ИССЛЕДОВАНИЕ ФАЗОВОГО ПЕРЕХОДА В МОДЕЛИ ДИКЕ С ПОМОЩЬЮ ВРАЩАЮЩЕГОСЯ ПРЕДСТАВЛЕНИЯ ГОЛЬШТЕЙНА-ПРИМАКОВА

Селиванов Александр Сергеевич, аспирант
E-mail: iskanderselivanov@mail.ru

НИТУ МИСиС
г. Москва, РФ

Аннотация. Основной задачей квантовой оптики является изучение взаимодействия света с веществом. Исследования в данной области находят широкое применение в разработке перспективных метаматериалов и квантовых компьютеров. Моделирование вещества сводится к рассмотрению системы двухуровневых атомов, способных взаимодействовать с модой электромагнитной волны в резонансной полости. Реализация подобного приближения находит место в использовании модели Дике. В данной работе был рассмотрен свойственный модели Дике сверхизлучательный фазовый переход с помощью вращающегося представления Гольштейна-Примакова, в котором атомная подсистема представляется в виде коллективных возбуждений спиновых волн. В качестве параметра фазового перехода в сверхизлучательное состояние используется угол поворота спиновой (атомной) подсистемы. В термодинамическом пределе с помощью преобразования Боголюбова было получено представление исходной модели в виде пары связанных гармонических осцилляторов с нефакторизованной волновой функцией основного состояния. В импульсном представлении в пределе нулевой абсолютной температуры получена редуцированная матрица плотности при помощи которой было аналитически обнаружено, что энтропия фон Неймана имеет критический индекс ½ по отношению к углу поворота и ¼ по отношению к константе связи.

Ключевые слова. Фазовые переходы, сверхизлучательное состояние, модель Дике, представление Гольштейна-Примакова, матрица плотности.

Рассмотрим гамильтониан, который описывает взаимодействие N двухуровневых атомов с резонансной частотой ω_0 с электромагнитной модой частоты ω в резонансной полости. Для изучаемой системы гамильтониан примет следующий вид:

$$\hat{H} = \frac{1}{2}\left(\hat{p}^2 + \omega^2\hat{q}^2\right) + gp\hat{S}^y - \omega_0\hat{S}^z \qquad (1)$$

В уравнении (1) первый член соответствует электромагнитному полю, второй член отвечает взаимодействию атомной и электромагнитной (фотонной) подсистем с константой связи g, а третий член отвечает атомной подсистеме.

Преобразования Гольштейна-Примакова [1] позволяют рассмотреть подсистему атомов в виде коллективных возбуждений спиновых волн. Вводя стандартно операторы рождения $\hat{a}^+$ и $\hat{b}^+$ и уничтожения a и b для атомной и электромагнитной подсистем соответственно, мы можем получить следующий гамильтониан в термодинамическом пределе ($N \to \infty$):

$$H = \omega\left(\hat{a}^+\hat{a} + \frac{1}{2}\right) - \omega_0\left(S - \hat{b}^+\hat{b}\right) - \frac{g\sqrt{S\omega}}{2}\left(\hat{a}^+ - \hat{a}\right)\left(\hat{b}^+ - \hat{b}\right) \qquad (2)$$

где S – суммарный спин атомной подсистемы.

Данный гамильтониан представляет собой систему из сцепленных осцилляторов. При помощи преобразования Боголюбова [2] исходные операторы координат и импульсов (или соответствующие им операторы рождения и уничтожения) преобразуются с помощью матрицы поворота. При использовании данного преобразования, можно перейти к системе независимых осцилляторов (квазичастиц) с соответствующими нормальными частотами:

$$2\varepsilon^2_{1,2} = \omega_0^2 + \omega^2 \pm \sqrt{\left(\omega_0^2 - \omega^2\right)^2 + 4\omega^2 g^2 S {\omega_0}^2} \tag{3}$$

Из (3) видно, что при определенном значении gc одна из частот станет мнимой величиной: в системе произойдет фазовый переход в сверхизлучательное состояние. Для описания перехода в сверхизлучательное состояние рассматривается сдвиг операторов рождения и уничтожения фотонной части на некоторую величину $\sqrt{\alpha}$ и переход к новым операторам следующим образом:

$$\hat{a}^+ = \hat{c}^+ \pm i\sqrt{\alpha} \tag{4}$$

Преобразования для оператора уничтожения получаются комплексным сопряжением (4).

Для описания сверхизлучательного состояния атомной подсистемы применим поворот операторов спинов, записанных в исходной форме (1) при помощи матрицы поворота на угол θ следующим образом [3]:

$$\begin{pmatrix} \hat{S}^y \\ \hat{S}^z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \cos\theta & -\sin\theta \\ \sin\theta & \cos\theta \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \hat{J}^y \\ \hat{J}^z \end{pmatrix} \tag{5}$$

Матричное соотношение (5) представляет собой стандартную процедуру перехода от старых операторов спина $\hat{S}^\alpha$ к новым операторам $\hat{J}^\alpha$ (α = y, z). Произведя преобразование спиновых операторов (4) и возвращаясь к операторам рождения и уничтожения по аналогии с гамильтонианом (2), мы получаем гамильтониан с учетом вращающегося представления Гольштейна-Примакова. После диагонализации которого имеем выражения для нормальных частот:

$$2\varepsilon_{1,2}^2 = \frac{\omega_0^2}{\cos^2\theta} + \omega^2 \pm \sqrt{\left(\frac{\omega_0^2}{\cos^2\theta} - \omega^2\right)^2 + 4\omega^2\omega_0^2} \tag{6}$$

Поворот операторов спина на угол θ позволяет описать сверхизлучательное состояние системы.

В диагональном виде с нормальными частотами ε1,2 гамильтониан системы примет вид, который соответствует двум независимым гармоническим осцилляторам с нормальными частотами (7):

$$\hat{H} = \varepsilon_1\left(\hat{e}_1^+\hat{e}_1 + \frac{1}{2}\right) + \varepsilon_2\left(\hat{e}_2^+\hat{e}_2 + \frac{1}{2}\right) \tag{7}$$

где $\hat{e}_k^+$ и $\hat{e}_k$ – операторы рождения и уничтожения в диагональной форме (k = 1,2).

Полученный гамильтониан (7) позволяет легко получить волновые функции в сверхизлучательном состоянии в виде произведений волновых функций каждого из осцилляторов. В импульсном представлении волновые функции имеют вид

$$\Psi = \left(\frac{1}{\pi^2\varepsilon_1\varepsilon_2}\right)^{1/4} \exp\left(-\frac{p_1^2}{2}\right)\exp\left(-\frac{p_2^2}{2}\right). \tag{8}$$

Произведя обратное преобразование Боголюбова, мы можем перейти к исходным координатам *x*, *y* и импульсам *px*, *py*, отвечающих каждой подсистеме. При помощи волновой функции (8) мы можем вычислить редуцированную матрицу плотности как:

$$\rho\left(p_x, p_x{}'\right) = C\int e^{-\frac{p_y^2}{L^2}}\Psi^*(p_x, p_y)\Psi(p_x', p_y)dp_y, \tag{9}$$

где C – нормировочная константа.

Полученная матрица плотности (9) позволяет вычислить энтропию фон Неймана для данной системы:

$$S = -\int \rho \log_2 \rho dp_x. \tag{10}$$

В пределе малых углов θ мы можем получить следующую асимптотику для интеграла (10):

$$S \propto -\nu \log_2 \theta. \tag{11}$$

Она описывает логарифмическую расходимость энтропии в области фазового перехода в сверхизлучательное состояние с критическим индексом ν = ½ для угла θ. Сравнивая с результатами работы [3], можно получить вдвое большее значение по другому параметру порядка – константе связи.

Таким образом, вращающееся представление Гольштейна-Примакова позволяет адекватно описать фазовый переход в сверхизлучательное состояние для данной системы.

Библиографический список

1. Holstein T., Primakoff H. Phys. – Rev. 58, 1098 (1949).

2. Neil Lambert. Entanglement and the Phase Transition in Single-Mode Superradiance/ Clive Emary, Tobias Brandes // Physical review letters. – 073602-1 (2004).

3. Mukhin, S. I. First-order dipolar transition in the Dicke model with infinitely coordinated frustrating interaction / N. V. Gnezdilov // Physical review A. 97, 053809 (2018).