы условию (2)); противоречие.

В заключение еще раз обратим внимание на то, что используемое в этой схеме построения число λ является вещественным.

8.3. В связи с замечанием 8.1 и замечанием 6.10 не лишен интереса вопрос о существовании бесконечного локально конечного связного графа Γ такого, что некоторое $\lambda \in \mathbb{C} \setminus \mathbb{R}$ не является собственным значением оператора смежности $A_{\Gamma, \mathbb{C}}$ (с обычным абсолютным значением на $\mathbb{C}$ для определенности). Положительный ответ на него дает приводимый здесь *пример (бесконечного) кубического связного графа Γ такого, что любой комплексный невещественный корень λ уравнения $x^3 + x^2 - 1 = 0$ (которое имеет два комплексно сопряженных невещественных корня и один вещественный корень) не является собственным значением оператора смежности $A_{\Gamma, \mathbb{C}}$* . (В силу неприводимости многочлена $x^3 + x^2 - 1 = 0$ над $\mathbb{Q}$ отсюда будет следовать (см. предложение 3.1), что и вещественный корень уравнения $x^3 + x^2 - 1 = 0$ не является собственным значением $A_{\Gamma, \mathbb{C}}$.)

Пусть Δ — граф с множеством вершин

$$V(\Delta) = \{u_j : 1 \leq j \leq 6\}$$

и множеством ребер

$$E(\Delta) = \{\{u_1, u_2\}, \{u_1, u_3\}, \{u_2, u_4\}, \{u_2, u_5\}, \{u_3, u_4\}, \\ \{u_3, u_6\}, \{u_4, u_5\}, \{u_5, u_6\}\}.$$

Граф Δ обладает тем (не совсем обычным для конечных графов) свойством, что для невещественного λ его $(\mathbb{C}, \lambda)$ -пропагатор относительно одной вершины, а именно вершины u_1 или u_6 , принимает нулевое значение в другой вершине, а именно соответственно в вершине u_6 или u_1 .

Пусть $\check{\Delta}$ — граф с множеством вершин $V(\check{\Delta}) = V(\Delta) \cup \{v, v'\}$ и множеством ребер $E(\check{\Delta}) = E(\Delta) \cup \{\{v, u_1\}, \{v', u_6\}\}$. Обозначим через U подпространство векторного пространства $\mathbb{C}^{V(\check{\Delta})}$ комплекснозначных функций на $V(\check{\Delta})$, состоящее из всех таких $f \in \mathbb{C}^{V(\check{\Delta})}$, что $\lambda f(u_j) = \sum_{u \in \check{\Delta}(u_j)} f(u)$ для всех $1 \leq j \leq 6$. Подпространство U имеет размерность 2. В качестве базиса U могут быть взяты функции f_1 и f_2 , определяемые следующим образом.

$$f_1(v) = 1 - 2\lambda, f_1(u_1) = -2 - \lambda, f_1(u_2) = \lambda, f_1(u_3) = -(1 + \lambda)/\lambda, f_1(u_4) = 1, f_1(u_5) = (1 + \lambda)/\lambda, f_1(u_6) = 0, f_1(v') = 0.$$

$f_2(w) = f_1(g(w))$ для всех $w \in V(\check{\Delta})$, где g — автоморфизм графа $\check{\Delta}$, стабилизирующий вершины u_3, u_4 и меняющий местами вершины v и v' , u_1 и u_6 , u_2 и u_5 .

Для дальнейшего важно заметить, что для произвольного $c \in \mathbb{C}$ функции $(c/(1 - 2\lambda))f_1$ и $(c/(1 - 2\lambda))f_2$ из U таковы, что $(c/(1 - 2\lambda))f_1(v) = c$, $(c/(1 - 2\lambda))f_1(u_6) = 0 = (c/(1 - 2\lambda))f_1(v')$, $(c/(1 - 2\lambda))f_2(v') = c$, $(c/(1 - 2\lambda))f_2(u_1) = 0 = (c/(1 - 2\lambda))f_2(v)$ и $\lambda(c/(1 - 2\lambda))f_k(u_j) = \sum_{u \in \check{\Delta}(u_j)} (c/(1 - 2\lambda))f_k(u)$ для всех $1 \leq k \leq 2, 1 \leq j \leq 6$.

Пусть теперь Γ — граф с множеством вершин

$$V(\Gamma) = \{u_{i,j} : i \in \mathbb{Z}, 1 \leq j \leq 6\}$$

и множеством ребер

$$E(\Gamma) = \{\{u_{i,1}, u_{i,2}\}, \{u_{i,1}, u_{i,3}\}, \{u_{i,2}, u_{i,4}\}, \{u_{i,2}, u_{i,5}\},$$

$$\{u_{i,3}, u_{i,4}\}, \{u_{i,3}, u_{i,6}\}, \{u_{i,4}, u_{i,5}\}, \{u_{i,5}, u_{i,6}\}, \{u_{i,6}, u_{i+1,1}\} : i \in \mathbb{Z}\}.$$

Граф Γ — бесконечный кубический связный граф. Покажем, что число λ не является собственным значением оператора смежности $A_{\Gamma, \mathbb{C}}$.

Предположим противное, и пусть $\tilde{f} \in \mathbb{C}^{V(\Gamma)}$ — собственная функция оператора смежности $A_{\Gamma, \mathbb{C}}$, соответствующая собственному значению λ . В силу невестественности λ подграф графа Γ , порожденный носителем функции $\tilde{f}$ не имеет конечных связных компонент (поскольку ограничение $\tilde{f}$ на такую компоненту являлось бы собственным вектором матрицы смежности конечного графа, соответствующим λ). В частности, найдется такое $m \in \mathbb{Z}$, что $\tilde{f}(u_{i,1}) \neq 0 \neq \tilde{f}(u_{i,6})$ для всех $i \in \mathbb{Z}_{\geq m}$ или для всех $i \in \mathbb{Z}_{\leq m}$. В силу наличия у Γ автоморфизма $u_{i,1} \mapsto u_{-i,6}, u_{i,2} \mapsto u_{-i,5}, u_{i,3} \mapsto u_{-i,3}, u_{i,4} \mapsto u_{-i,4}, u_{i,5} \mapsto u_{-i,2}, u_{i,6} \mapsto u_{-i,1}$, $i \in \mathbb{Z}$, и автоморфизма $u_{i,j} \mapsto u_{i+1,j}$, $i \in \mathbb{Z}, 1 \leq j \leq 6$, будем, не теряя общности, предполагать, что $m = 0$ и $\tilde{f}(u_{i,1}) \neq 0 \neq \tilde{f}(u_{i,6})$ для всех $i \in \mathbb{Z}_{\geq 0}$. (Для дальнейшего важно, собственно, лишь то, что $\tilde{f}$ может быть выбрана с отличными от 0 значениями $\tilde{f}(u_{0,6})$ и $\tilde{f}(u_{1,1})$.)

Положим $X_0 = \{u_{-1,6}, u_{0,1}, \dots, u_{0,6}, u_{1,1}\}$, $X_1 = \{u_{0,6}, u_{1,1}, \dots, u_{1,6}, u_{2,1}\}$. Каждый из подграфов $\langle X_0 \rangle_\Gamma$ и $\langle X_1 \rangle_\Gamma$ графа Γ очевидным образом изоморфен графу $\tilde{\Delta}$, что с учетом наличия функций f_1 и f_2 (см. выше) влечет наличие функций $f^- \in \mathbb{C}^{X_0}$ и $f^+ \in \mathbb{C}^{X_1}$ таких, что $f^-(u_{-1,6}) = \tilde{f}(u_{-1,6})$, $f^-(u_{0,6}) = 0 = f^-(u_{1,1})$, $\lambda f^-(u_{0,j}) = \sum_{u \in \Gamma(u_{0,j})} f^-(u)$ для всех $1 \leq j \leq 6$, $f^+(u_{2,1}) = \tilde{f}(u_{2,1})$, $f^+(u_{0,6}) = 0 = f^+(u_{1,1})$, $\lambda f^+(u_{1,j}) = \sum_{u \in \Gamma(u_{1,j})} f^+(u)$ для всех $1 \leq j \leq 6$. Продолжим функции f^- , f^+ до функций f_{ext}^-, f_{ext}^+ из $\mathbb{C}^{X_0 \cup X_1}$, полагая $f_{ext}^-(w) = 0$ для всех $w \in X_1$ и $f_{ext}^+(w) = 0$ для всех $w \in X_0$. Пусть $\hat{f} \in \mathbb{C}^{X_0 \cup X_1}$, $\hat{f}(w) = \tilde{f}(w) - f_{ext}^-(w) - f_{ext}^+(w)$ для всех $w \in X_0 \cup X_1$. Тогда $\hat{f}(u_{-1,6}) = 0 = \hat{f}(u_{2,1})$, $\hat{f}(u_{0,6}) = \tilde{f}(u_{0,6}) \neq 0 \neq \tilde{f}(u_{1,1}) = \hat{f}(u_{1,1})$, $\hat{f}(u_{i,j}) = \sum_{u \in \Gamma(u_{i,j})} \hat{f}(u)$ для всех $1 \leq i \leq 2, 1 \leq j \leq 6$. Но тогда ограничение функции $\hat{f}$ на множество $X := (X_0 \cup X_1) \setminus \{u_{-1,6}, u_{2,1}\}$ есть собственная функция матрицы смежности конечного графа $\langle X \rangle_\Gamma$, соответствующая собственному значению λ . Последнее, однако, невозможно в силу невестественности λ , что завершает доказательство.

Отметим, что группа $Aut(\Gamma)$ автоморфизмов графа Γ имеет 4 орбиты на $V(\Gamma)$.

8.4. Для графа из раздела 8.2 и графов из замечания 8.1 числа вершинной и реберной связности равны 1. Несколько сложнее построить пример бесконечного локально конечного регулярного графа, у которого числа вершинной и реберной связности больше 1, но для которого не все комплексные числа являются собственными значениями оператора смежности над $\mathbb{C}$ (с обычным абсолютным значением для определенности). Ниже строится пример бесконечного кубического графа Γ , у которого числа вершинной и реберной связности равны 2, но для которого число 0 не является собственным значением оператора смежности $A_{\Gamma, \mathbb{C}}$.

Для каждого $i \in \mathbb{Z}$ следующим образом определим граф Δ_i :

$$V(\Delta_i) = \{u_{i,1}, \dots, u_{i,16}\},$$

$$E(\Delta_i) = \{\{u_{i,1}, u_{i,3}\}, \{u_{i,2}, u_{i,4}\}, \{u_{i,3}, u_{i,5}\}, \{u_{i,3}, u_{i,6}\}, \{u_{i,4}, u_{i,7}\}, \{u_{i,4}, u_{i,8}\},$$

$$\begin{aligned} & \{u_{i,5}, u_{i,8}\}, \{u_{i,5}, u_{i,9}\}, \{u_{i,6}, u_{i,7}\}, \{u_{i,6}, u_{i,9}\}, \{u_{i,7}, u_{i,10}\}, \{u_{i,8}, u_{i,11}\}, \\ & \{u_{i,9}, u_{i,12}\}, \{u_{i,10}, u_{i,13}\}, \{u_{i,10}, u_{i,14}\}, \{u_{i,11}, u_{i,12}\}, \{u_{i,11}, u_{i,15}\}, \\ & \{u_{i,12}, u_{i,13}\}, \{u_{i,13}, u_{i,16}\}, \{u_{i,14}, u_{i,15}\}, \{u_{i,14}, u_{i,16}\}, \{u_{i,15}, u_{i,16}\}. \end{aligned}$$

(Предполагается, что $V(\Delta_{i'}) \cap V(\Delta_{i''}) = \emptyset$ для любых различных $i', i'' \in \mathbb{Z}$.)

Пусть $i \in \mathbb{Z}$, и пусть $f \in \mathbb{C}^{V(\Delta_i)}$ такова, что

$$\sum_{u' \in \Delta_i(u)} f(u') = 0 \quad (8.1)$$

для всех $u \in V(\Delta_i) \setminus \{u_{i,1}, u_{i,2}\}$. Тогда, полагая $a := f(u_{i,10})$ и $b := f(u_{i,14})$ и используя (8.1), легко получаем

$$\begin{aligned} f(u_{i,1}) &= f(u_{i,2}) = f(u_{i,7}) = f(u_{i,8}) = f(u_{i,12}) = f(u_{i,15}) = 0, \\ f(u_{i,3}) &= a - 2b, f(u_{i,4}) = -a + \frac{1}{2}b, f(u_{i,5}) = \frac{1}{2}b, u_{i,6} = -\frac{1}{2}b, \\ f(u_{i,9}) &= -a + 2b, f(u_{i,11}) = a - b, f(u_{i,13}) = -b, f(u_{i,16}) = -a. \end{aligned}$$

Определим следующим образом граф Γ :

$$V(\Gamma) = \cup_{i \in \mathbb{Z}} V(\Delta_i) = \{u_{i,1}, \dots, u_{i,16} : i \in \mathbb{Z}\},$$

$$E(\Gamma) = (\cup_{i \in \mathbb{Z}} E(\Delta_i)) \cup \{\{u_{i,1}, u_{i+1,1}\}, \{u_{i,2}, u_{i+1,2}\} : i \in \mathbb{Z}\}.$$

Тогда Γ — бесконечный кубический граф, числа вершинной и реберной связности которого равны 2. Покажем, что 0 не является собственным значением оператора смежности графа Γ . Пусть $\tilde{f} \in \mathbb{C}^{V(\Gamma)}$ такова, что

$$\sum_{u' \in \Gamma(u)} \tilde{f}(u') = 0 \quad (8.2)$$

для всех $u \in V(\Gamma)$. Для произвольного $i \in \mathbb{Z}$, применяя к ограничению функции $\tilde{f}$ на $V(\Delta_i)$ утверждение, полученное в предыдущем абзаце, заключаем, что

$$\tilde{f}(u_{i,1}) = 0 = \tilde{f}(u_{i,2}). \quad (8.3)$$

Далее, для произвольного $i \in \mathbb{Z}$ имеем

$$\Gamma(u_{i,1}) = \{u_{i-1,1}, u_{i,3}, u_{i+1,1}\}, \Gamma(u_{i,2}) = \{u_{i-1,2}, u_{i,4}, u_{i+1,2}\},$$

что с учетом (8.2) и (8.3) влечет $\tilde{f}(u_{i,3}) = 0 = \tilde{f}(u_{i,4})$ для всех $i \in \mathbb{Z}$. Но тогда, вновь применяя к ограничению функции $\tilde{f}$ на $V(\Delta_i)$, $i \in \mathbb{Z}$, утверждение, полученное в предыдущем абзаце, заключаем, что $\tilde{f}(u) = 0$ для всех $u \in V(\Delta_i)$, $i \in \mathbb{Z}$. Таким образом, каждая функция $\tilde{f} \in \mathbb{C}^{V(\Gamma)}$ с условием (8.2) тождественно равна 0 на $V(\Gamma)$. Следовательно, 0 не является собственным значением оператора смежности графа Γ .

Отметим, что группа $\text{Aut}(\Gamma)$ автоморфизмов графа Γ имеет конечное число орбит на $V(\Gamma)$.

8.5. Легко привести примеры бесконечных локально конечных связных вершинно-симметрических графов Γ таких, что для подходящего поля F с произвольным абсолютным значением и подходящего элемента $\lambda \in F$ имеем $S_{F,\lambda}(\Gamma) = V(\Gamma)$.

8.5.1. Пусть F — поле (с произвольным абсолютным значением) и $\lambda \in F$ является собственным значением матрицы смежности над F конечного связного вершинно-симметрического графа Λ . Укажем пример бесконечного локально конечного связного вершинно-симметрического графа Γ , для которого $S_{F,\lambda}(\Gamma) = V(\Gamma)$. Пусть Δ — произвольный бесконечный локально конечный связный вершинно-симметрический граф. Положим

$$V(\Gamma) = \{(v, w, j) : v \in V(\Delta), w \in V(\Lambda), j \in \{1, 2, 3, 4\}\},$$

$$\begin{aligned} E(\Gamma) = & \{ \{(v_1, w_1, j_1), (v_2, w_2, j_2)\} : \{v_1, v_2\} \in E(\Delta), w_1, w_2 \in V(\Lambda), \\ & j_1, j_2 \in \{1, 2, 3, 4\}\} \cup \{ \{(v, w_1, j_1), (v, w_2, j_2)\} : v \in V(\Delta), w_1, w_2 \in V(\Lambda), \\ & j_1, j_2 \in \{1, 2, 3, 4\}, |j_1 - j_2| \in \{1, 3\}\} \cup \{ \{(v, w_1, j), (v, w_2, j)\} : v \in V(\Delta), \\ & \{w_1, w_2\} \in E(\Lambda), j \in \{1, 2, 3, 4\}\}. \end{aligned}$$

Ясно, что Γ — бесконечный локально конечный связный вершинно-симметрический граф. Далее, поскольку $\lambda \in F$ — собственное значение матрицы смежности над F графа Λ , имеется собственная функция $f \in F^{V(\Lambda)}$ матрицы смежности над F графа Λ , соответствующая собственному значению λ . Пусть $v_0 \in V(\Delta)$. Определим функцию $\tilde{f} \in F^{V(\Gamma)}$, полагая $\tilde{f}((v_0, w, 1)) = f(w)$ для всех $w \in V(\Lambda)$ и $\tilde{f}((v_0, w, 3)) = -f(w)$ для всех $w \in V(\Lambda)$, а во всех других вершинах графа Γ полагая $\tilde{f}$ равной 0. Легко убедиться, что $\tilde{f}$ — собственная функция оператора $A_{\Gamma, F}$, соответствующая собственному значению λ , причем $\tilde{f}$ имеет конечный носитель. Согласно теореме 4.1 это влечет $S_{F,\lambda}(\Gamma) \neq \emptyset$, что в силу вершинной симметричности графа Γ дает требуемое равенство $S_{F,\lambda}(\Gamma) = V(\Gamma)$.

8.5.2. Если Γ — произвольный бесконечный локально конечный связный вершинно-симметрический граф с тем свойством, что для $u \in V(\Gamma)$ найдется $v \in V(\Gamma)$, для которой $\{u, v\} \in E(\Gamma)$ и $\Gamma(u) \setminus \{v\} = \Gamma(v) \setminus \{u\}$, то, как легко видеть, для произвольного поля F (с произвольным абсолютным значением) имеем $S_{F,-1}(\Gamma) = V(\Gamma)$. Сходным образом, если Γ — произвольный бесконечный локально конечный связный вершинно-симметрический граф с тем свойством, что для $u \in V(\Gamma)$ найдется $v \in V(\Gamma) \setminus \{u\}$, для которой $\Gamma(u) = \Gamma(v)$, то для произвольного поля F (с произвольным абсолютным значением) имеем $S_{F,0}(\Gamma) = V(\Gamma)$.

Список литературы

- [1] С. Ленг, *Алгебра*, Мир, М., 1968; пер. с англ.: S. Lang, *Algebra*, Addison-Wesley Publishing Co., Inc., Reading, MA, 1965.
- [2] Д. Цветкович, М. Дуб, Х. Захс, *Спектры графов. Теория и применение*, Наук. думка, Киев, 1984; пер. с англ.: D. Cvetkovic, M. Doob, H. Sachs, *Spectra of graphs - Theory and applications*, DVW, Berlin, 1980.

- [3] A. Brouwer, W. Haemers, *Spectra of graphs*, Springer, New York, 2012.
- [4] B. Mohar, “The spectrum of an infinite graph”, *Linear algebra appl.*, **48** (1982), 245–256.
- [5] B. Mohar, W. Woess, “A survey on spectra of infinite graphs”, *Bull. London Math. Soc.*, **21** (1989), 209–234.
- [6] O. Toeplitz, “Über die Auflösung unendlich vieler linearer Gleichungen mit unendlich vielen Unbekannten”, *Rend. Circ. Mat. Palermo*, **28** (1909), 88–96.
- [7] A. Abian, “Solvability of infinite systems of linear equations”, *Arch. Math. (Brno)*, **12** (1976), 43–46.
- [8] Ю. И. Любич, “Линейный функциональный анализ”, Итоги науки и техники. Соврем. пробл. мат. Фундам. направления, **19**, ВИНТИ, М., 1988, 5–305.
- [9] S. Wang, “On the inverses of infinite matrices over a field”, *J. Beijing Normal University (Natural Sci.)*, **29**:3 (1993), 327–330. (На кит. яз.).
- [10] V. I. Trofimov, “The existence of nonconstant harmonic functions on infinite vertex-symmetric graphs”, *Europ. J. Combinatorics*, **19** (1998), 519–523.
- [11] *Нерешенные вопросы теории групп. Коуровская тетрадь*, сост. В. Д. Мазуров, Е. И. Хухро, ИМ СО РАН, Новосибирск, 2002.
- [12] C. D. Godsil, *Algebraic combinatorics*, Chapman and Hall, New York, 1993.
- [13] W. Woess, *Random walks on infinite graphs and groups*, Cambridge Tracts in Math., **138**, Cambridge Univ. Press, Cambridge, 2008.
- [14] Н. Бурбаки, *Алгебра (Многочлены и поля. Упорядоченные группы)*, Наука, М., 1965; пер. с франц.: N. Bourbaki, *Algebre*, Hermann, Paris.
- [15] L. Bartholdi, “Counting pathes in graphs”, *Enseign. Math.*, **45** (1999), 83–131.
- [16] A. Taylor, *Introduction to functional analysis*, Wiley, New York, 1958.
- [17] У. Браттели, Д. Робинсон, *Операторные алгебры и квантовая статистическая механика*, Мир, М., 1982; пер. с англ.: O. Bratteli, D. W. Robinson, *Operator algebras and quantum statistical mechanics 1*, Texts and monographs in physics, Springer, New York e. a., 1979.
- [18] M. H. Stone, *Linear transformations in Hilbert space and their applications to analysis*, Amer. Math. Soc. Colloquium Pub., **15**, Amer. Math. Soc., New York, 1932.

В. И. ТРОФИМОВ (V. I. TROFIMOV)

Институт математики и механики им. Н. Н. Красовского

УрО РАН, г. Екатеринбург;

Уральский федеральный университет им. первого

Президента России Б. Н. Ельцина, г. Екатеринбург;

Уральский математический центр, г. Екатеринбург

E-mail: trofimov@imm.uran.ru